5

Pitágoras, Euler, Hutton e Amigos: Ensaios sobre a História da Matemática

John A. Fossa

Coleção CAROÁ

eduepb

Universidade Estadual da Paraíba
Profª. Célia Regina Diniz | Reitora
Profª. Ivonildes da Silva Fonseca| Vice-Reitora

Editora da Universidade Estadual da Paraíba
Cidoval Morais de Sousa | Diretor

Editora indexada no SciELO desde 2012

Associação Brasileira das Editoras Universitárias
Editora filiada a ABEU

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone (83) 3315-3381 - e-mail: eduepb@setor.uepb.edu.br | http://eduepb.uepb.edu.br

John A. Fossa

Pitágoras, Euler, Hutton e Amigos

Ensaios sobre a História da Matemática

eduepb
Campina Grande-PB
2022

O46 Fossa, John A.
Pitágoras, Euler, Hutton e Amigos: ensaios sobre a história da Matemática [Livro Eletrônico]/. John A. Fossa. - Campina Grande: EDUEPB, 2022.
1000kb. 177 p.: il.

ISBN 978-85-7879-238-1 (Impresso)
ISBN 978-85-7879-239-8 (E-book)

1. Matemática. 2. Pitágoras. 3. História da Matemática. I. Título

21. ed. CDD 510

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme Lei nº 10.994, de 14 de dezembro de 2004

Sobre a Coleção

Caroá, uma coleção de livros do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM-UEPB), tem por objetivo publicar e divulgar resultados de pesquisas do próprio PPGECEM e de outros programas de pós-graduação com linhas de pesquisas semelhantes, tanto do Brasil quanto de outros países.

Caroá é uma planta originária da região caririzeira, típica da Caatinga brasileira, simboliza a resistência da natureza contra a seca. Foi com base em algumas características desta planta que surgiu a proposta de batizar a coleção de livros do PPGECEM-UEPB com este nome.

Sumário

Apresentação

O presente compêndio, republicado pela Coleção Caroá, é uma coleção de dez artigos sobre a História da Matemática. Embora vários deles já fossem publicados em revistas especializadas ou anais de eventos, são reunidos aqui para fornecer um acesso mais fácil ao leitor interessado. Os que foram originalmente publicados em inglês são aqui apresentados traduzidos para a língua portuguesa.

Caso o leitor ficasse curioso sobre a palavra "amigos" no título, faço uma pequena explicação. Há, de fato, um artigo sobre números amigáveis no compêndio. Propriamente falando, não são estes, porém, os amigos aos quais o título faz alusão. Antes, são os matemáticos que trabalhavam em áreas afins e, portanto, são metaforicamente amigos aos três matemáticos citados no título. De certa forma, podemos dizer que Pitágoras representa a matemática antiga, abordada nos primeiros quatro capítulos, Euler, os séculos 17 e 18, abordados no primeiro capítulo e nos capítulos cinco até oito, enquanto Hutton representa a reflexão sobre a própria matemática e sua história, abordada nos últimos dois capítulos.

Ainda agradeço às minhas três amigas, Joice, Andreia e Sarah, que colaboraram comigo nos três capítulos sobre Euler. A sua alegre dedicação ajudou a transmudar uma tarefa espinhosa numa maravilhosa aventura intelectual. Agradeço também aos responsáveis para as publicações originais a sua anuência na republicação aqui dos textos originais ou traduzidos. Os sete artigos desta condição têm as seguintes procedências:

- **A História da Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat**
  Foi apresentado no V Seminário Nacional de História da Matemática (V SNHM), que houve lugar em Rio Claro, SP, nos dias 13-16 de abril de 2003. Apareceu em Marcos V. TEIXEIRA e Sergio R. NOBRE (Eds.). *Anais do V SNHM*. Rio Claro: SBHMat, 2003 [ISBN: 85-89097-11-0]. É republicado com a permissão dos editores dos *Anais* e o presidente da SBHMat (Sérgio R. Nobre).

- **Sobre o Pentagrama como um Emblema Pitagórico**
  Apareceu como "On the Pentagram as a Pythagorean Emblem" na *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 6, n. 12 (outubro), 2006 [ISSN: 1519-955X]. É republicado com a permissão do editor da RBHM e o presidente da SBHMat.

- **O Que Significa Ser Pitagórico?**
  Apareceu como "What makes a Pythagorean Pythagorean?" na *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 10, n. 20 (outubro), 2010 [ISSN: 1519-955X]. É republicado com a permissão do editor da RBHM e o presidente da SBHMat.

- **Observação sobre os Primeiros Três Postulados de Euclides**
  Apareceu como "On Euclid's First Three Postulates" na *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 13, n.

26 (outubro), 2013 [ISSN: 1519-955X]. É republicado com a permissão do editor da RBHM e o presidente da SBHMat.

- **O Primeiro Trabalho de Euler sobre Equações Diofantinas**
  Foi apresentado no IX Seminário Nacional de História da Matemática (IX SNHM), que houve lugar em Aracaju, ES, nos dias 17-20 de abril de 2011. Apareceu em Carlos Henrique Barbosa GONÇALVES e Eva Maria Siqueira ALVES (Eds.). *Anais do IX SNHM*. SBHMat, 2011 [ISSN: 2236-4102]. É republicado com a permissão dos editores dos *Anais* e o presidente da SBHMat.

- **Alguns Aspectos Históricos da Investigação de Leonhard Euler sobre os Números Pentagonais**
  Foi apresentado no IX Seminário Nacional de História da Matemática (IX SNHM), que houve lugar em Aracaju, ES, nos dias 17-20 de abril de 2011. Apareceu em Carlos Henrique Barbosa GONÇALVES e Eva Maria Siqueira ALVES (Eds.). *Anais do IX SNHM*. SBHMat, 2011 [ISSN: 2236-4102]. É republicado com a permissão dos editores dos *Anais* e o presidente da SBHMat.

- **Matemática, História e Alienação**
  Foi apresentado no V HTEM, que houve lugar em Recife, PE, nos dias 25-30 de julho de 2010. É republicado com a permissão do organizador do evento (Frank Bellemain).

1

História da Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat

John A. Fossa

Propomos esboçar, neste trabalho, uma pequena história da Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat. Isto não quer dizer, contudo, que antes de Pitágoras não houvesse estudos nessa área da matemática; nem quer dizer que depois de Fermat nada de importante tenha sido acrescentado a ela. Por um lado, parece que o conceito de número é tão velho quanto a própria humanidade e, por outro lado, a moderna Teoria dos Números começa a desabrochar com as investigações de Euler, Legendre e Gauss, entre outros, uns 60 ou 70 anos depois da morte de Fermat. O que motiva, então, os referidos recortes?

Em primeiro lugar, Pitágoras parece ser o primeiro pensador a tematizar o *lógos* do mundo em termos da matemática e, especificamente, em termos da Teoria dos Números. As escolas pitagóricos mantiveram esta tradição durante toda a Antiguidade e no início da Idade Média. Embora haja ainda uma carência de informação sobre a tradição pitagórica, é possível que o último grande pensador nesta tradição tenha sido Diofanto. Depois deste pensador, a tradição parece tornar-se mais tênue, embora talvez não desapareça por completo até mais tarde na história. No entanto, a matemática sagrada da Idade Média tardia e do Renascimento retoma aspectos da tradição pitagórica.

Em segundo lugar, Fermat se interessou pela Teoria dos Números a partir da sua leitura da *Aritmética* de Diofanto. Isto é, ele investigava questões que emergem da tradição pitagórica e usava métodos que não seriam muito estranhos para os membros desta tradição. Em contraste, os matemáticos que vêm depois de Fermat começaram a desenvolver novos assuntos com métodos inovadores que os distanciam da tradição pitagórica.

As considerações feitas nos dois parágrafos anteriores mostram que o período de Pitágoras a Fermat representa certa unidade no desenvolvimento da Teoria dos Números. Não devemos exagerar esta unidade, pois, de fato, o referido período não era uniforme. No entanto, há unidade suficiente para torná-lo um interessante objeto de estudo.

Apologia Metodológica

Nem todo mundo, porém, concordaria com a avaliação feita no parágrafo anterior. Na verdade, André Weil (2001, p. 3) contrasta a unidade da Teoria dos Números depois de Fermat com falta de unidade antes dele:

> Thus an account of number theory since Fermat can do full justice to the inner coherence of the topic as well as to the continuity of its development. In contrast with this, the mere fact that Fermat initially had to draw

> his main inspiration from a Greek author of the third century, only lately come to light, points to the entirely different character of much of the earlier mathematical work as well as to the frequent disappearance and re-appearance of essential sources of knowledge in former times.

Assim sendo, Weil faz duas restrições à Teoria dos Números no período assinalado. Em primeiro lugar, ele afirma que não há uma "continuidade de desenvolvimento". Cada matemático, segundo a teoria de Weil, trabalha mais ou menos isolado, investigando tópicos independentes ou buscando inspiração em obras separadas por um grande lapso de tempo. Desta forma, não há um desenvolvimento lógico da teoria, em que geração após geração de matemáticos gradativamente constroem a mesma em um esforço comunitário. Em segundo lugar, ele afirma que a falta de fontes faz com que seja impossível elaborar uma verdadeira história do período, pois exegese textual tem de ser substituída por "reconstruções conjeturais tênues" (Weil, 2001, p. 3):

> ... the would-be historian must of necessity confine himself to the description of a comparatively small number of islands accidentally emerging from an ocean of ignorance, and to tenuous conjectural reconstructions of the submerged continents which at one time must have bridged the gaps between them.

Interessantemente, a segunda alegação de Weil tende a contradizer a primeira, pois se houvesse "continentes submersos" ligando as ilhas dos textos sobreviventes, então o desenvolvimento deste ramo da matemática no referido período não seria tão desconexo quanto Weil supõe.

Weil tem razão na sua segunda alegação, pois, de fato, há certa falta de textos referente à Teoria dos Números neste período. Consequentemente, a "reconstrução conjetural" é um instrumento necessário para a compreensão do período. Como Weil alerta, isto traz certos riscos. Na verdade, Kenneth O. May (1975) aponta para o fato de que é até perigoso deduzir que uma figura histórica conhecia um resultado, baseando-se no fato de ser este resultado uma consequência óbvia do que ela sabia.

No entanto, se o instrumento de reconstrução for usado com cautela, ele pode nos fornecer muitos resultados interessantes. Em primeiro lugar, consequências óbvias podem ser atribuídas às escolas com menos probabilidade de erro do que quando a atribuição é feita a um indivíduo. Segundo, quando sabemos que um indivíduo ou uma escola estava de posse de dois resultados, frequentemente podemos reconstruir as etapas intermediárias. É claro que podem existir várias possibilidades e cada possibilidade terá de ser avaliada com referência à matemática da época. Terceiro, é muito importante lembrar que a matemática do período em questão não era uma disciplina isolada, mas era parte de um sistema cultural complexo. Consequentemente, textos que não são obviamente matemáticos podem nos indicar muito sobre a matemática da época. Quarto, a reconstrução pode ter fortes ressonâncias em outros aspectos da matemática da época e/ou com disciplinas conexas (não somente as ciências, mas a filosofia e a arte). Geralmente estas ressonâncias são inesperadas, no entanto revelam a unidade de pensamento de um indivíduo ou uma escola e é evidência muito forte da veracidade da reconstrução. Um exemplo disto é a descoberta da relação entre o Número Nupcial e o Número do Tirano, feita por Erickson e Fossa (1996). Finalmente, a reconstrução deverá ser consoante com a linguagem e os métodos gerais da matemática da época.

Desta forma, vemos que, quando usada com cautela e bom senso, a reconstrução pode nos fornecer resultados inteiramente confiáveis. Naturalmente, como qualquer outra parte da ciência, o resultado de tais investigações deve ser submetido a outros pesquisadores da área para avaliação crítica, pois é no cadinho da crítica que os méritos e deméritos de qualquer teoria – pois tanto a reconstrução quanto o exegese são teorias – é melhor avaliada.

Pitágoras

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos por volta de 570 a.C. Segundo as biografias dele escritos por Jâmblico[1] (250?-325?), Porfírio[1] (233?-305?), e Diógenes Laertio[1] (século III), ele viajou por muitos anos no Egito e na Babilônia, onde não somente aprendeu a sabedoria destes povos, mas superou seus próprios mestres. De volta a Samos, abriu uma escola; no entanto, desentendimentos com Polícrates, o tirano de Samos, o levaram a emigrar para Crotona na Magna Grécia (sul da Itália), onde fundou uma irmandade semifechada. A irmandade tinha vários fins, dos místico-religiosos aos econômicos e políticos, e a sua influência sempre crescente no governo da cidade não foi bem vista por certos crotoneses. Depois de vários anos, Pitágoras foi tachado como um bruxo perigoso, sua escola foi atacada e os membros mortos ou expulsos da cidade. O próprio Pitágoras, segundo vários relatos, aparentemente escapou para Metaponto, onde faleceu pouco depois (já tinha mais do que 80 anos de idade), embora alguns relatos afirmem que ele foi morto fugindo do ataque dos furiosos crotonenses.

1 Ver, por exemplo, Guthrie (1987).

É interessante observar que, embora as mulheres fossem altamente reprimidas na Grécia antiga, os pitagóricos as aceitaram como membros da sua comunidade científica, o que poderia ter sido um fator na atitude dos cidadãos de Crotona para com Pitágoras. Esty (1979) mostra a "imagem" de Pitágoras em algumas moedas antigas.

Pitágoras foi aparentemente um aluno dos físicos jônicos. Estes procuravam o *arché*, ou seja, a matéria básica e o princípio do movimento de todas as coisas. Para Tales, o *arché* era a água. Para Anaxímenes, era o ar, enquanto que, segundo Heráclito, era o fogo. Para Pitágoras, o *arché* era número. Assim, ele provavelmente concebia o número como algum tipo de matéria rarefeita. Pitágoras, no entanto, rompeu com os físicos, pois pensava que o *arché*, por si só, não explicava o mundo. Era necessário procurar o *lógos*, ou seja a inteligibilidade do mundo. De fato, para Pitágoras, tudo não era número, mas número e harmonia, onde harmonia significava razões e proporções entre números. A ideia de que o mundo é inteligível devido à sua estrutura matemática foi tão revolucionária quanto fecunda. Desembocaria, com Platão, na fundação da metafísica (ver Erickson e Fossa, 2006) e é a pressuposição básica de toda a ciência.

Conta-se que Pitágoras ficou ciente da importância dos números quando notou que as concordâncias musicais são descritíveis por razões entre números naturais pequenos. Assim, as três concordâncias principais são a oitava, que é 2:1, a quarta, 4:3, e a quinta, 3:2; ainda há o tom, que é 9:8. A oitava, a quarta e a quinta são dadas por razões entre os primeiros quatro números, elementos do conjunto {1, 2, 3, 4} que era chamado do *tektractys* e que representam, respectivamente, o ponto, a reta (segmento), o triângulo equilátero e o tetraedro regular, conforme mostra a Figura 1. Desta forma, a soma destes números, 10 = 1+2+3+4, era considerada o número perfeito porque compreendia toda a existência tridimensional.

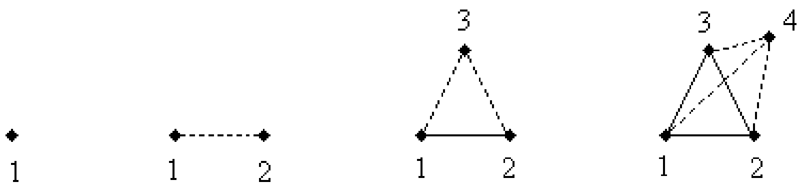


Figura 1.

Além do estudo da matemática, Pitágoras foi o primeiro a teorizar sobre a música e foi o fundador da filosofia no sentido mais amplo deste termo (termo, aliás, que ele criou), indo além das especulações físicas dos jônicos e tematizando o homem e seu lugar no *kósmos* e na *pólis*. Incorporou em seu pensamento os temas dos egípcios e dos babilônios, bem como os órficos, mas sempre investigou todas estes temas à luz da razão e, especialmente, à luz da matemática. Embora não tenha escrito livros especializados sobre estes temas, legou o seu pensamento à posteridade através da irmandade pitagórica.

Os Pitagóricos

Na sua biografia de Pitágoras, Jâmblico (ver Guthrie, 1987) dá uma lista de 218 pitagóricos e 17 pitagóricas. Ainda diz que a maioria dos pitagóricos não são conhecidos nominalmente. Muitos eram apenas ouvintes e não participavam plenamente na irmandade. Mas, não devemos pensar na irmandade como uma escola doutrinária fechada. Pitágoras prezava o pensamento, não sistemas fechados e entre os pitagóricos há pensadores independentes que formaram suas próprias escolas. Assim, podemos pensar nos pitagóricos como um grupo de pesquisa, cujos membros compartilhavam certas pressuposições básicas e, a partir destas, tentavam avançar o conhecimento com as suas pesquisas. Destacaremos aqui apenas Arquitas (primeira metade do século IV a.C.), Platão (427a.C.?-347a.C.), Euclides (*fl.* 300a.C.?), Nicômaco (*fl.* 100?), Têon (início do século II) e Diofanto (*fl.* século III).

Arquitas talvez tenha sido o matemático mais brilhante da segunda geração dos pitagóricos. Aluno de um importante pensador pitagórico, Filolao, ele fez importantes contribuições à ciência, especialmente no que se diz a respeito à aplicação da matemática à ciência. Parece ter sido o primeiro a organizar a matemática no Quadrívio: Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. Fez várias construções geométricas interessantes e determinou as propriedades das séries aritmética, geométrica e harmônica. Foi, por muitos anos, o governante de Tarento (na Magna Grécia) e, neste posto, salvou Platão do seu encarceramento em Siracusa (também na Magna Grécia) nas mãos do tirano Dionísio.

Platão era um rico ateniense que começou a vida pública como aluno e apologista de Sócrates, um filósofo da tradição sofista. Em seguida, desenvolveu uma teoria ontológica e epistemológica de formas, que, no entanto, padeceu de várias dificuldades. Através do seu contato com Arquitas, porém, ficou ciente das doutrinas mais profundas dos pitagóricos e adotou-as como a base da sua estruturação da metafísica pela matemática. A sua escola, a Academia, contava entre seus membros alguns dos matemáticos pitagóricos mais brilhantes de toda a Antiguidade – por exemplo, Teetetus e Eudoxo.

Euclides estudou na Academia, tendo os alunos de Platão como seus mestres. No entanto, não é claro se ele chegou à Academia antes de Aristóteles haver partido. Em qualquer caso, foi na Academia que Euclides aprendeu a doutrina aristotélica de axiomatização, que ele aplicaria magistralmente nos seus *Elementos*, provavelmente o mais famoso livro de matemática. Eventualmente, mudou-se para Alexandria, onde abriu uma escola que perdurou muito tempo. Vários matemáticos importantes, como Apolônio, estudaram na escola de Euclides.

Nicômaco de Gerasa provavelmente estudou matemática em Alexandria, o centro de investigações neopitagóricas da época. Foi, de fato, um dos principais neopitagóricos e foi altamente conceituado por seus contemporâneos. No entanto, a maioria das suas obras foi perdida e, em consequência, os historiadores da matemática tendem a avaliá-lo baseado apenas na sua *Introdução à Aritmética* (ver D'Ooge, 1938) uma obra francamente introdutória. Não obstante, a sua fama era tão grande no fim da Antiguidade, que Proclo (410?-485) o considerou como um elo da "corrente dourada" de reencarnações de Pitágoras.

Um outro neopitagórico importante, mais ou menos contemporâneo com Nicômaco, foi Têon de Smirna. Seu livro *Matemática Útil para a Compreensão de Platão* (ver Lawlor e Lawlor, 1979) é matematicamente mais denso do que o livro de Nicômaco e, portanto, menos útil à Idade Média tardia, um período de franca degeneração na área de matemática. Não obstante, o referido texto é uma das fontes mais importantes sobre a matemática neopitagórica.

Como tantos dos outros pitagóricos aqui citados, muito pouco é conhecido sobre a vida de Diofanto. Provavelmente chefiou a biblioteca de Alexandria por muitos anos. Seu livro, *Aritmética*, parcialmente preservado pela matemática pitagórica Hipátia, marcou a mudança da álgebra retórica para a álgebra sincopada. A *Antologia Grega*, uma coleção de problemas compilada no século V ou VI, contém o seguinte problema sobre a vida de Diofanto:

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte da sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem; Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (Ver Boyer, 1974, p. 130.)

O problema sugere que Diofanto faleceu com 84 anos de idade. Mas, 84 anos – o equivalente a um dia divino – é, segundo a doutrina de São João no *Apocalipse*, o período de vida ideal de um homem. Este número é uma redução da idade ideal de um homem, afirmada por Platão em 100 anos. Tal redução foi ocasionada pela melhor aproximação da precessão dos equinócios (ver Erickson e Fossa, 1996, Capítulo 3), obtida entre a época de Platão e a época em que foi composto o problema acima enunciado. Desta forma, mais do que apontar a verdadeira idade com a qual viveu Diofanto, o problema parece atestar a nobreza e perfeição do caráter deste, perante os infortúnios do destino.

A Teoria dos Números dos Primeiros Pitagóricos

Será impossível registrar aqui todos os resultados feitos pelos primeiros pitagóricos no campo da Teoria dos Números. Assim, nos limitaremos a alguns aspectos da doutrina pitagórica que ilustram procedimentos gerais. Em particular abordaremos os seguintes três aspectos: esquemas classificatórios, relações fenomenológicas e fluxos aritméticos. Estes três aspectos não são categorias independentes, pois um único resultado matemático pode ser uma instância de mais do que uma única categoria.

Em primeiro lugar, então, os pitagóricos fizeram várias classificações dos números. O número mais importante é a *unidade* (1), pois, além de ser o correlato numérico da *Mônada*, a fonte de todo o ser, todos os outros números são definidos como sendo coleções de unidades. Outra distinção primordial é aquela que define os números *femininos* (pares) e os *masculinos* (ímpares). Um número é feminino se pode ser decomposto em duas partes iguais; senão, é masculino. Parece que originalmente os termos "número feminino" e "número masculino" eram simplesmente termos técnicos; no entanto, alguns pensadores posteriores levaram os termos ao pé da letra e produziram um monte de bobagens e um misticismo barato, baseados nestes e outros termos. O número 6, por exemplo, era chamado de "número de casamento", porque era o produto do primeiro número feminino, 2, com o primeiro número masculino, 3 (como veremos mais adiante, o 1 não foi contado como um número). Outra distinção primordial era entre os números *primos* e os não primos. Um número é primo se não pode ser decomposto em duas ou mais partes iguais (onde, é claro, cada parte deve ser maior do que a unidade); senão, não é primo.

A definição de número como uma coleção de unidades parece ser baseada na operação de adição, enquanto as de feminino/masculino e primo parecem ser baseadas na operação de multiplicação. No entanto, basta prestar atenção às próprias definições para ver que são todas baseadas na operação mais primitiva de contagem. A técnica de exibir sistematicamente todos os primos menores do que um dado número, o Crivo de Eratóstenes, foi certamente conhecida pelos primeiros pitagóricos, pois também só depende da contagem. Provavelmente usaram um crivo duplo para exibir razões irredutíveis (pares de números primos entre si). Eratóstenes ganhou a fama de ser o descobridor desta técnica porque foi o primeiro a publicá-la (no século III), não porque a descobriu! De fato, é possível que a origem da técnica seja babilônica. Em qualquer caso, veremos, mais adiante, uma elaboração do Crivo em termos de fluxos aritméticos.

Um número é *linear*, *plano* ou *sólido* conforme tem um, dois ou três partes (fatores). Desde que a unidade é a identidade multiplicativa, as mais interessantes questões referente a esta classificação têm uma formulação mais simples se não contamos 1 como um fator. Os pitagóricos fizeram exatamente isto sob a alegação de que 1 não é um número, mas o gerador dos números. Devemos notar que a compreensão destas definições por parte dos pitagóricos foi bastante sofisticada. Não pensaram que cada número caía numa única categoria, mas que um número como 12, por exemplo, poderia ser considerado como plano (12 = 2×6) ou como sólido (12 = 2×2×3), dependendo da nossa conveniência. Finalmente, como mostra a Figura 2, os números sólidos eram classificados como *cubos* (três fatores iguais), *tijolos* (dois fatores iguais com o terceiro menor), *vigas* (dois fatores iguais com o terceiro maior) e *cunhas*, ou *altarzinhos*, (três fatores desiguais).

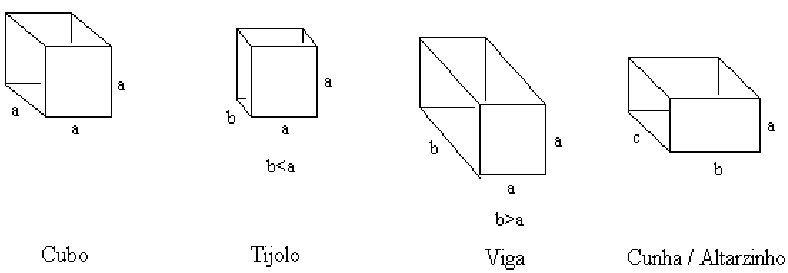


Figura 2.

A terminologia era muito importante porque, na falta de um simbolismo, era a única maneira de fazer as distinções necessárias sem prolixidade excessiva.

As classificações ilustram outra característica da Teoria dos Números dos pitagóricos, a saber, os números eram interpretados em termos de relações fenomenológicas, geralmente modeladas geometricamente. Assim, por exemplo, o Teorema de Pitágoras provavelmente não era concebido como uma equação diofantina, mas como um certo tipo de triângulo e/ou como a decomposição de um quadrado em dois outros quadrados. Assim, devem ter estudado a decomposição de um cubo em dois outros cubos (um problema que seria retomado por Fermat) e, mais geralmente, as relações de decomposição de qualquer número sólido noutros tipos de números sólidos. A abordagem teria sido tanto geométrica, quanto numérica.

Triângulos pitagóricos, ou seja, triângulos retângulos cujos lados são todos números naturais, foram estudados intensivamente pelos pitagóricos e usados nas suas explicações cosmológicas. De fato, a doutrina de triângulos pitagóricos já tinha sido completamente desvendada pelos babilônios. Estes especificaram os referidos triângulos através de dois parâmetros; usando nossa notação, a relação babilônica se expressa como $(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$, com $n > m$. Quando n e m são primos entre si, o triângulo é primitivo, o que explica o interesse babilônico, mencionado acima, em pares de números primos entre si. Os pitagóricos fizeram uma seleção entre os triângulos pitagóricos, provavelmente para fins de aplicação à cosmologia, de duas maneiras diferentes. A primeira maneira é chamada a Fórmula de Pitágoras e corresponde a fazer o parâmetro $m = 1$. A segunda maneira, chamada a Fórmula de Platão, corresponde a fazer $m = n - 1$. (Para mais detalhes, ver Erickson e Fossa, 2006.)

Proporções entre números naturais eram frequentemente tomadas como divisões de uma reta (*i.e.*, segmento de reta). A linha dividida de Platão é um exemplo: divide um segmento em duas partes e, em seguida, divide cada parte na mesma razão (ver a Figura 3). Isto é, dado as partes A, B, C e D, temos a relação A+B:C+D::A:B::C:D. Isto implica que as duas partes do meio são iguais (B = C) e que cada uma destas partes é a média geométrica dos extremos (B = √(AD)). Mas, quando impomos a condição adicional de que todas as partes devem ser números naturais, os extremos são múltiplos de quadrados. Desta forma, a linha dividida se torna $n^2/mn/mn/m^2$ com m e n primos entre si ou um múltiplo desta, $kn^2/kmn/kmn/km^2$. (Para mais detalhes, ver Erickson e Fossa, 2006.) Outro exemplo é a razão áurea: divide um segmento em duas partes de tal maneira que o todo é para uma parte como esta parte é para a outra parte, ou seja, A+B:A::A:B. A razão produzida, porém, é irracional.

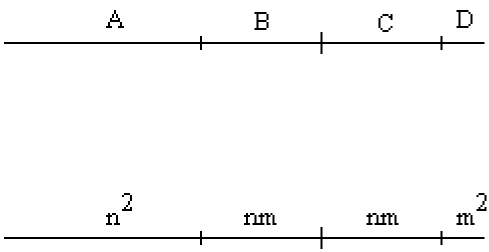


Figura 3.

Quando número é concebido como uma coleção de unidades, cujos correlatos geométricos são pontos, estes podem ser dispostos em várias configurações. Os pitagóricos usaram figuras regulares para ordenar as configurações e produzir sequências de números, chamados números figurados. No plano, esses números são geralmente ordenados pelos polígonos regulares, resultando em números triangulares, números quadrados, números pentagonais, *etc*. (ver a Figura 4), embora também haja números retangulares de várias espécies.

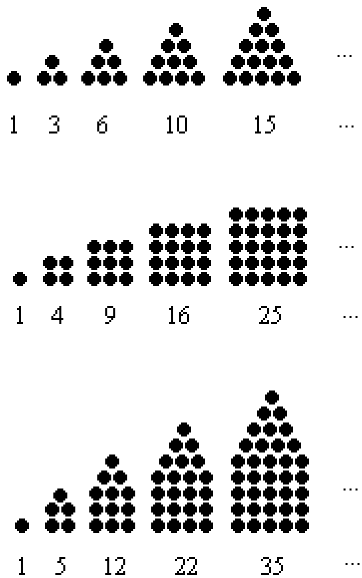


Figura 4.

Há muitas relações interessantes entre os números figurados. Da Figura 4, é evidente, por exemplo, que um número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos ($Q_n = T_{n-1}+T_n$) e que um número pentagonal é a soma de um número quadrado e um número triangular ($P_n = Q_n+T_{n-1}$). Mas, a linguagem dos números figurados era também usada para expressar outras relações. Assim, a Fórmula de Pitágoras, por exemplo, pode ser expressa da seguinte forma: um número masculino e quatro vezes um número triangular nos catetos, quatro vezes o número triangular mais a unidade na hipotenusa (o terno (M_{n+1}, $4T_n$, $4T_n+1$) é um terno pitagórico). Os números podem ser ordenados em três dimensões, usando os mesmos princípios. A Figura 5 mostra algumas pirâmides com base triangular e algumas pirâmides com base quadrada.

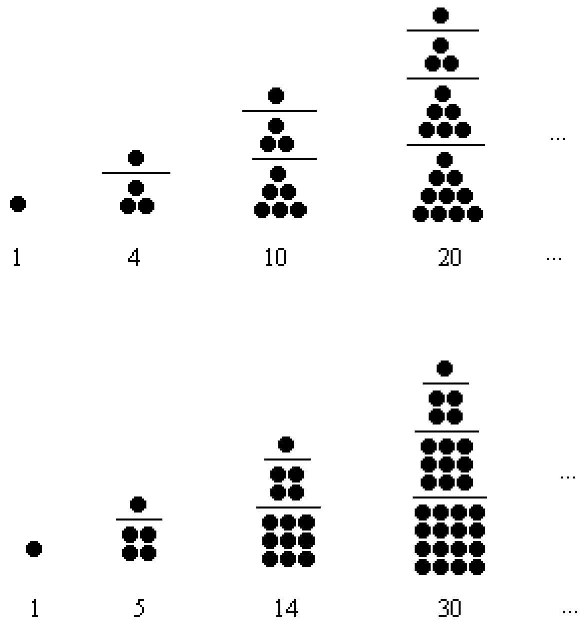


Figura 5.

Os números figurados são instâncias de fluxos aritméticos. Um fluxo aritmético começa com uma ou mais valores iniciais, a(s) semente(s), e se desenvolve segundo uma regra. Os próprios números naturais podem ser pensados como um fluxo aditivo unidimensional:

1 2 3 4 5 6 7 ...

A semente (em negrito) é a unidade e a regra é simplesmente somar uma unidade ao termo precedente. Os números de Fibonacci resultam do uso da mesma semente e a regra de somar os dois termos precedentes[2]:

1 1 2 3 5 8 13 ...

O triângulo de Pascal é um fluxo aditivo bidimensional, seguindo a regra somar o elemento a esquerda com o acima ($n_{ij} = n_{ij-1}+n_{i-1j}$):

1 1 1 1 1 1 1 ...
1 2 3 4 5 6 7 ...
1 3 6 10 15 21 28 ...
:

Os fluxos aritméticos sempre usam, portanto, regras recursivas; isto é, os novos termos da sequência são determinados por um ou mais termos precedentes. Se olharmos o processo em reverso, teremos um instrumento de análise: as diferenças de diferenças. O triângulo de Pascal ilustra o método de análise, pois cada linha é composta das diferenças entre elementos sucessivos da próxima linha. A mesma técnica é aplicada a fluxos unidimensionais. No caso do fluxo dos números naturais, as diferenças são constantes, a unidade:

1 1 1 1 1 1 ...
1 2 3 4 5 6 7 ...

2 Subentendemos que, no primeiro passo, em que não temos dois termos precedentes, a semente é simplesmente repetida (somada com nada). Alternativamente, podemos usar duas sementes: **1 1** 2 3...

Para o fluxo de números triangulares, é necessário achar as diferenças das diferenças antes de descobrir uma linha de diferenças constantes:

1 1 1 1 1 ...
2 3 4 5 6 7 ...
1 3 6 10 15 21 28 ...

No entanto, não é sempre possível analisar um fluxo em termos de diferenças constantes. Os números de Fibonacci é um bom exemplo disto, pois as diferenças são os próprios números de Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 ...
1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Há ainda várias relações muito interessantes entre fluxos aritméticos, triângulos pitagóricos e outras estruturas matemáticas. Para mais detalhes, ver Erickson e Fossa (2006).

Finalmente, observamos que o Crivo de Eratóstenes pode ser visto como uma manipulação de fluxos aritméticos. Já vimos que os números naturais podem ser representados como um fluxo com semente 1 e regra somar 1. Da mesma forma, todos os múltiplos de um número n podem ser representados como um fluxo com semente n e a regra somar n:

$\boldsymbol{n}$ $2n$ $3n$ $4n$ $5n$ ...

O crivo, então, é obtido por eliminar do fluxo dos números naturais todos os elementos, menos o primeiro, de cada fluxo de múltiplos de n. Os primeiros pitagóricos, como já indicamos, fariam isto por contagem em vez de multiplicação.

A Teoria dos Números de Euclides

Os *Elementos* de Euclides contém muito que é de natureza aritmética ou algébrica. As últimas duas proposições do Livro I são o Teorema de Pitágoras e seu recíproco. A maior parte do Livro II estabelece certas identidades algébricas, o Livro V trata da teoria de Eudoxo de proporção, o Livro VI aborda transformações de proporções e os Livros VII, VIII e IX tratam da aritmética dos números inteiros (o Livro X aborda certos tipos de irracionais). Mesmo assim, o tratamento é estritamente geométrico, tanto na enunciação dos teoremas, quanto nas suas demonstrações.

A razão para a abordagem geométrica da Teoria dos Números – e da Álgebra em geral –, segundo a grande maioria dos historiadores da matemática, é encontrada na descoberta da incomensurabilidade. Dois segmentos são incomensuráveis se não existe uma unidade de mensuração que mede os dois um número inteiro de vezes. A descoberta é equivalente à descoberta dos números irracionais. Por exemplo, se um quadrado tem lado s, então a sua diagonal será $s\sqrt{2}$. A descoberta gerou uma crise entre os pitagóricos, pois, segundo a teoria pitagórica, tudo era explicável em termos de números naturais e razões e proporções entre números naturais. No entanto, há muitas coisas, como a diagonal de um quadrado de lado racional, que não pode ser explicadas desta forma. Embora a aritmética tenha se provado incapaz de lidar com tais coisas como a referida diagonal, a geometria lidava com elas sem problemas. Assim, a geometria se tornou o protótipo da matemática para os gregos.

Depois de reconsiderar o argumento, porém, acho que não é muito plausível. Em primeiro lugar, a crise foi de curta duração. A incomensurabilidade foi descoberta por Hipaso de Metaponto, um pitagórico da segunda geração, e o problema foi resolvido por Eudoxo, contemporâneo de Platão na terceira geração de pitagóricos. Desta forma, não houve o tempo suficiente para se estabelecer uma tradição geométrica que se sobreporia à aritmética. Além disto, a solução de Eudoxo é essencialmente aritmética e não geométrica, e, em qualquer caso, o problema dos incomensuráveis seria visto como uma crise apenas dentro da irmandade dos pitagóricos. Finalmente, como já vimos, a aritmética e a geometria eram altamente simbiônticas desde os tempos do próprio Pitágoras; não obstante, a aritmética e a música era sempre vistas, entre os pitagóricos, como mais primordiais do que a geometria e a astronomia.

Concluímos, assim, que a incomensurabilidade não foi a causa da álgebra geométrica dos gregos. O que, então, foi a causa? Parece-me que há duas razões básicas que levariam os gregos a elaborar a Teoria dos Números e a Álgebra de forma geométrica:

1. A aritmética não tinha um simbolismo simples e uniforme. Como já vimos, toda a álgebra, incluindo a aritmética (Teoria dos Números), foi abordada retoricamente até Diofanto. Houve uma proliferação de termos técnicos para lidar com conceitos aritméticos, mas não foram muito eficientes. Em contraste, o simbolismo geométrico era muito mais simples e os procedimentos geométricos muito mais uniformes do que os aritméticos.

2. Demonstrações matemáticas tomaram, devido ao trabalho lógico de Aristóteles, a forma de deduções dentro de um sistema axiomático. No entanto, uma axiomatização da aritmética simplesmente não foi encontrada pelos gregos. Em contraste, os mesmos tiveram muito sucesso em axiomatizar a geometria.

Na verdade, os padrões de expressão formal e os parâmetros de rigor de demonstração se desenvolveram espetacularmente no campo da geometria e a aritmética não conseguiu acompanhar este desenvolvimento. Desta forma, tornou-se mais comum de se expressar e de fazer demonstrações geometricamente. Isto não quer dizer que o conteúdo geométrico era visto como mais importante do que o conteúdo aritmético. Como já mencionamos, o verdadeiro era justamente o contrário. Observamos ainda, porém, que as relações aritméticas são extremamente abstratas e modelos geométricos ajudam a visualizar estas relações. Assim, podemos destacar uma razão, talvez subsidiária, para a primazia da geometria entre os gregos:

3. A geometria era usada para modelar relações aritméticas, tornando-as menos abstratas.

Esta terceira razão é consoante com a natureza fenomenológica da matemática grega que destacamos acima. Não obstante, devemos observar que, mesmo dado a predominância de modos geométricos de expressão, houve uma tradição contínua de elaborar partes da matemática sagrada entre os pitagóricos de forma aritmética, como é atestada pelas obras de Nicômaco, Têon e Diofanto, bem como pela "matemática recreativa".

No início de Livro VII dos *Elementos* de Euclides, há uma lista de 22 definições aritméticas na tradição pitagórica. Os termos *unidade*, *número*, *par*, *ímpar*, e *primo* são todos definidos na referida maneira. Os teoremas demonstrados tratam do MDC e do MMC, de maneiras de manipular proporções e primos entre si. Proposição VII.19, por exemplo, é equivalente à seguinte proposição: $a:b::c:d \leftrightarrow ad = bc$. Livro VIII aborda proporções continuadas e algumas propriedades de quadrados e cubos. Proposições VIII.11 e 12 enunciam o Teorema de

Platão, isto é, há uma média geométrica integral entre dois números quadrados e duas médias continuadas integrais entre dois números cubos. Proposições VIII.18 e 19 generalizam estes resultados para números planos e sólidos semelhantes. No caso de números planos, por exemplo, se ab e cd são semelhantes então bc é a sua média geométrica, pois por hipótese, $a:b::c:d$, portanto, $a:c::b:d$ e, consequentemente, $ab:bc::bc:cd$. Os teoremas do Livro IX abordam produtos de quadrados e cubos, números primos e propriedades dos números pares e ímpares. Proposição IX.11 é equivalente à nossa lei de expoentes, $a^{m+n} = a^m a^n$, e é demonstrada usando proporções continuadas. A unicidade da decomposição em fatores primos é demonstrada em Proposição IX.14 e, em IX.20, é demonstrado que há um número infinito de primos. A demonstração desta é a mesma usada até hoje, por redução ao absurdo. Proposição IX.35 dá a soma dos termos de uma progressão geométrica.

A Teoria dos Números de Nicômaco e Têon

Os textos de ambos Nicômaco e Têon foram escritos com a intenção expressa de expor a matemática necessária para a compreensão do pensamento platônico. Desta forma, embora escritos no segundo século, deveriam conter apenas a matemática dos primeiros pitagóricos. No entanto, devem ter sido incluídos alguns resultados mais recentes, pois provavelmente não se tinham meios de discernir, em muitos casos, entre o mais recente e o mais velho.

A maior parte da *Introdução à Aritmética* de Nicômaco é contida em Euclides, mas aqui o conteúdo é exposto em forma aritmética e inteiramente retórica. Menciona explicitamente o crivo de Eratóstenes e números perfeitos, abundantes e deficientes; destes Euclides só menciona os perfeitos IX.36. Nicômaco também dá muita atenção aos números figurados.

O texto de Têon, *Matemática Útil para Compreender Platão*, é semelhante à *Introdução à Aritmética* no seu conteúdo aritmético, mas é mais compacto, contém mais matéria e aborda, além da aritmética, assuntos da música e da astronomia. Têon dá definições recursivas para números laterais e números diagonais da seguinte forma:

$$L_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad D_1 = 1$$
$$L_{n+1}=L_n+D_n \qquad D_{n+1}=2L_n+D_n$$

A razão $D_n:L_n$ tende para $\sqrt{2}$ quando *n* tende para o infinito. De fato, a convergência é relativamente rápida, pois para $n=10$, a aproximação é correta para seis casas decimais (ver Fossa, 1997).

Tanto Nicômaco, quanto Têon mostram certa tendência de incorporar elementos de um misticismo ingênuo no seu pensamento. Mesmo assim, não parecem tão encantados com este tipo de especulação quanto, por exemplo, Plutarco (46?-120?) e, de fato, são, quando usados com cautela, duas das mais importantes fontes para a matemática dos primeiros pitagóricos.

A Teoria dos Números de Diofanto

Como já vimos, Diofanto foi um dos primeiros matemáticos a usar abreviações extensivamente e sistematicamente, tornando a sua álgebra sincopada, em vez de retórica. Além da *Aritmética*, escreveu um outro livro que seria do nosso interesse, *Sobre Números Poligonais*, mas o mesmo foi perdido, com exceção de um fragmento. Provavelmente escreveu os *Porismas*, também sobre a Teoria dos Números. Os *Porismas* estão perdidos, mas Diofanto, na *Aritmética*, menciona alguns resultados daquela obra, o que nos dá uma pequena ideia do que deveria ter sido o seu conteúdo. Assim, os teoremas mais importantes dos *Porismas* parecem ser os que abordam a questão de expressar um número como a soma de dois, três ou quatro quadrados.

Quando pensamos em equações diofantinas, geralmente entendemos equações indeterminadas com soluções inteiras. No entanto, na *Aritmética* de Diofanto, que também trata de equações determinadas de primeiro e segundo graus, as soluções das equações indeterminadas são normalmente restritas aos racionais positivos. Diofanto não tem uma regra ou procedimento geral para resolver equações, mas usa frequentemente a regra de "falsa posição" (faz uma estimativa conveniente e usa a regra de três para obter a solução correta), já conhecida pelos antigos egípcios. Também usa as propriedades da igualdade para transformar equações noutras equivalentes. Há um exemplo de uma equação cúbica na *Aritmética* (Livro VI, problema 17), a saber:

$$x^2+2x+3 = x^3+3x-3x^2-1.$$

A solução é simplesmente anunciada como $x = 4$, sem qualquer indicação de como foi determinada. Heath (1981, v. II, p. 465) conjetura que ele reduziu a equação a

$$x^3+x = 4x^2+4$$

e dividiu pelo fator comum x^2+1. Também aborda alguns casos de equações simultâneas.

As equações indeterminadas tratadas por Diofanto na *Aritmética* são geralmente de grau 2 ou 3, mas há um exemplo de uma equação de grau 6 e alguns de grau 4. Equações simultâneas são tratadas, frequentemente no contexto de fazer duas funções iguais a um ou dois quadrados ou cubos. De novo, só soluções racionais positivas são permitidas, o que leva Diofanto a colocar limites para os valores de uma das variáveis.

No entanto, ele está ciente, pelo menos em alguns casos, que certas equações têm um número infinito de soluções (Livro VI, Problema 12). Não parece ter, porém, uma teoria única ou procedimento uniforme para a resolução dos problemas. Cada problema é tratado individualmente através de artifícios, às vezes, engenhosos.

Eves (1995, p. 208), por exemplo, traz alguns problemas da *Aritmética* já traduzidos para o português. Vejamos alguns exemplos:

> *Problema 5*, Livro III: Encontre três números tais que a soma de todos é um quadrado e a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado. (Resposta de Diofanto: 80, 320, 41.) ...
> *Problema 10*, Livro IV: Encontre dois números tais que a sua soma é igual à soma de seus cubos. (Resposta de Diofanto: 5/7 e 8/7.) ...
>
> *Problema 1*, Livro VI: Encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo. (Resposta de Diofanto: 40, 96, 104.)

A solução de problema VI.1 é interessante. Diofanto considera o triângulo com lados $(x, y, z) = (2mn, n^2-m^2, n^2+m^2)$, usando a fórmula babilônica para triângulos pitagóricos. Desta forma, $n^2+m^2-(n^2-m^2) = 2m^2 = a^3$ e $n^2+m^2-2mn = b^3$, para algum a e b. Da primeira equação, é evidente que $z-x$ será um cubo para $m = 2$. Assim, ele coloca 2 para m na segunda equação, a qual se reduz a $n^2+4-4n = (n-2)^2 = b^3$. Diofanto então conclui que, desde que $(n-2)^2$ é um cubo, então $n-2$ é um cubo também, ou seja, $n-2 = c^3$ e, portanto, $n = c^3+2$. Para $c = 2$, $n = 10$ e $(x, y, z) = (40, 96, 104)$, é a solução dada por Diofanto. É claro que, para cada $c > 2$, teremos um novo triângulo satisfazendo as condições do problema e, portanto, há um número infinito de soluções. É interessante observar, porém, que a solução do Diofanto não é a menor, pois ainda tem a possibilidade de c ser igual a 1. Neste caso, $n = 3$ e, desde que m ainda é 2, (x, y, z) seria (12, 5, 13), o que é uma solução. Heath (1981, v. II, p. 467) faz uma observação semelhante referente ao Problema 10 do Livro III.

A Teoria dos Números da Idade Média e Renascimento

Como já indicamos, parece que Diofanto foi um dos últimos matemáticos da tradição pitagórica. Devemos lembrar que, para os pitagóricos, a matemática, especialmente a Teoria dos Números, tinha um aspecto sagrado e, portanto, a doutrina inteira não foi publicada. Além disso, a referida tradição não era uma só escola de pensamento, em que a doutrina foi passada fielmente de geração em geração. Muito pelo contrário, era uma multiplicidade de escolas com pontos de vista semelhantes que embarcaram num projeto de pesquisa, baseado na pressuposição pitagórica de que a matemática nos dá acesso ao *lógos* do mundo. Naturalmente, houve vários níveis de acesso aos ensinamentos esotéricos de Pitágoras e os primeiros pitagóricos e cada escola desenvolveu a doutrina em maneiras diferentes, resultando em teorias conflitantes dentro da própria tradição. Tudo isto provocou certa degeneração em muito do pensamento dentro desta tradição e, como já vimos, na época de Nicômaco e Têon, este processo de degeneração era já avançado.

O mais notável matemático pitagórico depois de Diofanto foi, provavelmente, Hipátia (?-415), líder da escola neoplatônica em Alexandria. Embora o neopitagorismo / neoplatonismo tivesse sido completamente assimilado pela igreja cristã, Hipátia se interessou pelo paganismo. Em consequência da difamação contra ela, praticada pelo bispo Cirilo, Hipátia foi torturada e morta por um bando de populares – pelo menos, é assim que a estória é contada. Aparentemente a morte cruel de Hipátia foi o suficiente para afastar de Alexandria os pensadores mais criativos. Ainda houve alguns pensadores, como Proclo (410?-485), Boécio (475?-525?) e Simplício (*fl.*530) que tiveram muita afinidade com os pitagóricos, mas que não parecem ter sido grandes inovadores. Logo depois da morte de Hipátia, a Roma foi capturada, em 476, pelos bárbaros e, em 529, o Imperador Justiniano decretou o fechamento da Academia ateniense. Finalmente, a biblioteca de Alexandria foi queimada em 641. Com este ato imperdoável, o maior acervo de "livros" (papiri) que o mundo havia visto até então foi destruído e muitas obras raras, incluindo algumas obras pitagóricas, foram, provavelmente, perdidas para sempre.

Depois da destruição da biblioteca de Alexandria, a tradição pitagórica continuaria a influenciar muitos pensadores. No entanto, a continuidade da tradição foi quebrada e os futuros "pitagóricos" teriam de reconstruir a tradição. Inicialmente, isto foi feito através de textos como alguns diálogos de Platão, como partes do *Timeu* e da *República*, que não foram perdidos, mas que não eram tratados sistemáticos sobre a matemática pitagórica. Mais tarde, outros textos foram achados, geralmente através de traduções do árabe; no entanto, a grande maioria destes eram, como os de Nicômaco e de Têon, introdutórios e não abordavam a teoria esotérica em profundidade. Consequentemente, as obras de certos investigadores, como, por exemplo, Marsilio Ficino (1433-1499), embora sejam úteis quando usadas com a devida cautela, não podem ser consideradas como fontes primárias em relação à tradição antiga.

A grande inovação neste período é a padronização do sistema numérico em torno dos numerais hindu-arábicos e um sistema de notação posicional, usando a base 10. O uso do ábaco para efetuar os cálculos foi gradativamente substituído por algoritmos. A maioria dos textos aritméticos deste período explica o novo sistema, defendem sua eficácia relativa ao uso do ábaco, ensinam algoritmos para as quatro operações fundamentais, bem como a extração de raízes quadradas e cúbicas, e fazem aplicações ao comércio. Assim, a palavra *aritmética* acabou perdendo a sua acepção de Teoria dos Números no sentido mais geral e ficou restrita aos assuntos aqui enumerados.

O *Liber Abaci* (*Livro de Cálculos*) de Leonardo Pisano (1175?-1250), conhecido como Fibonacci, foi publicado em 1202 e é provavelmente a mais importantes destas novas aritméticas. Nesta obra, Pisano não somente explica os novos métodos de calcular, mas também os fundamentam em uma maneira matematicamente rigorosa. Além disto, aborda alguns problemas indeterminados e geralmente, em contraste a Diofanto, restringe as soluções a números inteiros, quase sempre dando a solução mínima.

Em Fibonacci (2002, p. 404), achamos o seguinte problema interessante:

> A certain man had one pair of rabbits together in a certain enclosed place, and one wishes to know how many are created from the pair in one year when it is the nature of them in a single month to bear another pair, and in the second month those born to bear also.

Pisano resolve o problema por colocar em sequência o número de pares de coelhos depois de cada mês: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Assim, no início, houve apenas um par de coelhos; depois de um mês, dois pares; *etc*. Ele conclui que depois de doze meses há 377 pares de coelhos. Ele observa ainda que cada novo elemento na sequência é a soma dos dois elementos imediatamente precedentes, o que permite calcular quantos pares de coelhos haveria depois de qualquer número de meses que quisermos. A sequência, é claro, é a dos “números de Fibonacci” que já identificamos como um objeto de estudo dos primeiros pitagóricos. O próprio Pisano, porém, não investigou as propriedades da mesma; de fato, a sequência de Fibonacci só seria retomada mais tarde por Edouard Lucas no século XIX.

Em 1225, Pisano publicou o *Liber Quadratorum* (*Livro de Quadrados*). Com esta obra ele se consagrou como o mais importante matemático no campo da Teoria dos Números entre Diofanto e Fermat. De fato, aborda teoremas que já tinham sido propostos por Diofanto, mas inova nos métodos que usa para resolvê-los. Proposição 23 por exemplo é

> I wish to find three squares so that the sum of the first and the second as well as all three numbers are square numbers. (Fibonacci, 2002, p. 105.)

A proposição é nada mais do que Problema III.5 (citado acima) da *Aritmética* do Diofanto, com algumas das condições relaxadas.

O Papel da Matemática Recreativa

Há ainda um fenômeno interessante que está relacionado com a Teoria dos Números. Trata-se da “matemática recreativa”. A matemática recreativa geralmente é centrada em torno de desafios intrigantes, adoçados com uma pitada de humor. Frequentemente, o aspecto lúdico do problema esconde um propósito mais sério, embora seja necessário estar de posse de alguma informação arcana para ter a chave deste propósito. Já vimos um exemplo deste fenômeno acima no problema sobre a idade de Diofanto.

A matemática recreativa tem uma longa história e vários problemas são repetidos, reformulados ou não, através dos séculos.[3] Gillings (1982), por exemplo, alega que pelo menos dois problemas do Papiro Rhind são de natureza recreativa. Um deles reaparece em vários lugares, incluindo o *Liber Abaci* de Pisano, e é ligado, segundo Ore (1988) a uma cantiga infantil inglês. Arquimedes resolve um problema no qual se pede achar o número de touros e vacas, sendo eles de quatro cores diferentes. O problema, no entanto, é muito difícil, recaindo em números extremamente grandes para a época. Desta forma, o problema parece ser uma plataforma para Arquimedes mostrar seus poderes prodigiosos de cálculo.

Talvez o primeiro livro sobre a matemática recreativa seja a *Antologia Grega*, uma coleção de problemas aritméticos compilados por Metrôdoro (fim do século V ou início do século VI). Na verdade, o problema sobre a idade de Diofanto se encontra nesta coleção. Pelos padrões modernos, porém, o aspecto lúdico é bastante reduzido na maioria destes problemas.

Com o passar do tempo, a matemática recreativa ficou mais popular e foram publicados sempre mais livros contendo este tipo de material. Continham problemas da lógica e de todas as áreas da matemática elementar. Mas, o que nos interessa aqui é a sua importância para a Teoria dos Números. Lembramos que, desde a época da ruptura da tradição pitagórica, não houve um desenvolvimento sistemático da Teoria dos Números, mas apenas alguns tratados específicos, dos quais se destaca o *Liber Quadratorum* de Pisano. A situação ficou ainda mais complicada porque a Teoria dos Números tem poucas aplicações práticas e, portanto, os matemáticos direcionaram a sua atenção, primeiro, para a nova álgebra e, depois, para o Cálculo

3 Vários exemplos foram estudado por Josinalva Estácio Menezes na sua tese de doutorado sob a minha direção.

emergente. Desta forma, o único lugar em que os matemáticos encontravam problemas referentes à Teoria dos Números, além dos sobre o que é conhecido hoje como a aritmética elementar, era precisamente na matemática recreativa. Assim, problemas isolados sobre equações indeterminadas ou as propriedades de números figurados, por exemplo, foram abordados de vez em quando de tal maneira que a Teoria dos Números nunca foi completamente esquecida.

Finalmente, notamos que um dos pensadores interessados na matemática recreativa foi o francês, Claude Gaspar de Bachet. Em 1612, ele publicou uma coleção de problemas chamada *Problèmes plaisants et délectables*. Continha vários problemas em que se pede adivinhar um número, dadas certas condições. Foi provavelmente o interesse de Bachet neste tipo de problema que o levou até a *Aritmética* de Diofanto. Mas, seja isto como for, em 1621, ele editou a *Aritmética*, fornecendo uma tradução latina, bem como uma análise do texto. Era precisamente este texto que despertou a fascinação de Fermat com a Teoria dos Números.

A Teoria dos Números de Fermat

Pierre de Fermat (1601?-1665), filho de um comerciante francês, recebeu uma educação tradicional em línguas antigas (latim e grego) e obteve um posto como "conselheiro" junto ao "parlamento" regional de Toulouse. Em contraste ao Pisano que havia viajado muito, Fermat raramente saia da região de Toulouse. No entanto, mantinha correspondência extensiva com muitos dos mais importantes matemáticos da sua época e era nestas comunicações, colecionadas depois da sua morte por seu filho Samuel, que muitos dos seus resultados foram anunciados. Também escreveu sobre geometria, o Cálculo e a probabilidade.

Um dos seus primeiros resultados foi a formula

$$n\binom{n+m-1}{m-1} = m\binom{n+m-1}{m}$$

Como ocorre frequentemente com Fermat, ele tampouco deu sua demonstração deste resultado. Weil (2001, p. 49) conjetura que a mesma era por indução matemática, cuja primeira explicitação clara tinha sido feita, alguns anos antes, por Pascal. Interessantemente, quando $m = 2$,

$$\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+1}{2},$$

o que se reduz a $\frac{(n+1)!}{2(n+1)!}$., ou seja, $\frac{n(n+1)}{2}$. Assim, temos os números triangulares. Logo no início da sua carreira, Fermat se interessou por estes números e enunciou que todo número é a soma de, no máximo, três números triangulares, quatro números quadrados, cinco números pentagonais, *etc*. Este resultado intrigou vários matemáticos, como Euler e Gauss, e contribuiu para que estes se interessassem na Teoria dos Números. O caso dos quadrados é especialmente difícil, mas foi demonstrado por Lagrange em 1770. Pelos exemplos dados acima, podemos ver que questões sobre a soma de quadrados foram sugeridos por Diofanto e Fermat investigou várias questões deste tipo, incluindo a questão da representação de números pela soma ou pela diferença de dois quadrados e aplicou o resultado à fatoração de números grandes.

O teorema que afirma que, para p primo com n e p primos entre si, p divide $n^{p-1}-1$ é chamado o teorema pequeno de Fermat, pois foi enunciado por Fermat, mas demonstrado posteriormente por Euler. Fermat também enunciou que $x^n+y^n = z^n$, uma generalização do Teorema de Pitágoras, não tem solução para $n > 2$. Já vimos que a decomposição de um cubo em dois cubos menores foi, provavelmente, investigada pelos pitagóricos e certamente teria sido sugerida a Fermat pela sua leitura de Diofanto. O resultado é conhecido como o Último Teorema de Fermat e, embora este tenha afirmado que tinha uma demonstração para o mesmo, nunca a publicou. De fato, o teorema foi demonstrado só recentemente, usando métodos não elementares.

Além destes e muitos outros resultados, Fermat também inventou um método geral para efetuar demonstrações, chamando-o de método da descida infinita. A chave do método é, supondo-se uma solução de um problema, achar outra solução menor. Assim, por exemplo, para demonstrar que não há triângulos pitagóricos cuja área é um número quadrado, Fermat supõe que haja; em seguida, mostra como a referida suposição implica na existência de um outro triângulo pitagórico com área quadrado, tendo, no entanto, uma hipotenusa menor do que a hipotenusa do triângulo original (para detalhes, ver Weil, 2001, p. 77). Uma vez que isto é feito, podemos iterar o processo quantas vezes que quisermos. Desta forma, deve haver um número infinito de triângulos satisfazendo a condição proposta. As suas hipotenusas formam uma sequência infinita estritamente decrescente, o que é impossível porque só tem um número finito de números entre qualquer dado número natural h (a hipotenusa original) e 1. (De fato, o menor hipotenusa de um triângulo pitagórico é 5, mas isto não modifica a essência da demonstração.) A contradição mostra que a suposição é falsa e, portanto, não há triângulos pitagóricos com área quadrada.

O método da descida é, de fato, baseado no Princípio de Boa Ordenação: todo subconjunto dos inteiros que tem uma cota inferior tem um mínimo. Este princípio não era exatamente novo, nem na época de Fermat. Euclides faz uso do mesmo princípio, por exemplo, na demonstração de Proposição VII.31, onde afirma que, dado qualquer número composto, podemos achar um primo que o mede (isto é, que o divide),

> For if it is not found, an infinite series of numbers will measure the number A, each of which is less than the other; which is impossible in numbers.

Mesmo assim, Fermat codificou o método, fazendo-o um objeto de estudo matemático e usando-o sistematicamente nas suas investigações sobre a Teoria dos Números. Interessantemente, Pascal, como já observamos acima, havia, alguns poucos anos antes, feito o mesmo em referência ao Princípio de Indução Matemática – um princípio que é equivalente ao da Boa Ordenação.

Conclusão

A fascinação do homem pelo número parece ser tão antiga quanto o próprio homem. No entanto, foi com Pitágoras que o número ganhou a posição central de fornecer ao homem o *lógos* do mundo. Os primeiros pitagóricos começaram o estudo sistemático da Teoria dos Números, definindo os conceitos mais elementares e investigando relações numéricas usando os instrumentos de fluxos aritméticos e modelos geométricos. Vários destes resultados foram sistematizados por Euclides dentro do seu sistema axiomático nos *Elementos*. Nicômaco e Têon fizeram o mesmo, usando a álgebra retórica. No entanto, não podemos esperar que todos os aspectos da matemática sagrada tenham sido publicados. Diofanto continuava nesta tradição, inovando em relação ao desenvolvimento de uma álgebra sincopada, mas abordando assuntos tradicionais. Logo depois de Diofanto, a continuidade da tradição pitagórica foi quebrada e a Idade Média / Renascença se preocupa com a aritmética baseada em algoritmos, usando numerais hindu-arábicos. A influência pitagórica, no entanto, ainda seria marcante, como mostra a investigação de Pisano sobre quadrados e o interesse de Fermat nesta área da matemática através do seu estudo da *Aritmética* de Diofanto. As questões levantadas por Fermat seriam o ponto de partida para as investigações da moderna Teoria dos Números.

Referências

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

D'OOGE, Martin Luther (Trad.). *Nicomachus of Gerasa: Introduction To Arithmetic*. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1938.

ERICKSON, Glenn W. e John A. FOSSA. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática da Filosofia de Platão*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2006.

______. *A Pirâmide Platônica*. João Pessoa: Editora da UFPb, 1996.

ESTY, Warren W. Ancient Portraits of Mathematicians. *Historia Mathematica* 6 p. 437-441, 1979.

EUCLID. *The Elements*. Trad. Thomas L. Heath. New York: Dover, 1956.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FIBONACCI, *Liber Abaci*. Trad.L. E. Sigler. Springer: New York, 2002.

FOSSA, John A. Números Laterais e Números Diagonais. Sergio NOBRE (ed.). *Anais-Actas do Segundo Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Educação Matemática*. São Paulo, 1997.

GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Dover: New York, 1982.

GUTHRIE, Kenneth Sylvan (Ed. e Trad.). *The Pythagorean Sourcebook and Library*. Grand Rapids: Phanes, 1987.

HEATH, Thomas L. *A History of Greek Mathematics* (2 v.). New York: Dover, 1981.

LAWLOR, Robert e Deborah LAWLOR (Trad.). *Mathematics Useful for Understanding Plato by Theon of Smyrna*. San Diego: Wizards Bookshelf, 1979.

MAY, Kenneth O. Historiographic Vices I, Logical Attribution. *Historia Mathematica* 2, p. 185-187, 1975.

MENESES, Josinalva Estácio. 2004. *Travessias Difíceis, Divisões Divertidas e Quadrados Mágicos: Evolução Histórica de Três Recreações Matemáticas.* Tese de Doutorado. PPGEd da UFRN sob a orientação de Prof. John A. Fossa. Natal.

ORE, Oystein. *Number Theory and its History*. Dover: New York, 1988.

WEIL, André. *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre*. Boston: Birkhäuser, 2001.

2

Sobre o Pentagrama como um Emblema Pitagórico

John A. Fossa

Segundo Aristóteles (*Metafísica*, A5), os pitagóricos pensaram que o primeiro princípio de todas as coisas é número e que o mundo é organizado por número em harmonia, ou seja, por razões e proporções. Por "número", entende-se números inteiros positivos. Sem muito demora, no entanto, os próprios pitagóricos descobriram que certos segmentos são incomensuráveis, isto é, não têm uma medida comum. A descoberta, equivalente, em termos modernos, à descoberta dos números irracionais, significava, segundo a interpretação padrão, que há coisas no mundo que não podiam ser organizado pelo número em harmonia. Kurt von Fritz (1945, p. 260) defende essa interpretação enfaticamente:

> The discovery of incommensurability must have made an enormous impression in Pythagorean circles because it destroyed with one stroke the belief that everything could be expressed in integers, on which

> the whole Pythagorean philosophy up to then had been based. This impression is clearly reflected in those legends which say that Hippasus was punished by the gods for having made public his terrible discovery.

Hipaso de Metapontum, um dos primeiros pitagóricos, supostamente fez a descoberta na sua investigação do pentágono regular, precipitando assim uma crise entre os pensadores pitagóricos, que só seria resolvida duas ou três gerações mais tarde com a nova teoria de proporções de Eudoxo; a nova teoria, segundo a referida interpretação, estabeleceu a geometria como a mais importante ciência matemática para os gregos antigos. O fato de que a descoberta, que supostamente mostrou a insustentabilidade do pitagorismo, foi feito em relação ao pentágono é bastante irônico, pois o pentagrama (o pentágono estrelado) era um emblema importante desses pitagóricos.

A interpretação recontada no parágrafo anterior é a explicação padrão dada pelos historiadores e os filósofos da matemática[1]. Alguns historiadores, contudo, têm questionado a referida explicação. D. H. Fowler (1987, p. 304), por exemplo, afirma que a descoberta não teria sido vista, no contexto da matemática não axiomática dos primeiros pitagóricos, como incorrendo qualquer dificuldade especial e que a suposta crise foi uma invenção de escritores posteriores. Como evidência para sua interpretação, Fowler observe que nenhum dos comentadores anteriores, incluindo Aristóteles, atribuiu qualquer importância especial à descoberta da incomensurabilidade para o programa pitagórico. Para razões um tanto diferentes, comecei, em Fossa (2003), a me afastar da interpretação padrão por caracterizar a ascensão da geometria em termos práticos, porém

1 Ver, por exemplo, Boyer (1974, p. 53), Eves (1995, p. 106) e Wussing (1979, p. 39).

não teóricos, como devida ao fato de que os gregos conseguiram achar um sistema axiomático para a geometria, mas não para a aritmética. No presente trabalho, farei outro desafio à interpretação padrão por tentar responder às duas seguintes perguntas:

1. Qual aspecto do pentagrama o fez um emblema apropriado para os pitagóricos?
2. O que foi a relação entre os números figurados e as figuras geométricas?

Antes de tentar responder a essas duas perguntas, porém, será interestante estabelecer a necessidade *prima facie* para um novo desafio à interpretação padrão. Mas, é fácil ver isto, pois se a interpretação padrão fosse correta, esperaríamos que o pitagorismo tivesse sido desacreditado imediatamente. Sabemos, no entanto, que isto não aconteceu. Muito pelo contrário, não somente sobreviveu durante as duas ou três gerações que foram necessárias para resolver a "crise", mas, de fato, atraiu, durante esse período, alguns dos principais pensadores da época, incluindo Arquitas, Platão e Eudoxo. Como é que isto poderia ter acontecido? Esperamos que, ao responder às duas perguntas lançadas no parágrafo anterior, poderemos fazer uma explicação melhor dos acontecimentos históricos.

O Pentagrama era Emblemático de Quê?

Visto que o princípio maior do pitagorismo era que tudo é número e harmonia, poderíamos esperar que o emblema pitagórico refletiria essa doutrina. No entanto, é difícil ver como o pentagrama representaria o referido princípio. Na verdade, o aspecto visual mais notável do pentágono, como pode ser visto na Figura 1, é que suas diagonais formam o pentagrama e, portanto, um novo pentágono no interior do pentágono original.

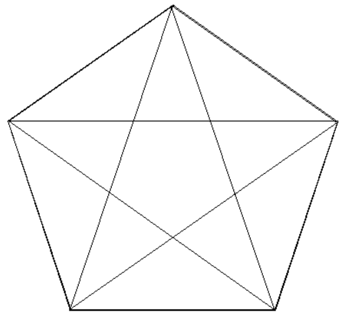


Figura 1

Essa propriedade auto-reprodutiva do pentágono evoca imediatamente outro princípio básico do pitagorismo – o de metempsicose, a transmigração ou reencarnação da alma – e proponho que é exatamente essa doutrina que o pentagrama, como emblema, significava.

Mesmo assim, devemos ainda perguntar: "Porque o pentágono?" Porque não escolheram um hexágono estrelado, ou um heptágono estrelado? Estes polígonos, bem como outros, exibem a mesma propriedade auto-reprodutiva. A Figura 2 mostra isto para o hexágono, enquanto a Figura 3 mostra um heptágono com todas as suas diagonais.

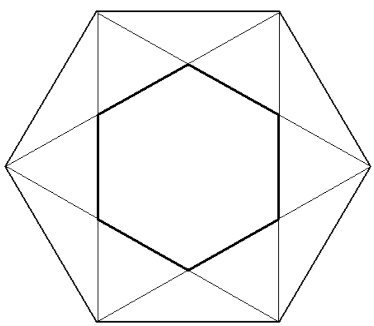


Figura 2

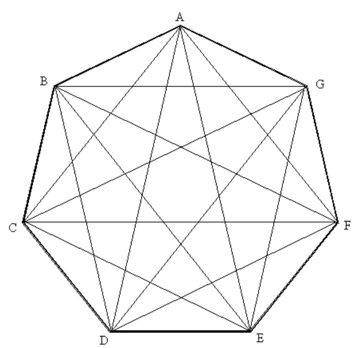


Figura 3

Há tantas diagonais no heptágono que não é muito fácil interpretar a Figura 3. De fato, porém, as diagonais do heptágono reproduzem o heptágono duas vezes – uma vez através de um heptágono estrelado com lados compridos e uma vez através de um com lados pequenos (por dentro de uma estrela com lados muito compridos). Os dois casos são separados em Figuras 4 e 5.

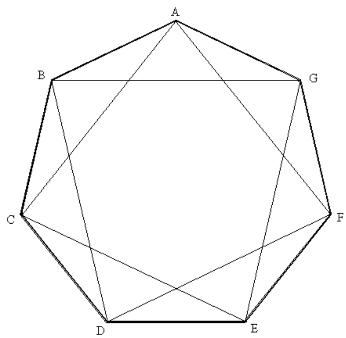


Figura 4

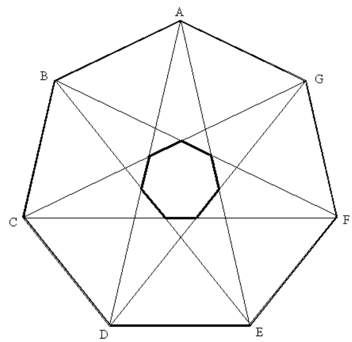


Figura 5

A auto-reprodução reduplicada do heptágono deve-se ao fato de que tem diagonais de dois tamanhos diferentes. Quando desenhamos todas as diagonais do tamanho menor, o do segmento AC, obtemos o heptágono com lados compridos (Figura 4). Em contraste, quando desenhamos todas as diagonais do tamanho maior, o do segmento AD, obtemos o pentágono de lados pequenos (Figura 5). Há também no hexágono diagonais de dois tamanhos diferentes. As menores produzem o hexágono estrelado, mas os maiores se encontram no centro do hexágono original, repartindo-o em seis triângulos equiláteros. Esses resultados são típicos para polígonos de um número par e de um número ímpar de lados. O octógono, por exemplo, tem três tipos distintos de diagonais, dois dos quais produzem octógonos estrelados (com algumas diferenças que não serão importantes no presente contexto) e um que reparte o octógono em oito triângulos isósceles; o nonágono também tem três tipos distintos de diagonais, das quais todas produzem nonágonos estrelados (de novo, com algumas diferenças que podemos desprazer aqui).

O triângulo não tem diagonais e os diagonais do quadrado se encontram no centro do quadrado, repartindo-o em quatro meio-quadrados. Para obter os dois quadrados que estes compõem, porém, seria necessário recortar e colar esses componentes. Há, é claro, uma maneira muito fácil de decompor o quadrado em quatro quadrados, usando as mediatrizes de lados adjacentes, mas isto parece ser uma operação bastante diferente. Assim, o pentágono, com um único tipo de diagonal, é o tipo mais simples e visualmente mais notável dos polígonos auto-reproducentes. Para esta razão, é provável que teria sido considerado o Modo Eminente[2] destas figuras e, portanto, o mais apropriado, entre o polígonos, a ser usado como emblema.

Ainda há outra (e inesperada) razão para a qual o pentágono seria o polígono mais apropriado para representar a metempsicose. É relacionada ao triângulo retângulo (3, 4, 5). Segundo Roger Herz-Fischler (1998, p. 56-57), os babilônios pensaram que quando o pentágono é repartido em cinco triângulos isósceles congruentes por linhas do seu centro (ou melhor, do centro da circunferência circunscrita) para seus vértices (ver a Figura 6), os triângulos resultantes são o dobro do triângulo retângulo (3, 4, 5). De fato, isto não é um resultado exato, mas apenas uma boa aproximação. Os babilônios, contudo, não deixaram qualquer evidência que eram cientes desse fato.

2 Essa terminologia foi explicada em Fossa (1999), onde outros exemplos são dados.

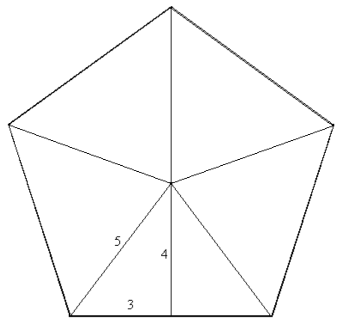


Figura 6.

Aparentemente os egípcios usaram triângulos retângulos para representar a procriação, visto que identificaram a hipotenusa do triângulo (3, 4, 5) com o deus Hórus, o filho de Osíris, representado pelo lado de tamanho 4, e Ísis, representada pelo lado de tamanho 3. Isto é inteiramente apropriado porque todos os triângulos retângulos são decompostos em duas partes semelhantes ao triângulo original pela altura na hipotenusa, como mostra a Figura 7. Mais tarde, Platão usaria essa propriedade do triângulo retângulo – novamente aplicada ao triângulo retângulo (3, 4, 5) – na sua doutrina sobre o "número geométrico", um artifício a ser usado pelos governantes da República para ajudá-los a determinar o número correto de nascimentos em cada classe social e, assim, manter a harmonia no Estado (ver Erickson e Fossa, 2001). Voltando aos egípcios, Osíris e Ísis foram os protagonistas nos antigos mitos referentes à crença egípcia sobre a reencarnação. Assim, pela sua associação com o triângulo retângulo (3, 4, 5), o pentágono teria herdado fortes ligações com a ideia de metempsicose. Se esta interpretação é correta, a combinação da qualidade de ser auto-reprodutivo e sua associação com o triângulo retângulo sagrado (3, 4, 5) deveria ter feito o pentágono um símbolo muito poderoso para os pitagóricos e isto explicaria porque foi escolhido por eles como emblemático da sua irmandade.

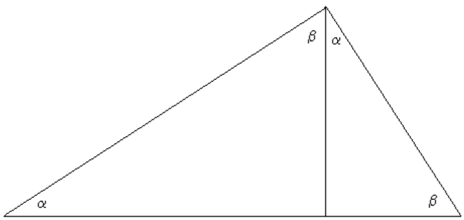


Figura 7.

Devemos observar que a evidência que liga o triângulo (3, 4, 5) ao mito egípcio de Osíris e Ísis é dada por Plutarco num contexto em que interpreta esse mito em termos do pensamento platônico. Não obstante, como frequentemente acontece com testemunhos antigos, embora a alegação seja literalmente falsa, poderá ser metaforicamente verdadeira. Isto é, estórias ou interpretações são inventadas a fim de expressar uma verdade mais profunda. Assim, a ligação do triângulo (3, 4, 5) com a metempsicose egípcia de fato aponta para influência egípcia de algum tipo sobre os pitagóricos. De qualquer forma, o complexo de influências recíprocas de fontes egípcias, babilônicas e órficas sobre o pensamento grego foi claramente estabelecido por Walter Burkert (2004). Ainda mais B. L. van der Waerden (1983) argumenta de maneira convincente que o conhecimento de ternos pitagóricos, dados parametricamente, foi uma descoberta pré-histórica, que foi transmitido para os gregos de fontes estrangeiras. Na verdade, o triângulo básico do "número nupcial" de Platão, como reconstruído por Erickson e Fossa (2001), não somente é semelhante ao triângulo (3, 4, 5), mas também parece[3] ocorrer no tablete babilônico Plimpton 322. Desta forma, parece ter evidência suficiente para tornar plausível a presente interpretação.

Posto que temos respondido à primeira questão lançada acima na maneira feita nos parágrafos anteriores, não parece muito provável que fosse Hipaso que descobriu a incomensurabilidade. Além do mais, é precisamente o mesmo caráter auto-reprodutivo, que faz com que o pentágono seja um símbolo apropriado para a metempsicose, que também revela a incomensurabilidade. Isto deveria ter sido bastante claro para os pitagóricos quando adotaram o pentagrama como seu emblema. Assim, as estórias persistentes, embora mais tardias, sobre Hipaso mostram o que deveria ter realmente acontecido. De acordo com essas estórias, Hipaso naufragou em alto mar, não porque descobriu a incomensurabilidade, mas porque a revelou para não iniciados. Mas, se os pitagóricos que adotaram o pentagrama como emblema estavam cientes da incomensurabilidade, como agora parece ser o caso, Hipaso não pode ser visto como alguém que foi punido por ter revelado um segredo que iria desacreditar os pitagóricos. Deveria ser visto, ao contrário, como sendo punido por ter revelado a doutrina sagrada para quem não estava pronto para recebê-la e, desta forma, profanado o conhecimento sagrado. De fato, dizer a verdade, mesmo para envergonhar a irmandade, não parece merecer punição *divina*. Profanação do sagrado, porém, seria outra história!

3 Há uma dificuldade na interpretação deste tablete devida à ausência do zero no sistema de numeração babilônico antigo.

Números Figurados e Figuras Geométricas

Os pitagóricos estudaram intensivamente não somente números figurados, que é consoante com sua crença no princípio de que tudo é número, mas também figuras geométricas, nas quais o incomensurável (o *á-logos*, ou irracional) está presente[4]. Assim, sugere-se que eles não foram completamente bem sucedidos na tentativa de integrar as suas doutrinas científicas e religiosas e, no final das contas, acabaram desenvolvendo uma teoria dualística. Segundo essa interpretação, os números figurados, sendo baseados sobre iterações finitas da unidade e postos em ordenações espaciais obedecendo a relacionamentos aritméticos, representariam sua doutrina científica e numérico-teórica, enquanto as figuras geométricas correspondentes, imbuídas com os misteriosos incomensuráveis, representariam suas, talvez enigmáticas, crenças religiosas. A sugestão seria, sem dúvida, "vindicada" por citar Platão, um pitagórico da terceira geração, cujo pensamento é geralmente considerado dualístico.

A sugestão apresentada no parágrafo anterior, contudo, contraria tudo que vimos na seção anterior do presente trabalho. Devemos lembrar que a doutrina religiosa revela-se a partir da matemática e que é este fato que caracteriza o pitagorismo. Desta forma, para os pitagóricos, é sempre a matemática que determina a filosofia e, portanto, seria mais propício, para a nossa interpretação, investigar a própria matemática pitagórica mais cuidadosamente e só depois tentar desvendar suas implicações para a religião e a filosofia. Antes de continuar, porém, será interessante fazer mais algumas observações sobre a sugestão do parágrafo anterior. É de fato verdadeiro que os

4 As relações simbióticas entre a aritmética e a geometria foram explicadas em Fossa (2003).

pitagóricos foram vistos, tradicionalmente, como dualistas. Seu dualismo, no entanto, não era centrado numa ruptura entre a ciência e a religião, mas na sua aparente adesão a princípios dualísticos de uma Tabela de Opostos. Ainda mais, os neoplatônicos eram muito insistentes em caracterizar Platão como já sendo um neoplatônico e, portanto, não dualístico. Erickson e Fossa (2005) fizeram uma análise da referida caracterização e a acharam substancialmente correta, especialmente referente ao período maduro – isto é, seu período pitagórico – de Platão.

A Tabela de Opostos, preservada por Aristóteles (*Metafísica* A5), é francamente estranha em muitos respeitos. O Hum (*hén*), por exemplo, é listado com o Ímpar, embora saibamos que o Hum era considerado tanto Ímpar, quanto Par. Pode ser que isto reflete uma diferença entre *hén* e *monás*. A referida questão, no entanto, não é uma que precisamos tratar aqui, pois o próprio Aristóteles parece atribuir a Tabela a uma única das várias escolas pitagóricos, ou até a um pensador a eles relacionado. Assim, podemos desconsiderar os problemas gerados por essa peculiar Tabela de Opostos e tratar apenas o princípio geral de oposição[5].

Ora, o Hum ou a Unidade dá origem a número, pois número é simplesmente uma coleção de Unidades. Ao examinar a sequência dos números, porém, a mesma se separa de imediato em Ímpar e Par, que revela a presença de oposição. A oposição, contudo, não é anterior a número, o que faria o Ímpar e o Par mais básicos do que o próprio número. Ao contrário, é número que é anterior e assim é número que gera a oposição de Ímpar e Par através da iteração da Unidade. Visto que "tudo é número", a oposição básica de Ímpar e Par será manifestada de maneiras diferentes na medida em que aspectos diferentes da realidade se desenvolvem pela articulação de número em harmonia.

5 Para mais detalhes sobre esse assunto, ver Kirk e Raven (1979, p. 245-247).

Uma vez estabelecida essa maneira básica de gerar o mudo, ela pode ser aplicada a situações cada vez mais complexas. Em particular, a congregação de número em relações numérico-teoréticas estáveis, representada pelos números figuradas, dá origem às figuras geométricas correspondentes. A geração das novas figuras geométricas acarreta novos aspectos da realidade que ficam em oposição aos números figurados que as haviam gerado. Os números figurados, por exemplo, são compostos de partes discretos, não preenchem espaços e manifestam *lógos* (a razão entre dois números inteiros positivos) e *análogos* (proporção entre números inteiros positivos). As figuras geométricas, em contraste, são compostas de partes contínuas, preenchem espaços (ou encerram espaços) e manifestam, além de razão e proporção de números inteiros, relações incomensuráveis. Estas oposições podem ser vistas, entre duas formas de números pentagonais e o pentágono, na Figura 8.

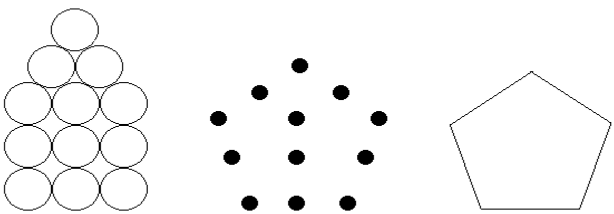


Figura 8.

Agora que temos uma apreciação da visão genética dos pitagóricos, podemos traçar a história do desenvolvimento desta escola de maneira muito mais frutífera do que a que foi recontada no primeiro parágrafo da presente seção. A sequência, consistindo de os primeiros pitagóricos, Platão e Plotino, pode ser vista agora como uma sequência natural de desenvolvimento, começando com os princípios genéticos dos primeiros pitagóricos, passando pela, no mínimo implícita, teoria platônica de emanações e finalmente chegando à teoria bem articulada de Plotino sobre o desenvolvimento do mundo através de emanações sucessivas da fonte original divina. Os números figurados, bem como as figuras geométricas, devem ser reinterpretados como representações do movimento do Hum para o nosso mundo multifacetado. A Figura 9, um exemplo deste movimento em relação aos números figurados, retrata os primeiros números quadrados, cada um dos quais pode ser visto como uma nova emanação em uma sequência cascateante. Figura 10, um exemplo do referido movimento em relação a figuras geométricas, mostra os dois heptágonos das Figuras 4 e 5 com os lados das estrelas suprimidos; o resultado é uma Rosa do Ser, novamente simbolizando o desabrochamento do mundo em emanações sucessivas.

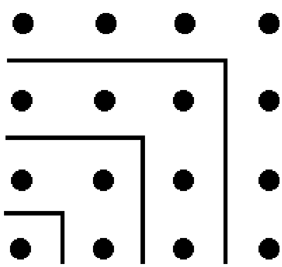


Figura 9.

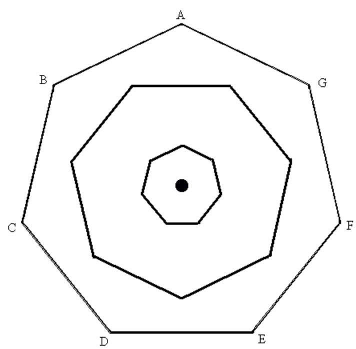


Figura 10.

Tudo isto posto, devemos também observar o seguinte: o fato de que os primeiros pitagóricos tinham uma interpretação genética da origem da incomensurabilidade e que esse fenômeno, portanto, não gerou uma crise que ameaçava abalar o pitagorismo não significa que os primeiros pitagóricos estavam completamente confortáveis com a incomensurabilidade. Isto é indicado tanto pela nova teoria de proporção de Eudoxo, quanto pela maneira que a mesma é apresentada por Euclides nos seus *Elementos*, pois apresenta a teoria nova e a teoria antiga de forma independente em livros distintos da sua obra. De fato, foi somente com a teoria nova de proporção de Eudoxo que razões incomensuráveis se tornaram, por assim dizer, racionais, sendo que isto foi efetuado por embuti-las no campo inteiro das razões racionais[6].

Conclusão

Um dos maiores problemas na interpretação do pensamento dos pitagóricos é que a escola pitagórica não era um grupo compacto, bem definido no espaço e no tempo, com uma única doutrina comum a todos seus membros. Antes, era uma conglomeração difusa de escolas (às vezes competitivas), compartilhando, frequentemente, apenas a crença fundamental de que o significado (*lógos*) do mundo se acha na matemática, especialmente com número em harmonia. Ainda mais, o pitagorismo teve uma história muito comprida, indo de Pitágoras até Diofanto. Naturalmente, pensadores diversos eliciaram diversas consequências da sua visão matemática fundamental. A presente investigação do pentagrama como emblema pitagórico, porém, indica que houve pelo menos uma linha coerente de desenvolvimento dentro dessa tradição pitagórica difusa, a que vai dos primeiros pitagóricos, passa por Platão e chega a Plotino. Esta linha de desenvolvimento se centra na primazia do Hum e sua articulação do mundo através de, no início,

6 A referida descoberta também invalidou algumas das demonstrações matemáticas da teoria anterior, que decerto não deixou de ser desconcertante. Para mais detalhes, ver Fossa e Erickson (2005).

princípios genéticos e, depois, uma teoria correspondente de emanações.

Referências

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. (Trans. Elza F. Gomide.) São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BURKERT, Walter. *Babylon, Memphis, Persepolis: Eastern Contexts of Greek Culture*. Cambridge (MA.): Harvard University Press, 2004.

ERICKSON, Glenn W. and John A. FOSSA. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia de Platão*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2005.

______. *Estudos sobre o Número Nupcial*. Rio Claro: SBHMat, 2001.

EVES, Howard. *Introdução 1a História da Matemática*. (Trans. Hygino H. Domingues.) Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FOSSA, John. A História da Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat. In Marcos V. TEIXEIRA e Sergio R. NOBRE (Eds.). *Anais do V SNHM*. Rio Claro: SBMat, 2003.

______. Uma Caracterização da Matemática Platônica. In: Circe Mary Silva da SILVA (Ed.). *Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática*. Vitória: UFES, 1999.

FOSSA, John A. and Glenn W. ERICKSON. The Divided Line and the Golden Mean. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 5, n. 9, p. 59-77, 2005.

FOWLER, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*. Oxford: Clarendon, 1987.

HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of the Golden Number*. Mineola (N.Y.): Dover, 1998.

KIRK, G. S. and J. E. RAVEN. *Os Filósofos Pré-Socráticos*. (Trans. Carlos Alberto Louro Fonseca, Beatriz Rodrigues Barbosa e Maria Aparecida Pegado.) Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.

PLUTARCH. *De Iside et Osiride*. (Trans. J. Gwyn Griffiths.). Swansea: University of Wales Press, 1970.

van der WAERDEN, B. L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer, 1983.

von FRITZ, Kurt. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, v. 48, n. 2, p. 242-264, 1945.

WUSSING, Hans. *Lecciones de Historia de las Matematicas*. (Trans. E. Ausejo, J. L. Escorihuela. M. Hormigón, D. Kara-Murzá and A. Millán.) Madrid: Siglo XXI, 1979.

3

O que Significa ser Pitagórico?

John A. Fossa

Pitágoras, talvez porque não nos deixou qualquer relato escrito do seu pensamento, tem sido uma figura polêmica, tanto na História da Matemática, quanto na História da Filosofia. Para alguns, era nada mais que um xamã ou místico, enquanto, para outros, foi o mais importante precursor da ciência moderna. A mesma dicotomia de opiniões se aplica ao pitagóricos em geral. Estes consistiam numa conglomeração[1] bastante diversa de "escolas" de pensamento, espalhadas através do mundo antigo e relacionadas, de alguma forma, com o próprio Pitágoras. Digo, aqui, "de alguma forma" porque a relação exata não tem sido delineada claramente na literatura especializada sobre esse tópico. A empreitada principal do presente trabalho será a de sugerir um critério para determinar se, ou não, qualquer dado pensador antigo pode ser classificado

1 Ver, por exemplo, Huffman (1993).

como pitagórico. Ao fazê-la, teremos de considerar a organização social das sociedades pitagóricas e isto, por sua vez, sugerirá que esta organização foi um modelo para a teoria platônica da Linha Dividida.

Um Retrato Coerente do Pensamento Pitagórico

Os pitagóricos, em geral, são conhecidos por duas teses filosóficas aparentemente independentes, das quais podemos resumir da seguinte maneira:

1. Tudo é número, ou, mais propriamente, tudo é número e harmonia.

2. A alma é imortal e, após separação do corpo, renasce noutro corpo.

Com respeito a essas duas teses, o historiador eminente do pensamento antigo, F. M. Cornford (1922, p. 137)[2] opina que

> ... in the sixth and fifth centuries B.C., two different and radically opposed systems of thought were elaborated within the Pythagorean school. They may be called respectively the mystical system and the scientific. All current accounts of Pythagoreanism known to me attempt to combine the traits of both systems in one composite picture, which naturally fails to hold together.

---

2 Gostaria de agradecer ao colega Josildo José Barbosa da Silva pela obtenção deste artigo.

De fato, do ponto de vista da matemática do século XIX, seria muito difícil compreender como o misticismo e a ciência poderiam ser combinados num todo coerente. Não obstante, do ponto de vista antigo, não houve conflito nisto. Ainda mais, devemos mencionar que, ao caracterizar a Tese 2 como sendo "mística", Cornford está, conscientemente ou não, prejulgando a sua natureza. Pois, embora a tese originou-se entre (ou, pelo menos, foi transmitida a Pitágoras pelos) órficos e/ou outros grupos místicos, ela não é inerentemente mística. De fato, os próprios pitagóricos avançaram argumentos racionais a fim de mostrar de que a tese seja verdadeira.

Mesmo assim, é a Tese 1 que dá ao pitagorismo seu caráter distintivo, como veremos logo a seguir. De fato, a expressão "tudo é número" claramente coloca os pitagóricos na tradição dos físicos jônicos, pois, em vez da água de Tales, o ilimitado de Anaximandar e o ar de Anaximenes, Pitágoras argumentou que é o número que é a *arché* do universo, ou seja, o material básico de que tudo é composto. Devemos recordar, contudo, a tradição antiga segundo a qual Pitágoras fez um recomeço na filosofia. Na verdade, fez esse recomeço por alegar que determinar a *arché* do universo não é suficiente, é necessário ir mais além e descobrir seu *lógos*.

O significado primordial da palavra grega *lógos* é "palavra", mas também recebeu várias outras acepções relacionadas a esta. No presente contexto, significou algo como "aquilo que investe o mundo com significância", ou seja, a "inteligibilidade" do mundo. Para os pitagóricos, a busca de *lógos* era contida na adenda à Tese 1, "e harmonia". É a harmonia que une diversos números num todo estruturado e faz com que o resultado seja inteligível à razão humana.

Como devemos, então, compreender harmonia? É bem conhecido que, por "harmonia" ou "música", os pitagóricos referiam à teoria de razões e proporções entre números (inteiros positivos). Os antigos alegaram que foi o próprio Pitágoras quem descobriu que as consonâncias musicais são determinadas por razões entre números inteiros: a oitava tem a razão de 2:1, a quarta, a de 4:3, e a quinta, a de 3:2. Assim, as consonâncias musicais básicas[3] são determinadas pelos primeiros quatro inteiros positivos, {1, 2, 3, 4}, o que era chamada de *tetractys*. Esse conjunto também foi utilizado pelos pitagóricos nas suas especulações sobre o universo.

Assim, para Pitágoras, foi a matemática que revelava a estrutura escondida do universo. Mais especificamente, foi a teoria matemática de razões e proporções que revelava o *lógos* do universo, fazendo com que ele seja inteligível à razão humana. Em consequência, conhecimento matemático era conhecimento sagrado e, portanto, não foi compartilhado com todos. Visto que era conhecimento sagrado, era reservado para os que haviam se submetido às apropriadas cerimônias de iniciação e, ao fazê-lo, têm se tornado merecedores de recebê-lo.

A conexão com a matemática é enfatizada pelo próprio nome usado para designar os iniciados: *mathematikoí*. Na verdade, o nome é etimologicamente relacionado com um verbo que significava originalmente "saber" e, assim, os *mathematikoí* eram "os sábios" ou, talvez, "os alunos". Foi, de fato, entre os próprios pitagóricos que o nome "matemática" perdeu seu significado geral de "conhecimento" para passar a significar especificamente as disciplinas matemáticas de aritmética (estudo de números), música (razão e proporção), geometria

3 Houve outras consonâncias na música grega, em especial o tom e o semitom, que também foram explanadas em termos de razões de números inteiros. Visto, porém, que estas podem ser consideradas secundárias, não será necessário abordá-las aqui.

(figuras) e astronomia (figuras em movimento).[4] Assim, para os pitagóricos, a matemática era conhecimento *par excellence*.

Com isto, obtemos uma primeira aproximação sobre o que significava, no mundo antigo, ser pitagórico: Tese 2 é uma consequência de Tese 1. Podemos dizer um pouco mais sobre isto. Para os pitagóricos, a matemática é o *lógos* do universo e, assim, ela revela ao homem a estrutura sagrada do mundo inteiro, incluindo a relação do homem para com o divino. Uma parte fundamental dessa relação é o reconhecimento da imortalidade da alma e sua transmigração para outro corpo com o falecimento do corpo atual. Desta forma, há uma relação bastante estreita e coerente entre a matemática[5], que é racional, mas não científica (na acepção moderna da palavra), e religião, que também é racional, embora não sem conotações místicas (as quais foram, contudo, justificadas pela matemática). Ainda mais, a natureza sagrada – e, portanto, restrita – do conhecimento matemático foi usada para estruturar a sociedade de acordo com os conhecimentos dos seus membros a fim de que a estrutura do universo (macrocosmo) seja espelhada na estrutura da sociedade (mesocosmo). Eventualmente[6], essa analogia é entendida à estrutura do próprio homem (o microcosmo).

Desta forma, podemos concluir que as diversas escolas pitagóricas eram as mesmas – isto é, eram pitagóricas – na medida em que aceitaram tanto a Tese 1, quanto a proposição de que a Tese 2 é consequência da Tese 1. Estariam diferentes na medida em que discordaram sobre a maneira exata em que a articulação entre a Tese 1 e a Tese 2 deveria ser feita, ou, o que

4 Ver, por exemplo, Heath (1981).

5 Para mais detalhes sobre como essa relação foi tematizada, ver, por exemplo, Fossa (2006).

6 Certamente ate a época de Platão, se não antes.

é ainda mais importante, na medida em que suas bases matemáticas eram diferentes.

Será, então, interessante considerar com mais pormenores a estrutura das sociedades pitagóricas. Antes disto, porém, será útil investigar a base matemática fundamental das doutrinas pitagóricas.

Teorias de Proporção

Como já vimos, a ideia original de Pitágoras, com respeito da matemática como o *lógos*, parece ter sido o reconhecimento de que as consonâncias musicais são estruturadas por razões entre números inteiros positivos. São, de fato, razão e proporção que conferem a inteligibilidade ao universo, fazendo com que ele seja acessível à razão humana. Até a etimologia confirma essa conclusão, pois, em paralelo à palavra grega *lógos*, a palavra latina *ratio*, e, portanto, a palavra portuguesa *razão*, tem o significado duplo de "explicação racional" e "quociente de dois números".

Na segunda geração de pitagóricos, houve mais e mais atenção dada a médias matemáticas, especialmente às médias aritmética, geométrica e subalterna (isto é, harmônica). É atribuído a Arquitas, em especial, o desenvolvimento matemático da teoria de médias, mas fragmentos de outros pitagóricos, como Filolaus, evidenciam a aplicação de médias matemáticas a áreas diversas da filosofia, *e.g.*, a ética.

Na terceira geração, houve uma pequena crise gerada pela descoberta da incomensurabilidade, o que invalidou várias demonstrações na teoria pitagórica de proporção. A crise foi superada logo, porém, através de uma nova teoria de proporção desenvolvida por Eudoxo, um membro (e talvez cofundador) da Academia de Platão[7]. O próprio Platão, talvez em conjunção com outros membros da Academia, desenvolveu uma teoria elaborada da Linha Dividida[8] (utilizando a média geométrica), que ele usou para estruturar sua metafísica, enquanto seu aluno, Aristóteles, generalizou esta teoria, obtendo a Linha Dividida Duplicada (usando proporção contínua), o que se separa em dois pares de opostos, ou seja, o Quádruplo, que é tão característico do seu pensamento[9].

O caráter número-teórico da matemática pitagórica é também mostrado pelo fato de que se sempre acha, na longa história do pitagorismo, interesse contínuo nos números figurados. Ainda mais, seu interesse na teoria de proporção é mostrado pelo desenvolvimento da doutrina das dez médias matemáticas, bem como o desenvolvimento de escalas matemáticas para a teoria da música (fenomenal). Até a "geometria sagrada", quando se desenvolveria, é ou subserviente à aritmética, como na doutrina platônica, ou elaborada em escolas não-pitagóricas posteriores.

Tudo isto nos leva a refinar nossa ideia do que significa ser pitagórico por impor a condição de que a base matemática do pitagorismo seja considerada a teoria de proporção. Assim, alguém seria um pitagórico se sustentasse a proposição de que a teoria de proporção revela que o *lógos* do universo é algo parecido com a Tese 2 e que, em consequência, a sociedade deveria ser estruturada de acordo com os conhecimentos dos seus membros. As diferenças entre as diversas escolas seriam devidas às diversas teorias de proporção por elas adotadas. Pitágoras, por exemplo, tinha uma teoria simples de proporção que, embora fosse baseada em relações multiplicativas, foi embutida num

7 Ver Fossa & Erickson (2005).

8 Ver Erickson & Fossa (2006).

9 Ver Fossa (2007).

cálculo aditivo. A teoria de Arquitas foi estruturada pelas já mencionadas dez médias matemáticas, enquanto a de Platão foi estruturada pela nova teoria de proporção, elaborada por Eudoxo, e pela Linha Dividida.

Esse refinamento da nossa compreensão do pitagorismo tem uma consequência importante. Como foi mostrado por Fossa (2010), a teoria de proporção foi uma das primeiras partes da matemática a ser desenvolvida e, portanto, acarretava conotações bastante fortes do conhecimento tradicional. Assim, os pitagóricos, começando com o próprio Pitágoras e sua aceitação dos princípios órficos, eram, de fato, pensadores que defendiam valores tradicionais. Ironicamente, contudo, novos desenvolvimentos no campo da matemática sempre desafiaram os pitagóricos a fazer mudanças na sua filosofia. Platão reconheceu isto explicitamente com sua proposta de criar novos mitos para os novos tempos. Não obstante, seus novos mitos são embutidos com valores tradicionais.

A Estrutura de Sociedades Pitagóricas

As sociedades gregas que foram governadas pelas pitagóricas foram divididas, como já mencionamos, em várias classes. Voltaremos agora a nossa atenção para uma investigação destas classes.

A divisão principal, é claro, foi entre os que pertenceram à irmandade e os que não pertenceram a ela. Para ingressar na irmandade, era necessário sofrer certos ritos de iniciação. Os antigos testemunham que um dos principais ritos era o de guardar silêncio por um período de cinco anos. A razão para isto, dizem, era obter uma garantia de que o proponente tivesse a disciplina e a discrição necessárias para não revelar a doutrina sagrada a quem não fosse preparado de forma adequada. Ainda mais, os membros renunciaram todos seus bens e residiam conjuntamente numa comunidade, onde seguiam alguns regimes diários e praticavam certas virtudes. Dentro da irmandade, houve um conselho administrativo, chamado os *politikoí*, constituído dos membros mais avançados do grupo. Naturalmente, deveria ter tido variações deste modelo básico em lugares e tempos diferentes.

Segundo Jâmblico (Iamblichus, 1987), um filósofo neoplatônico do terceiro século, a maioria dos pitagóricos eram chamados *cenobites*, devido a essa vida em comum. Eram divididos em dois grupos, os *mathematikoí* e os *akousmatikoí* (ouvintes). Estes, compreendendo por muito a parte maior dos pitagóricos, não eram, apesar da descrição ao contrário de Jâmblico, membros integrais da irmandade e provavelmente não participavam na vida em comum. Antes, eram pessoas que frequentavam palestras abertas ao público e talvez fizessem pagamentos simbólicos ou outras contribuições voluntárias à irmandade, mas que não cedessem todos seus bens ao grupo. Provavelmente se considerassem pitagóricos, mas o próprio Jâmblico indica que os *mathematikoí* não os assim consideraram. Seja isto como for, Jâmblico (Iamblichus, 1987, p. 77) faz a seguinte descrição da participação dos *akousmatikoí*:

> The philosophy of the Hearers consisted in lectures without demonstrations or conferences or arguments, merely directing something to be done in a certain way, unquestioningly, preserving them as so many divine dogmas, non-discussable, and which they promised not to reveal, esteeming as most wise those who more than others retained them.

Os *mathematikoí*, ou seja, os “eruditos”, em contraste, eram cientes das demonstrações matemáticas e suas aplicações à filosofia.

Os demais cidadãos da cidade poderiam ser designados pelo termo *hoi polloí*, as massas turbulentas, que não houveram qualquer contato mais estreito com os pitagóricos e que precisavam ser disciplinadas, para seu próprio bem, pela autoridade civil.

Assim, esquematicamente, as classes de uma sociedade pitagórica tomaria a seguinte forma:

politikoí

$$\text{cenobites} \begin{cases} \text{mathematikoí} \\ \text{akousmatikoí} \end{cases}$$

hoi polloí

onde a hierarquia vai de baixo (menos nobre) para cima (mais nobre).

Isto posto, podemos agora comparar duas escolas diversas de pitagóricos, a do próprio Pitágoras e a do Platão, da seguinte maneira:

<table>
<tr><td rowspan="2">membros da irmandade</td><td>politikoí</td></tr>
<tr><td>mathematikoí</td></tr>
<tr><td rowspan="2">não-membros</td><td>akousmatikoí</td></tr>
<tr><td>hoi polloí</td></tr>
<tr><td colspan="2">escola de Pitágoras</td></tr>
<tr><td colspan="2">proporção como constante multiplicativa</td></tr>
</table>

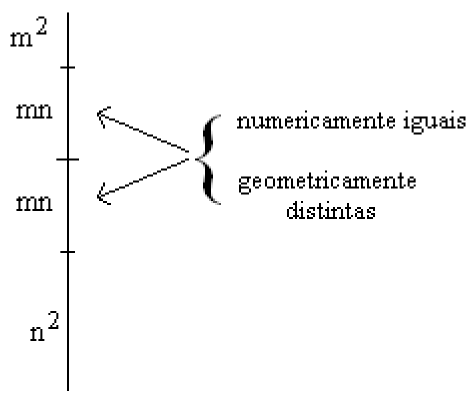
<table>
<tr><td rowspan="2">esotéricos</td><td>membros da Academia</td></tr>
<tr><td>estudantes da Academia</td></tr>
<tr><td rowspan="2">exotéricos</td><td>leitores dos diálogos</td></tr>
<tr><td>hoi polloí</td></tr>
<tr><td colspan="2">escola de Platão</td></tr>
<tr><td colspan="2">Doutrina da Linha Dividida</td></tr>
</table>

Esse diagrama mostra claramente que as estruturas das duas escolas pitagóricas são isomórficas e que diferem nas suas bases matemáticas. Podemos representar essa diferença como uma diferença no conteúdo de Tese 1.

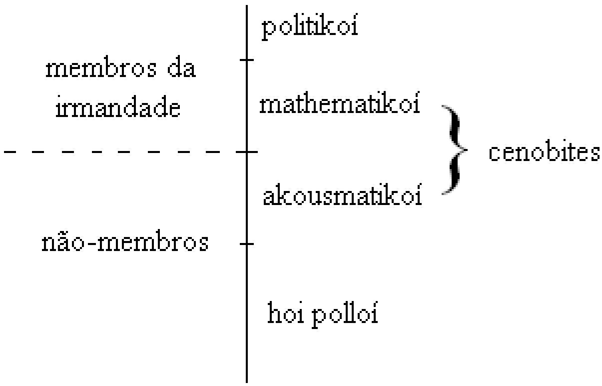
Origem Possível da Linha Dividida

Agora que temos caracterizado os pitagóricos como os que afirmam que a transmigração da alma e o isomorfismo entre o mesocosmo e o macrocosmo são consequências da teoria de proporção, estamos levados a uma possibilidade surpreendente, a saber, que a própria Doutrina da Linha Dividida poderia ter sido inspirada pela organização, como mostrada acima, das sociedades pitagóricas.

Para ver isto, lembramos que a Linha Dividida é um segmento dividida uma vez, cujas partes são então divididas na mesma razão. Do ponto de vista da Teoria dos Números, o resultado é um segmento cujas partes extremas são quadrados perfeitos e cujas partes internas são a média geométrica das partes extremas, conforme o seguinte diagrama:



Desta forma, as duas partes internas são numericamente iguais, mas geometricamente distintas (congruentes). Qualitativamente, essas partes internas são, de um ponto de vista, iguais, no entanto, são, de outro ponto de vista, diferentes. Isto é a estrutura exata achada na esquematização, dada no presente trabalho, das sociedades pitagóricas. Para fazer o ponto ainda mais claro, o esquema pode ser dado como uma Linha Dividida explícita da seguinte maneira:



De um ponto de vista, os *mathematikoí* e os *akousmatikoí* são os mesmos, pois ambos filosofam sobre a vida pitagórica. De outro ponto de vista, contudo, são diferentes porque aqueles têm acesso à matemática e, portanto ao *lógos*, enquanto estes não o têm.

À primeira vista, a sugestão de que Platão concebeu a Linha Dividida a partir de uma reflexão sobre a estrutura das sociedades pitagóricos poderá parecer pouco provável. Não obstante, quando lembramos que a Doutrina da Linha Dividida foi elaborada na *República*, que trata do microcosmo em termos do mesocosmo e, ainda mais, que foi exatamente no período em que Platão escrevia esse diálogo que ele veio a aceitar o pitagorismo, a sugestão se torna mais provável.

Conclusão

Ao concluir, gostaria de refletir um pouco sobre a importância da presente caracterização do pitagorismo para a História da Matemática.

É claramente interessante, para a história do pensamento, poder conceituar diversos grupos como partes de um movimento maior, identificando as teses básicas comuns das quais provêm sua unidade fundamental, e, ao mesmo tempo, discernindo as variedades que constituem o mosaico das suas diferenças.

Não obstante, também é interessante ter uma visão mais geral da matemática como uma instituição social e identificar seus papéis em culturas diferentes. Alguns desses papéis são bem conhecidos, como, por exemplo, seu papel como um princípio de organização para a ciência moderna e para a tecnologia. Outros, porém, estão só agora começando a ser reconhecidos, como é no caso abordado no presente trabalho, onde vemos a matemática fazendo o papel de princípio de organização para o pensamento filosófico, remontando, de fato, aos inícios da metafísica.

Referências

CORNFORD, F. M. Mysticism and Science in the Pythagorean Tradition. *The Classical Quarterly*, v. 16, n. 3/4, p. 137-150, 1922.

ERICKSON, Glenn W. & John A. FOSSA. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia Platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2006.

FOSSA, John A. *Os Primórdios da Teoria dos Números*. [2 vols.] Natal: Editora da UFRN, 2010.

______. A Linha Dupla e os Elementos Materiais. *O Que Nos Faz Pensar*, n. 21, p. 203-217, 2007.

______. On the Pentagram as a Pythagorean Emblem. *Revista Brasileira de História da Matemática* v. 6, n. 12, p. 127-137, 2006.

FOSSA, John A. & Glenn W. ERICKSON. The Divided Line and the Golden Mean. *Revista Brasileira de História da Matemática* v. 5, n. 9, p. 59-77, 2005.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. [2 vols.] New York: Dover, 1981.

HUFFMAN, Carl A. *Philolaus of Croton: Pythagorean and Presocratic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

IAMBLICHUS of Chalcis. *The Life of Pythagoras*. In K. S. GUTHRIE (Ed.) *The Pythagorean Sourcebook and Library*. Grand Rapids: Phanes Press, 1987.

4

Observação sobre os Primeiros Três Postulados de Euclides

John A. Fossa

Sabe-se que os primeiros três postulados dos *Elementos* de Euclides são presumivelmente estipulações sobre o uso da régua e do compasso[1] como atividades legítimas da Geometria Euclidiana. Esses postulados são dados aqui na tradução de Irineu Bicudo (Euclides, 2009, p. 98)[2]:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

1 Os instrumentos euclidianos são a régua sem graduações e o compasso que fecha quando levantado do papel.

2 A tradução de Heath (Euclid, 1956) contém também o texto grego destes postulados.

> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

Lembramos, porém, que os gregos antigos também usaram outros métodos para especificar objetos geométricos. Assim, houve tanto uma "construção por pontos" de um segmento (triângulo equilátero, tetraedro) pela especificação dos pontos extremos (vértices), quanto uma "construção por fluxo" de um segmento (quadrado, cubo) pela moção de um ponto (segmento, quadrado)[3]. Ainda mais, algumas curvas especiais, tais como a quadratriz de Hípias e a espiral de Arquimedes, eram especificadas por movimentos compostos. Assim, a pergunta que surge de imediato é esta: Por que régua e compasso?

Uma resposta a esta pergunta é que foi uma restrição imposta por Platão aos geômetras para garantir que seus argumentos não seriam contaminados por considerações empíricas e, assim, perder o seu rigor matemático. Era, de fato, a resposta proposta por Hermann Hankel (1874), baseada em alguns comentários feitos por Papus. Outra, proposta por Thomas Heath (1981) e Walter Burkert (1972), identifica Oenopides de Chios, um geômetra do século IV, como o autor da estipulação.

Não obstante, qualquer que seja a origem da restrição à regra e compasso, não é dada explicitamente nos postulados de Euclides. Os referidos postulados apenas exigem que construções geométricas sejam efetuadas por meio de segmentos de retas e arcos circulares. Desta forma, o uso de régua e compasso só pode ser visto como uma maneira de implementar a restrição. Outra maneira de fazer a mesma coisa é a utilização de pregos e cordões, visto que um cordão esticado entre dois pregos delineia um segmento, enquanto um círculo é descrito por girar um dos pregos, sempre mantendo o cordão bem esticado[4],

3 Ver Erickson and Fossa (1996).

4 É também necessário girar o cordão de tal forma que não se enrola no prego.

ao redor do outro; neste caso, o centro do círculo é dado pelo prego fixo e seu raio pelo comprimento do cordão. Esta possibilidade foi observada por A. Seidenberg (1959)[5].

A Tese

Considerando, portanto, que uma das maneiras mais comuns[6] de fazer mensurações no mundo antigo, tanto para a agrimensura quanto para o levantamento de plantas, era através do uso de cordões esticados, podemos considerar os *Elementos* de Euclides como uma investigação teórica da atividade antiga de mensuração. Chamaremos essa atividade pelo nome "agrimensura". Naturalmente, a referida atividade era uma ciência prática, baseada em métodos empíricos aproximados, mas o modelo matemático dessa atividade era visto como uma ciência exata que fornece verdades absolutas. A agrimensura mereceria tratamento teórico porque, como a determinação de limites, teria sido parte da criação divina do *kósmos* ("bela construção") a partir do caos primordial, como discutida, por exemplo, por Platão no *Timeu*. Esse conhecimento é acessível ao homem porque o demiurgo divino é um ser racional que age de forma racional. Na verdade, ao fazer a atividade teórica de geometria, o homem se engaja numa mimese do divino.

Considerações

A tese proposta no parágrafo anterior liga a matemática, a agrimensura e a cosmogonia teórica numa maneira que, embora seja típica do pensamento antigo, não é inteiramente aceitável à mente moderna. No que segue, portanto, farei uma

5 Ver também Seidenberg (1961).

6 Ver, por exemplo, Joseph W. Dauben (1992).

série de observações numeradas que, espero, esclarecerão a tese proposta.

§1. Por que "agrimensura"?

É bem conhecido que a palavra "geometria" significa, do ponto de vista etimológico, "mensuração da terra". "Agrimensura" é talvez o equivalente moderno mais parecido. Devemos também levar em consideração os nomes das outras ciências matemáticas na antiguidade. Assim, "astronomia" é a "mensuração das estrelas"; isto significava, primordialmente, a determinação das posições e órbitas dos corpos celestiais. "Aritmética" é a "arte de contar" e o estudo de razão e proporção é chamado "música" ou "harmonia". Em consequência, as ciências matemáticas – o próprio auge de abstração e conhecimento absoluto (no ponto de vista grego) – foram todas nomeadas com referência às suas aplicações mais conspícuas. Mas, a aplicação mais conspícua da geometria é a agrimensura. Obviamente, contudo, o ponto de vista dos matemáticos, enquanto fazendo a matemática, transcende o das suas aplicações.[7]

§2. Agrimensura é idêntica com o "esticar de cordões" dos egípcios?

Os egípcios antigos usaram cordões para reconstituir as linhas que demarcavam as propriedades sempre que estas foram obliteradas pelas enchentes do Rio Nilo. A determinação correta destas propriedades foi de grande importância para o Estado, pois foram envolvidas com as várias maneiras em

7 À luz da tese do presente trabalho, sugere-se de imediato que cada uma das ciências matemáticas seria uma teorização da sua respectiva aplicação. Acredito que isto é inteiramente correto, mas aqui me limitarei ao caso da geometria. Não obstante, voltarei a esse ponto rapidamente na conclusão.

que os impostos foram avaliados; em consequência, as referidas demarcações foram investidas com autoridade divina. Mas, as mensurações usando cordões esticados (ou, alternativamente, varas de tamanho padrão) foram usadas em quase todas as civilizações antigas, não somente para determinar as propriedades dos cidadãos, mas também no planejamento de cidades, o desenho de espaços públicos e a construção de edifícios públicos ou particulares. Muitas dessas atividades tinham ligações bastante estreitas com a matemática sagrada. O arquiteto romano, Vitrúvio (fl. c. 14 B.C.), por exemplo, interessou-se em construções tendo proporções que incorporariam a analogia entre o macrocosmo e o microcosmo, uma ideia achada em textos não arquitetônicos como a *República* de Platão.

§3. Era o demiurgo um agrimensor?

Em contraste ao Deus cristão que criou o universo *ab nihilo*, o demiurgo grego, retratado no *Timeu* de Platão, montou o universo por construir ordem onde havia o caos primordial. Como já mencionado, a palavra “cosmos” aparentemente indicava “bijuteria” (ver Cornford, 1957) e foi usada pelos antigos filósofos gregos para expressar a “bela ordem” do universo. No *Timeu*, o demiurgo é representado como ordenando o universo de acordo com certas proporções matemáticas e construindo os Elementos Materiais de sólidos regulares. Assim, o demiurgo é decerto um agrimensor no sentido lato, indicado em §2, de mensurador, pois é ele que delimita o universo por mensurar e determinar limites. Ainda mais, cria beleza ao construir de acordo com teoria matemática.

§4. Por que, então, não há aplicação algum no tratado de Euclides?

O fato de que os *Elementos* de Euclides não contêm referências a contextos não matemáticos não foi empecilho aos antigos em considerá-los ligados a outras áreas de conhecimento. Assim, Proclo (Proclus, 1992, p. 57) afirma que

> … Euclid belonged to the persuasion of Plato and was in home in this philosophy; and this is why he thought the goal of the *Elements* as a whole to be the construction of the so-called Platonic figures.

Mas, talvez mais pode ser dito do que é contido no relato vago de Proclo. De fato, segundo a visão geral proposta na *República* de Platão, as atividades do homem são estruturadas por pelo menos três tipos distintos de investigação, a saber, o da matemática, o da filosofia e o do mito. A matemática lida com conhecimento puro e certo, enquanto a filosofia proporciona os princípios hermenêuticos que fazem com que a ciência (matemática aplicada) seja possível; finalmente, o mito apresenta os resultados da ciência numa forma poética ou dramática para coagir consentimento da grande maioria que tem pouco ou até nenhum acesso à matemática. A própria doutrina platônica da Linha Dividida na *República* conforme a essa estrutura. Os princípios matemáticos, sendo parte da doutrina esotérica, ou seja, a doutrina "não escrita", não foram publicados, mas foram reconstruídos por Erickson e Fossa (2006). Em contraste, porém, alguns dos princípios hermenêuticos referentes à aplicação da matemática à organização do Estado são apresentados na sua discussão da Linha Dividida e um relato mítico dos resultados é proposto no Mito da Caverna. Os *Elementos*, no entanto, é um tratado teórico visando à verdade absoluta e, em consequência, não poderia abordar as aplicações que são sempre *a posteriori* e, portanto, incertas.

§5. O que é teoria?

Conhecimento teórico, para os gregos antigos, é a determinação de princípios absolutamente verdadeiros e certos e corresponde à segunda divisão (Matemática) da Linha Dividida de Platão. Em termos epistemológicos, é o modo de apreensão denominado "conhecimento" e é completamente *a priori*. Em termos ontológicos, seu objeto é o real não material, visto que a matéria sofre mudanças contínuas e, portanto, segundo a posição em aprecio, não pode ser conhecido. Em contraste, a agrimensura é uma Ciência e, portanto, pertence à terceira divisão da Linha Dividida. Visto que lida com objetos materiais, é apenas "opinião", embora seja "opinião científica", e é susceptível às incertezas da percepção sensorial. Especificamente, a agrimensura visa o empreendimento de delimitar relações espaciais na superfície da terra. Desta forma, a geometria, como teorização sobre agrimensura, é a determinação dos princípios fundamentais do próprio espaço.

Devemos ainda observar que a "teoria" era, para os gregos antigos, também uma viagem ritual ao lugar do oráculo para contemplar os instrumentos religiosos deste oráculo (para mais detalhes, ver Fossa, 2008). Era suposto que isto teria um efeito transformativo sobre o teórico, mas não era esperado que ele iria ser transportado para sempre a uma existência puramente etereal. Muito pelo contrário, esperava-se que ele iria voltar à sua República e disponibilizar a sua nova sabedoria ao benefício do bem estar comum. Podemos concluir, portanto, que os *Elementos* de Euclides não foram elaborados *somente* para sua própria causa, mas também para fins de regular todas as ciências das quais tenho destacado pelo nome coletivo de "agrimensura".

§6. O que é mimese?

Na arte, a mimese é uma imitação do divino na forma de representá-lo através da fala humana. Assim faz presentes à audiência momentos seminais na história das realizações dos deuses. De forma semelhante, o geômetra contempla as verdades imutáveis sobre o espaço e as codifica em linguagem humana, fazendo com que fiquem presentes ao conhecimento humano. Ainda mais, na mesma forma em que o demiurgo, no seu papel de agrimensor divino, usou estas verdades matemáticas para construir a bela ordem do cosmos, o geômetra, no seu papel de agrimensor humano, faz possível a aplicação destas mesmas verdades na construção de projetos humanos. Assim, o geômetra imita o divino por agir de uma maneira completamente racional e, portanto, de acordo com a racionalidade divina.[8]

Conclusão

O presente trabalho, ao dar uma nova olhada[9] aos primeiros três postulados dos *Elementos* de Euclides, abre novas possibilidades para a compreensão do papel que, não somente a geometria, mas também, como foi mencionado na nota 7, todas as partes da matemática faziam no *milieu* intelectual da cultura grega antiga. A matemática, como teorizante, contempla as verdades absolutamente certas e eternas que proporcionam ao homem a construção da sua ciência imperfeita, porém

8 Podemos observar que os deuses homéricos, lascivos e querelantes, não devem ser identificados com os deuses dos filósofos. O demiurgo platônico, por exemplo, tem quase nada, exceto a imortalidade, em comum com seus correlatos homéricos.

9 Observamos que Høyrup (2001) já tinha observado que vários *teoremas* dos *Elementos* parecem pertencer a uma tradição ingênua de agrimensura.

razoavelmente eficaz, quando essas verdades são aplicadas ao mundo material. Isto, por sua vez, implica que, enquanto houvesse decerto uma hierarquia referente a teoria e prática, tanto em termos da confiabilidade do modo de apreensão apropriado a cada uma delas, quanto em termos do nível de realidade atribuído aos seus objetos, não foi uma hierarquia de opostos polares. Ao contrário, era mais como um todo orgânico, em que cada parte tinha seu papel na ordenação correta das atividades humanas.

References

BURKERT, Walter. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. (Edwin L. Minar, Jr., Trad.) Cambridge (MA): Harvard UP, 1972.

CORNFORD, F. M. *From Religion to Philosophy*. New York: Harper Torchbooks, 1957.

DAUBEN, Joseph W. The "Pythagorean Theorem" and Chinese Mathematics. In Sergei Demidov, David Rowe, Meno Folkerts & Christoph Scriba (Eds.). *Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seeinem 65. Geburtstag*. Basel: Birkhäuser, 1992. P. 133-156.

ERICKSON, Glenn W., & John A. FOSSA. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia Platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2006.

ERICKSON, Glenn W., & John A. FOSSA. *A Pirâmide Platônica*. João Pessoa: Editora da UFPb, 1996.

EUCLID. *The Thirteen Books of the Elements*. (T. L. Heath, Trad.) New York: Dover, 1956.

EUCLIDES. *Os Elementos*. (Irineu Bicudo, Trad.) São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FOSSA, John A. *Cabelos Negros, Olhos Azuis e Outras Feições das Matemáticas Puras e Aplicadas*. Natal: Editora da UFRN, 2008.

HANKEL, Hermann. *Zur Geschichte der Mathematic in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig: B. G. Teubner, 1874.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover, 1981.

HØYRUP, Jens. On a Collection of Geometrical Riddles and their Role in the Shaping of Four to Six "Algebras". *Science in Context*, v. 14, n. 1/2, p. 85-131, 2001.

PROCLUS. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. (Glenn R. Morrow, Trad.) Princeton: Princeton UP, 1992.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry. *Archive for the History of Exact Science*s, v. 1, n. 5, p. 488-527, 1961.

SEIDENBERG, A. Peg and Cord in Ancient Greek Geometry. *Scripta Mathematica*, v. 24, p. 107-122, 1959.

5

Frenicle de Bessy e Triângulos Retângulos

John A. Fossa

Entre os vários tipos de triângulo, o que tem chamado mais atenção é o triângulo retângulo. Uma das razões para isto é a circunstância prática de que paredes dispostos perpendiculares ao chão são mais estáveis. Outra razão é que, nesse tipo de triângulo, os lados a, b e c são relacionados pela equação $a^2 + b^2 = c^2$, o que tem embasado o conceito usual de distância, não somente na matemática, mas também nas ciências empíricas.

Entre os triângulos retângulos, porém, tem se destacado uma certa subclasse, a saber, a em que todos os lados são dados por números inteiros positivos. Alguns exemplos destes, no mínimo, foram conhecidos nas principais culturas da antiguidade e parece que os babilônios descobriram equações paramétricas que determinam todos os triângulos do referido subtipo. Mesmo assim, parece que o primeiro tratado dedicado a uma investigação sistemática desses triângulos foi o *Traité des Triangles rectangles en Nombres* de Bernard Frenicle de Bessy que foi publicado em 1676. Aqui[1], farei uma pequena análise deste tratado. Antes, porém, será interessante definir os termos e esclarecer os principais conceitos a serem usados no decorrer da análise.

Preliminares

Triângulos retângulos cujos lados têm comprimentos integrais (positivos) são atualmente chamados "triângulos pitagóricos". Frenicle não usava essa nomenclatura, mas dizia simplesmente "triângulos retângulos em números", sendo que é subentendido que por "números" ele queria dizer "números inteiros positivos". O maior lado, o oposto ao ângulo reto, é chamado *hipotenusa*. Em português, chamam-se os outros dois lados de *catetos*, mas parece que no tempo de Frenicle não se usava, entre os matemáticos franceses, um termo equivalente e, assim, ele utilizava várias frases descritivas para se referir aos catetos.

Como já mencionamos, se a, b e c forem as medidas de um triângulo retângulo, sendo c a hipotenusa, então a equação $a^2 + b^2 = c^2$ será satisfeita. Geometricamente, os quadrados são, de fato, construídos sobre os lados, como mostrado na Figura 1. Euclides demonstrou a citada relação em Proposição 47 de Livro I dos seus *Elementos*. A recíproca é demonstrada na proposição seguinte.

1 Para uma tradução do referido tratado, ver Frenicle (no prelo).

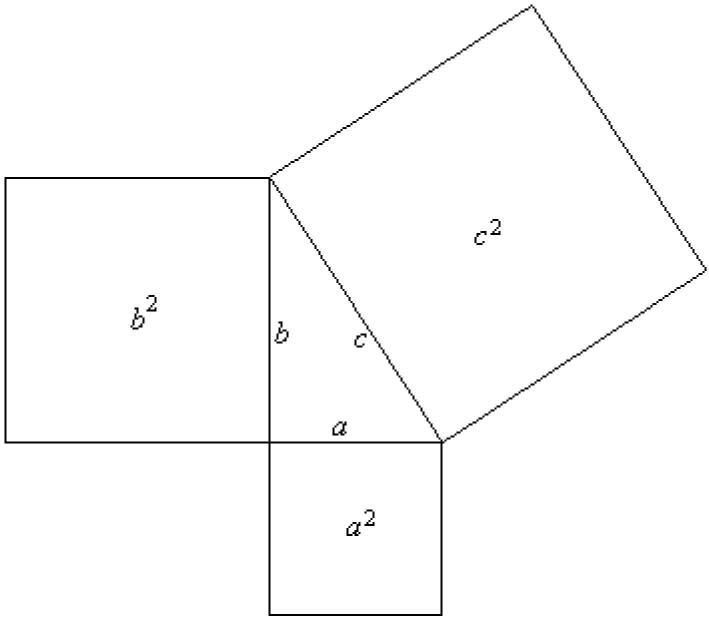


Figura 1.

Com referência à Teoria dos Números, os aspectos geométricos podem ser relegados ao segundo plano. Para tanto, consideremos a equação $a^2+b^2=c^2$ como uma equação diofantina, ou seja, uma cujas soluções são restritas a serem números inteiros. Mas, visto que $(-x)^2=x^2$ e que o problema é trivializado quando um dos valores é zero, podemos restringir as soluções a ternos de números inteiros positivos ("ternos pitagóricos") da forma (a, b, c), com c, o terceiro elemento do terno, maior do que a e b; assim, c corresponde à hipotenusa do triângulo correspondente. Desta forma, para maior flexibilidade de expressão, falaremos de triângulos ou ternos indiferentemente.

O triângulo (3, 4, 5) foi conhecido em todas as importantes civilizações históricas e até pelo homem pré-histórico (ver

Fossa, 2010b). Devemos observar, no entanto, que o conhecimento de triângulos pitagóricos não implica no conhecimento do próprio Teorema de Pitágoras. Da mesma forma, o conhecimento do referido teorema não implica no conhecimento da sua demonstração. De fato, parece que os egípcios antigos, por exemplo, conheceram o Triângulo (3, 4, 5), mas não o teorema geral. Ainda mais, enquanto os babilônios provavelmente conheceram o Teorema de Pitágoras, não tiveram o conceito de demonstração, que só seria desenvolvido no século VI antes do Cristo na Grécia Antiga (ver Fossa, 2010a).

O tablete babilônico chamado Plimpton 322, no entanto, parece indicar que os babilônios não somente conheceram ternos pitagóricos, mas também desenvolveram uma técnica de gerar esses ternos através de equações paramétricas. Visto que o tablete remonta a uns 1800 anos antes do nascimento do Cristo, o conhecimento babilônico sobre esse assunto é muito anterior ao desenvolvimento da matemática grega. As referidas equações paramétricas são as seguintes:

$$a = 2mn$$

$$b = n^2-m^2$$

$$c = n^2+m^2,$$

sendo, é claro, m e n números inteiros positivos com $n > m$. Se, além disto, m e n forem primos entre si, o terno produzido será primitivo no sentido de que os elementos do terno não terá qualquer múltiplo comum exceto 1. Isto quer dizer, em termos do triângulo correspondente, que não há qualquer triângulo pitagórico menor a este e a ele semelhante. Não é difícil mostrar que todos os ternos pitagóricos primitivos são dados pelas equações babilônicas e, em consequência, todo terno pitagórico tem a forma

$$(2kmn, kn^2\text{-}km^2, kn^2\text{+}km^2),$$

onde k é um inteiro positivo. É interessante observar que posteriormente os gregos usaram dois subcasos destes triângulos (os em que $k = 1$) nas suas especulações cosmológicas.[2] No primeiro subcaso, conhecido pelo nome de "Fórmula de Pitágoras", colocaram $m = n–1$, obtendo assim triângulos primitivos nos quais $c = a+1$. No segundo subcaso, conhecido como "Fórmula de Platão", colocaram $m = 1$, obtendo triângulos, alternando entre primitivos e não primitivos, em que $c–b = 2$.

Durante a história da matemática antiga, houve muitos problemas envolvendo triângulos pitagóricos. A forma geral destes é estipular certas condições que os triângulos devem satisfazer. Há muitos problemas desse tipo no livro *Aritmética* de Diofanto de Alexandria (*fl.* século III). Embora fosse desconhecido na Europa por muito tempo, começou a receber a atenção de certos matemáticos europeus a partir do século XV. Regiomontanus (Johann Müller, 1436-1476) Rafael Bombelli (1526?-1573) e François Vietè (1540-1603), por exemplo, todos conheceram o livro de Diofanto. Foi só em 1621, porém, que o mesmo foi traduzido do grego para o latim por Claude-Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638). A tradução foi muito importante na propagação de um novo interesse sobre a Teoria dos Números entre tais matemáticos como Albert Girard (1595-1632), Pierre de Fermat (1601-1665), Jacques de Billy (1602-1679), Antoine Frédéric Ozanam (1813-1853) e Leonhard Euler (1707-1783) (ver Dickson, v. II, 1952), bem como, é claro, o próprio Frenicle.

Deve ser claro que a fórmula paramétrica dos babilônios é um instrumento muito importante a ser usado na resolução

2 Para mais detalhes, ver Erickson e Fossa, 2006.

desse tipo de problema. Outra fórmula muito útil nos permite escrever o produto de duas somas de quadrados como uma soma de quadrados:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac\pm bd)^2 + (ad\mp bc)^2$$

Finalmente, mencionamos o problema de achar três quadrados em progressão aritmética, pois é um problema equivalente ao de achar um triângulo pitagórico. Para ver isto, sejam a, b, c três inteiros positivos tais que a^2, b^2 e c^2 estejam em progressão aritmética e seja d a diferença comum. Assim, teremos $b^2-a^2=d=c^2-b^2$ e, portanto, $b^2=\frac{c^2+a^2}{2}$. Ao por $x=\frac{c+a}{2}$ e $y=\frac{c-a}{2}$, obtemos $b^2=x^2+y^2$, ou seja, (x, y, b) é um terno pitagórico. Para ver a recíproca, basta observar que os cálculos já feitos são todos reversíveis. Desta forma, se (a, b, c) for um terno pitagórico com $b > a$, poremos $x = b+a$ e $y = b-a$. Então, como é fácil verificar, y^2, c^2, x^2 são três quadrados em progressão aritmética com diferença comum de $2ab$.

Como veremos no próprio *Tratado* de Frenicle, os triângulos pitagóricos são relacionados a formas quadráticas de forma natural. Antes de proceder, porém, à investigação do referido *Tratado*, será interessante fazer algumas observações sobre a vida do seu autor.

Apontamentos sobre a Biografia de Frenicle

Segundo M. A. Aubry (1914), Bernard Frenicle de Bessy nasceu em 1602, enquanto para A. Weil (1984) o referido evento só aconteceu em 1612. Para complicar ainda mais J. J. O'Connor e E. F. Robertson (2000) indicam que Frenicle nasceu em 1605. Veio a falecer, segundo todos, em 1675.

Embora não sabemos muitos detalhes sobre a vida dele, sabe-se que foi um matemático amador e membro da Academia Francesa das Ciências, sendo que ingressou nesta instituição em 1666. Sabe-se também que era um oficial da corte francesa e, como tal, residia em Paris. Segundo James Tattersall (1999), era amigo do astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642) e se disponibilizou a este para fazer uma tradução do seu *Diálogo*. A tradução, porém, não foi feita. Também segundo Tattersall (1999, p. 71-72), ele "discovered in 1634, that the frequency of a pendulum is inversely proportional to the square root of its length".

Um dos grandes interesses matemáticos de Frenicle era a Teoria dos Números. De fato, era seu interesse por quadrados mágicos que o levou a iniciar, através da intermediação de Marin Mersenne (1588-1648), uma correspondência com Fermat. A correspondência não se limitou aos quadrados mágicos, mas se centrava sobre questões relacionadas à divisibilidade. Ainda correspondia com René Descartes (1596-1650), Fermat e Mersenne em relação a números perfeitos e números amigáveis.

Em termos da sua atuação na matemática, Aubry (1914, p. 8) destaca sua habilidade em fazer cálculos, mas aponta também para a falta de conhecimento mais teórico:

> On ne dirá que quelques mots de sés traités, qui témoignent seulment de as rare aptitude aux calculs numériques, sans donner grande ouverture sur lês príncipes généraux invoques.

Esta avaliação é compartilhada por seu contemporâneo Fermat, bem como por André Weil (1984). Mesmo assim, foi um dos poucos matemáticos da época que se interessava em questões relacionadas à Teoria dos Números e, assim, foi instrumental na divulgação desta área da matemática para seus contemporâneos. Talvez o seu maior legado matemático seja o seu tratado sobre triângulos pitagóricos, que é o objeto do presente trabalho. O referido tratado foi decerto uma das influências principais sobre o também francês Eugène Bahier que publicou, em 1916, um tratado com o mesmo nome do de Frenicle, sendo, porém, o de Bahier mais sistemático e mais pormenorizado.[3]

Considerações Gerais sobre o Tratado

O *Traité des Triangles rectangles en Nombres* de Frenicle é um volume pequeno consistindo de apenas 116 páginas, sendo que o texto é limitado a uma coluna estreita da página. As margens largas são usadas para indicar os tópicos abordados e para identificar as proposições anteriores que justificam os passos nas demonstrações. A publicação original aconteceu em 1676, no ano posterior ao falecimento de Frenicle. A obra foi republicada em 1729.

A apresentação da matéria abordada é bastante parecida com a utilizada por Euclides nos seus *Elementos*, o que tem sido certo padrão entre textos matemáticos. Começa com uma lista de definições, seguidas por uma lista de "pressupostos", que abordaremos sequencialmente no que segue. Antes de passar para as proposições, ainda acrescenta algumas "observações gerais", ligadas aos pressupostos. Embora haja certa variação na apresentação das proposições e as suas demonstrações, há certa padrão que é seguido com certa regularidade. As proposições são primeiramente enunciadas em letras itálicas. Então as demonstrações são iniciadas por identificar as premissas da proposição e por destacar a conclusão com as palavras "digo

3 Para uma tradução comentada do livro de Bahier, ver Bahier (2017).

que". Daí segue a argumentação que é finalizada por repetir novamente a proposição (em geral, apenas parcialmente) e indicar que a conclusão foi o que se queria demonstrar.

As proposições do tratado de Frenicle consistem de 41 proposições numeradas, aos quais são acrescentadas, em vários casos, uma ou mais "consequências" (isto é, corolários). Entre as 41 proposições principais, algumas são claramente identificadas como lemas. Interessantemente, o texto não tem apresentação alguma, nem introdução, que justificasse a necessidade do livro ou delimitasse seu escopo.

As Definições de Frenicle

Ao iniciar seu *Tratado*, Frenicle faz uma lista de seis definições, duas das quais têm subpartes. As palavras definidas são as seguintes:

I. Triângulo Retângulo em Números
II. Lados Menores
Área
Hipotenusa
III. Triângulo Primitivo
IV. Triângulo Composto
V. Múltiplo de um Triângulo
VI. Número Parmente Par
Número Imparmente Par.

Todas as definições são feitas retoricamente. Os primeiros cinco destes conceitos foram abordados numa seção anterior do presente trabalho e, portanto, não carecem de maiores comentários aqui. Mencionamos apenas que o termo "lados menores" significa catetos e "área" não é definida como uma região do plano (a região encerrada pelo triângulo), mas como um produto, isto é, em termos algébricos, $\frac{1}{2}ab$, onde a e b são os catetos do triângulo. Observamos também que não define "múltiplo de um triângulo" explicitamente, mas define "dobro de um triângulo" e indica os outros casos por analogia.

O conceito de "parmente par" é achado em Euclides, onde é chamado de *par-vezes par*. Para Euclides, é um número que pode ser fatorado em dois fatores pares. De forma semelhante, *par-vezes ímpar* é, para Euclides, um número que tem um fator par e outro ímpar. Outros entre os antigos, como Têon de Smirna e Nicômaco de Gerasa, queriam eliminar a possibilidade de um mesmo número (por exemplo, 12) seja considerado tanto *par-vezes par* (2×6) quanto *par-vezes ímpar* (4×3) e, para tanto, modificaram as definições de euclidianas. Frenicle adotou a atitude de Têon e Nicômaco, definido o "parmente par" como um número divisível por 4 e o "imparmente par" como um número divisível por 2, mas não por 4. Isto é uma primeira aproximação do algoritmo da divisão que afirma que dados dois inteiros n e m, há inteiros q e r (únicos) tais que $n = qm+r$ com $0 \leq r < m$, o que é obviamente um teorema muito mais importante. No contexto dos triângulos pitagóricos, porém, em que só números inteiros positivos são contemplados, o algoritmo tomaria a seguinte forma: para $n > m$, há q e r tais que $n = qm+r$ com $0 < r < m$; o caso $n = m$ seria considerado como trivial, enquanto o caso $n < m$, teria de ser considerado separadamente.

Os Pressupostos de Frenicle

Logo depois das definições, Frenicle lista doze "pressupostos". Poderíamos supor que ele os considerava como os axiomas da sua obra. No entanto, ele indica que são proposições que são ou demonstradas na literatura ou cujas demonstrações são muito fáceis. Sendo assim, não parecem axiomas, mas apenas proposições úteis cujas demonstrações podem ser dispensadas porque são bem conhecidas. Novamente a abordagem é completamente retórica. Listaremos esses pressupostos a seguir, tecendo comentários maiores quando necessário. Usaremos variáveis para abreviar a apresentação, sem, no entanto, modernizar o pensamento de Frenicle.

I. Se a^2+b^2 não for um quadrado perfeito, a e b não serão os lados de um triângulo pitagórico.
Ao entender que por "lados" Frenicle quer dizer "lados menores", isto é a contrapositiva da Definição I.

II. O resultado de multiplicar um triângulo pitagórico por um inteiro positivo, ou de dividir por um fator comum, é um triângulo pitagórico.
Claramente, temos $a^2+b^2 = c^2$ sse $(na)^2+(nb)^2 = (nc)^2$.

III. Se x dividir y, x dividirá qualquer potência de y. Se p for um primo que divide um quadrado, também dividirá o lado do quadrado.
A primeira parte é óbvia, enquanto a segunda parte segue-se da primeira, usando uma fácil redução ao absurdo.

IV. O produto de dois quadrados será um quadrado, mas o produto, bem como o quociente, de um quadrado e um não quadrado será um não quadrado.
A maneira mais fácil de ver a segunda parte talvez seja através da decomposição em números primos.

V. Qualquer múltiplo de um par será par. Um ímpar somado com um par ou multiplicado por um ímpar será ímpar. A soma de dois ímpares será par.

VI. Se *a* estiver para *b* como um quadrado está para outro quadrado, o mesmo será verdadeira para quaisquer partes iguais de *a* e *b*.
A formulação retórica pode parecer estranha, mas se trata apenas do cancelamento de termos iguais de uma fração. As partes iguais de *a* e *b*, são os quocientes da divisão por um fator comum. Assim, dado $a = nc$ e $b = nd$, temos $\frac{a}{b} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{x^2}{y^2}$.

VII. Qualquer divisor comum de dois números também dividirá sua soma e diferença, bem como seus dobros.
Trata-se de casos particulares do teorema útil que garante que um divisor comum de dois números também divide todas as combinações lineares destes dois números.

VIII. O quadrado da soma de dois números será igual ao quadrado da sua diferença mais quatro vezes seu produto.
Trata-se da identidade algébrica $(a+b)^2 = (a-b)^2+4ab$.

IX. O produto de um número e uma diferença será a diferença dos produtos.
Trata-se de um caso especial da lei de distributividade: $n(a-b) = na-nb$.

X. O número sólido produzido será independente da ordem da multiplicação. O mesmo acontece para mais do que três fatores.
Para os antigos, um número sólido é um número que tem três fatores. Assim, o presente pressuposto de Frenicle é equivalente à associatividade e comutatividade da multiplicação.

XI. Dois números planos semelhantes não serão coprimos, nem será um deles coprimo com o dobro do outro.

Mais uma vez é necessário recorrer à matemática antiga para entender esta proposição. Um número plano é um que tem dois fatores, enquanto que dois números são semelhantes se eles têm uma média proporcional, isto é, se sua média geométrica é um inteiro. Mas, quando os dois números originais são quadrados, a proposição de Frenicle pode ser falsa, pois teremos $a^2 : ab :: ab : b^2$ e os extremos serão coprimos sempre que a e b são coprimos.
Parece, no entanto, que Frenicle está mais interessado na conclusão que se deduz desta proposição, a saber, que o produto de coprimos será um quadrado somente se cada um dos fatores forem quadrados e, de forma semelhante, o produto de dois coprimos será o dobro de um quadrado, somente se um dos fatores for quadrado e o outro duas vezes um quadrado. Seria, contudo, fácil demonstrar isto usando a decomposição em números primos.

XII. Resultados obtidos através do uso da álgebra são válidos.
Na época de Frenicle a álgebra não era matematicamente legitimada, pois ainda não havia uma axiomatização dos procedimentos algébricos. De fato, houve muita controvérsia sobre o assunto (para mais detalhes, ver Pycior, 1997). Assim, parece que, com a atitude assumida no presente pressuposto, Frenicle tinha um espírito arrojado com referência a esta questão. No entanto, tudo que sabemos sobre Frenicle nos leva a concluir que, na verdade, a sua aceitação da álgebra era acrítica e cômoda, talvez tendo sofrido a influência do seu contato epistolar com Descartes.

Três Observações Gerais

Antes de prosseguir para as proposições, Frenicle, como já mencionamos, apresentou três observações gerais. A primeira pode ser considerada uma metaproposição, pois caracteriza os pressupostos como dados, sendo que já se encontram demonstrados na literatura.

As outras duas observações podem ser entendidas como estipulações linguísticas, embora Observação II acarreta um resultado substancial. Este então afirma que a unidade (isto é, o número 1) é de fato um número e, portanto, um número quadrado. Entre muitos dos antigos, a unidade não era considerado um número, mas o "princípio" de número. Muita da confusão causada pela não inclusão da unidade entre os números é esclarecida por integrar a mesma no referido conjunto, mas, devido às suas propriedades como a identidade multiplicativa, não a incluir entre os primos.

A Observação III é mais simples, pois apenas estipula que, no seu texto, os termos "Triângulo" e "Triângulo Retângulo" serão usados no sentido de "triângulo retângulo em números", ou seja, no sentido de "triângulo pitagórico".

Considerações sobre as Proposições

Visto que há 41 proposições e vários corolários, não iremos comentar cada proposição individualmente. Em vez disto, agruparemos as com conteúdos semelhantes a fim de resumir estes conteúdos e fazer alguns comentários pontuais.

As primeiras três proposições, caracterizadas como lemas, são casos especiais do já mencionado algoritmo da divisão. A formulação é feita para que o resto tenha a forma

$$-\frac{1}{2}b < r < \frac{1}{2}b$$

e os três casos abordados são para b igual a 3, 4 e 5. Observamos ainda que as demonstrações não são inteiramente convincentes, mas que provavelmente satisfizeram os padrões de rigor da época.

As próximas seis proposições, também caracterizadas como lemas, abordam propriedades aritméticas de quadrados como todo quadrado tem a forma $3k$ ou $3k+1$ (Proposição V) e todo quadrado ímpar tem a forma $8q+1$ (Proposição VII). A Proposição VII tem dois corolários ("consequências") e cada uma das Proposições VIII e IX tem um. O primeiro corolário da Proposição VII afirma que a soma de dois quadrados ímpares não pode ser um quadrado. Isto implica de imediato que nenhum triângulo pitagórico pode ter dois catetos ímpares, ou, equivalentemente, todo triângulo pitagórico tem pelo menos um cateto par. No entanto, Frenicle não deduziu nenhuma consequência referente aos triângulos pitagóricos nestas proposições, preferindo abordar os triângulos só a partir da Proposição X.

Assim sendo, a Proposição X, a primeira que não é qualificada como um lema, é a primeira que trata dos triângulos pitagóricos e reza sobre as equações paramétricas dos babilônios. Segundo a referida proposição, dado dois números (inteiros positivos) desiguais quaisquer, o dobro do seu produto e a diferença dos seus quadrados serão os catetos e a soma dos seus quadrados será a hipotenusa de um triângulo pitagórico. A exposição é inteiramente retórica, mas é claramente equivalente à seguinte formulação algébrica: $(2mn,\ n^2-m^2, n^2+m^2)$ é um triângulo pitagórico sempre que n, $m \in \mathbf{N}$, com $n > m$. Visto que os elementos do terno são interpretados como distâncias, a condição que n seja maior do que m é necessária para garantir que n^2-m^2 seja positivo. Na formulação retórica de Frenicle, a referida condição é apenas dada implicitamente pela estipulação que os dois números dados sejam desiguais; não obstante é claramente subentendida. Frenicle dá duas demonstrações, uma geométrica e outra algébrica. No final da demonstração algébrica estipula que os números m e n serão chamados de *geradores* do referido triângulo e que o cateto correspondente a $2mn$ será chamado o *lado par*. Essa terminologia será usada mesmo quando todos os lados do triângulo são pares. Assim, seja $m = 2$ e $n = 4$. Então o triângulo gerado é (16, 12, 20), cujos lados são todos pares. Mesmo assim, $16 = 2\times2\times4$ é chamado o lado par.

Visto que já temos muita familiaridade com a formulação padrão atribuída aos babilônios, será interessante explicitar o que a formulação de Frenicle *não* afirma. Assim, não afirma que o resultado será primitivo, nem que todo triângulo pitagórico tenha a forma indicada (ou seja, que tenha geradores). Frenicle aborda a questão de triângulos primitivos mais adiante, mas, de fato, a segunda destas afirmações não é sempre verdadeira para triângulos compostos. No caso do triângulo 3(4, 3, 5) = (12, 9, 15), por exemplo, não há geradores, pois os sistema

$$
\begin{aligned}
&2mn=12\\
&n^2-m^2=9\\
&n^2+m^2=15
\end{aligned}
$$

não tem solução nos inteiros positivos. (Se permitisse números irracionais como geradores, $\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ seriam geradores.)

Há ainda um corolário à Proposição X que observa que sempre que um número c é a soma de dois quadrados, c será a hipotenusa de um triângulo pitagórico. Os catetos, é claro, serão dados pela diferença destes quadrados e o dobro do produto das suas raízes.

A Proposição XI, que também tem corolário, resolve o problema sobre a relação entre três quadrados em progressão aritmética e triângulos pitagóricos. Visto que isto já foi discutido, não será necessário acrescentar mais explicações aqui.

As próximas três proposições abordam questões sobre os geradores e os triângulos gerados, sendo que as duas últimas são munidas, cada uma, de um corolário. A mais importante destas é a Proposição XIV, que afirma que o triângulo gerado será pitagórico caso os geradores sejam (i.) coprimos e (ii.) de paridade diferente. As duas condições são necessárias, pois, caso os dois geradores fossem ímpares, mesmo sendo ímpares coprimos, todos os três lados do triângulo gerado seriam pares e, portanto, o mesmo não seria primitivo. Novamente, observamos que não é demonstrado aqui que todos os triângulos primitivos têm geradores; Frenicle ainda voltará a essa questão mais adiante no *Tratado*. Não obstante, mostrou já na Proposição XV que o universo de triângulos pitagóricos é exaurido pelos triângulos primitivos e os triângulos compostos.

As Proposições XVI a XVIII são lemas que estabelecem certas identidades algébricas úteis para a manipulação dos geradores. A primeira destes tem um corolário, enquanto a última tem dois. De fato, o primeiro corolário de Proposição XVIII afirma que a diferença entre quaisquer dois quadrados (de inteiros positivos) é, no mínimo, três. Disto, é quase de imediato de que o triângulo (3, 4, 5) é o menor triângulo pitagórico, no entanto Frenicle não afirmou isto aqui, preferindo voltar à questão mais adiante.

A Proposição XIX observa que todo triângulo primitivo consiste de um cateto par, um cateto ímpar e hipotenusa ímpar. Isto é feito em apoio da demonstração da Proposição XX que afirma que em todo triângulo pitagórico a hipotenusa é a soma de dois quadrados, enquanto seu cateto ímpar é a diferença destes mesmos quadrados. Isto é decerto óbvio das equações paramétricas babilônicas, mas, é claro, Frenicle não pode usar isto (Proposição X) na sua demonstração porque não levaria em conta a questão de existência. Assim, mostrou que, onde *c* é a hipotenusa e *b* o lado ímpar,

$x = \frac{c+b}{2}$ e $y = \frac{c-b}{2}$ são coprimos e que $x : y :: p^2 : q^2$, para algum p, q inteiros positivos. Isto implica que x e y são quadrados perfeitos, digamos n^2 *e* m^2 , respectivamente. A partir deste resultado, é fácil mostrar que n e m são os geradores do triângulo primitivo original e, portanto, todo triângulo primitivo tem geradores. Frenicle fez isto no primeiro corolário à Proposição XX. Num segundo corolário desenvolveu um critério para um triângulo ser primitivo – que a hipotenusa tenha a forma $4q+1$ – e num terceiro mostrou que o triângulo (3, 4, 5) é o menor triângulo pitagórico.

A próxima série de proposições, a saber, Proposições XXI a XXV, é dedicada a determinar quais proposições têm geradores. Mostra-se, em efeito, o seguinte resultado:

> Seja (x, y, z) um triângulo pitagórico. Então, (x, y, z) tem geradores se, e somente se,
>
> i. (x, y, z) é primitivo,
>
> ii. $(x, y, z) = k^2(a,b,c)$, com (a, b, c) primitivo,
>
> ou, iii. $(x, y, z) = 2k^2(a,b,c)$, com (a, b, c) primitivo.

Quando $k = 1$, caso (ii.) se reduz ao caso (i.) e caso (iii.) é duas vezes um primitivo. Ainda mais, se m e n, sendo coprimos e de paridade diferente, forem os geradores do triângulo primitivo (a, b, c), km e kn serão os geradores de $k^2(a,b,c)$ e, se m e n, sendo coprimos e ambos ímpares, forem os geradores do triângulo $2(a, b, c)$, onde (a, b, c) é primitivo, km e kn serão os geradores de $2k^2(a,b,c)$.

As Proposições XXVI a XXIX estabelecem fatos sobre a divisibilidade dos lados. Assim, em todo triângulo pitagórico, um dos catetos é divisível por 3, um (pode ser o mesmo) é divisível por 4 e um dos três lados é divisível por 5. Visto que 3, 4 e 5 são coprimos, isto acarreta o fato interessante de que em qualquer triângulo pitagórico, seja ele primitivo ou composto, o produto dos três lados é divisível pelo produto dos lados do menor triângulo pitagórico. No entanto, Frenicle não observou esse fato. Na Proposição XXX, ele mostra que a área de todo triângulo pitagórico é divisível por 6.

As próximas dez proposições giram em torno da existência, ou não, de triângulos pitagóricos satisfazendo certas condições, especialmente condições envolvendo alguma medida relacionada a quadrados perfeitos ou quadrados duplos (duas vezes um quadrado perfeito). Desta forma, a Proposição XXXIX garante que não existe triângulo pitagórico algum cuja área é um quadrado perfeito, enquanto a Proposição XL afirma que nenhum triângulo pitagórico tem área igual a um quadrado duplo. Várias destas proposições têm corolários, sendo que as Proposições XXXIX e XL têm muitos – quatro no caso desta e seis no caso daquela. Aqui Frenicle também abandonou seu procedimento usual de colocar os corolários logo depois das suas respectivas proposições, pois reuniu os corolários referentes a estas duas proposições e as colocou sequencialmente depois da Proposição XL.

O primeiro corolário da Proposição XL afirma que não existe triângulo pitagórico algum cujos catetos são ambos quadrados perfeitos. Pois, suponha que (x^2, y^2, z) fosse um triângulo pitagórico. Ora, pelo menos um dos catetos, digamos x^2, é par e, portanto, é divisível por 4. Assim, pondo $x^2=4q^2$, teríamos que a área do triângulo é $\frac{1}{2}x^2y^2 = \frac{1}{2}(4q^2)y^2 = 2(qy)^2$, ou seja, a área do triângulo seria um quadrado duplo, o que contradiz a Proposição XL. Disto, acarreta-se o segundo corolário: não existe qualquer terno de números inteiros positivos que satisfaçam a equação $x^4+y^4 =z^2$.

Novamente a demonstração é por redução ao absurdo, pois se houvesse um terno do referido tipo, (x^2, y^2, z) seria um triângulo pitagórico, contradizendo o primeiro corolário. Mas, agora o Último Teorema de Fermat é demonstrado para os casos especiais em que o expoente é um múltiplo de 4. Para ver isto, supomos que haja um terno de inteiros positivos que satisfaçam a equação $x^{4q}+y^{4q}=z^{4q}$. Então, (x^q, y^q, z^{2q}) satisfaria a equação $x^4+y^4=z^2$, o que contradiz o segundo corolário. Observamos ainda que o mesmo resultado pode ser obtido, através de um raciocínio estreitamente paralelo ao raciocínio aqui usado, a partir dos primeiros dois corolários de Proposição XXXIX. Frenicle não fez, no seu texto, menção do Último Teorema de Fermat, o que parece estranho se ele soubesse da ligação entre o Teorema e a sua Proposição XL, pois, embora o referido Teorema só fosse publicado muito depois do falecimento de Fermat em 1665, o mesmo circulava via correspondência entre a comunidade de matemáticos interessados na "aritmética". Na verdade, visto que as demonstrações das Proposições XXXIX e XL feitas por Frenicle utilizam uma técnica de demonstração inventada por Fermat e usada por ele para mostrar as mesmas duas proposições, bem como o caso especial do seu Teorema, Weil (1984) concluiu que o *Tratado*, que é uma publicação póstuma, foi inacabado quando seu autor faleceu.

Finalmente, a Proposição XLI do *Tratado* afirma que a soma ou diferença dos catetos de um triângulo primitivo sempre tem a forma $8q\pm1$. A demonstração é por casos, considerando que o gerador par pode ser ou parmente par ou imparmente par.

Conclusão

Do que foi apresentado, fica claro que o *Tratado* de Fenicle é uma tentativa de expor rigorosamente as principais propriedades de triângulos pitagóricos. Estabelece as equações paramétricas atribuídas aos babilônios, determina quais triângulos têm geradores e aponta para uma demonstração de um caso especial do Último Teorema de Fermat. Apesar de certas pequenas falhas dedutivas e algumas ambiguidades devidas à apresentação retórica do seu conteúdo, o *Tratado* alcance esses objetivos de forma convincente e agradável. Não mostra, no entanto, originalidade nem nos resultados apresentados nem nos métodos de demonstração empregados.

Referências

AUBRY, M. A. Notice sur l'arithméticien Frenicle. *In*: *Association Française pour L'avancement des Sciences, 42. Compte-rendu de la 42me Session. Notes et Mémoires*. Paris: 1914. Disponível em <gallica.bnf.fr/ask:/12148/bpt6k20178.r=Frenicle>. Acesso em 15/02/2010.

BAHIER, Eugène. *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles em nombres entiers*. Paris: Librairie Scientifique A. Hemann & Fils, 1916.

BAHIER, Eugène. *Investigação Sistemática dos Triângulos Retângulos em Números Inteiros*. Trad. Georgiane Amorim Silva & John A. Fossa. Natal: Editora da UFRN, 2017.

DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*. V. II (Diophantine Analysis). New York: Chelsea, 1952.

FRENICLE de Bessy, Bernard. *Tratado sobre Triângulos Retângulos em Números Inteiros*. Tradução e comentário de John A. Fossa. 2014.

ERICKSON, Glenn W.; FOSSA, John A. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia Platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2006.

FOSSA, J. A. As conseqüências da conseqüência: uma investigação histórico-filosófica de demonstração matemática. In: Iran Abreu Mendes e Miguel Chaquiam (Eds.). *Anais do VIII Seminário Nacional de História da Matemática*. Belém: 2010a.

______. *Os Primórdios da Teoria dos Números*. Natal: Editora da UFRN, 2010b. [Duas volumes.]

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. Bernard Frenicle de Bessy. 2000. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frenicle_de_Bessy.html> Acesso em 15/02/2010.

PYCIOR, Helena M. *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

TATTERSALL, James J. *Elementary Number Theory in Nine Chapters*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

WEIL, André. *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre*. Boston: Birkhäuser, 1984.

6

O Primeiro Trabalho de Euler sobre Equações Diofantinas

Joice de Andrade Dantas
John A. Fossa

O matemático suíço, Leonhard Euler (1707-1783), foi aluno do mais importante matemático[1] da sua época, Johann Bernoulli (1667-1748). Seria destinado, no entanto, a não somente superar seu próprio mestre, mas também a se tornar, na frase feliz de Laplace[2], o mestre de todos nós. Atuou, de 1727 a 1741, na nova Academia de São Petersburgo, de 1741 a 1766, na Academia de Berlim e, de 1766 a 1783, de volta à Academia de São Petersburgo. Embora estivesse

1 Isto era, pelo menos, o juízo feito na época. Observamos que, embora seu rival Isaac Newton tenha vivido até 1727, já estava bastante idoso no período em que Bernoulli atuava e não produzia matemática nova.

2 Pierre Simon, Marquis de Laplace (1749-1827). Para mais sobre esse *bon mot*, ver, por exemplo, Dunham (1999).

bastante ativo no gerenciamento dessas duas instituições, sua atividade principal foi na pesquisa matemática. Publicou mais do que oitocentos trabalhos especializados sobre várias áreas dessa ciência, chegando a ser um dos matemáticos mais produtivos de todos os tempos[3].

Como já indicamos, Euler foi inovador em várias subáreas da Matemática. Em especial, se interessou pela Teoria dos Números numa época em que esse ramo da ciência não era reconhecido como uma área de pesquisa matemática. Instigado, contudo, por alguns questionamentos de Bernoulli e, especialmente, Christian Goldbach (1690-1764), utilizou métodos algébricos para resolver problemas da Teoria dos Números, o que lhe permitiu generalizar e sistematizar os seus resultados e, em consequência, assentar as bases da mesma como uma verdadeira teoria matemática.

Dentro da própria Teoria dos Números, encontra-se o estudo de equações com coeficientes inteiros e a restrição de que as soluções também sejam números inteiros. Esse estudo é chamado o de Equações Diofantinas, pois a sua investigação[4] remonta ao matemático grego Diofanto de Alexandria (*fl.* século III ou IV). De fato, a equação diofantina mais famosa talvez seja a particularização do Teorema de Pitágoras, ou seja, $a^2+b^2 = c^2$, com a, b, c, inteiros positivos e concebidos como os lados de um triângulo retângulo. A solução geral era, de fato, conhecida muito antes da época de Diofanto e poderá ser dada, de forma paramétrica, como $(a, b, c) = k(n^2-m^2, 2mn, n^2+m^2)$, onde k, m, n são inteiros positivos e m, n são coprimos, de paridade diferente com $n > m$.

3 Para mais detalhes da vida e obra de Euler, ver, por exemplo, Fellmann (2007).

4 Observamos, no entanto, que Diofanto frequentemente aceitava soluções racionais.

Euler tinha interesse nas equações diofantinas e escreveu vários artigos sobre esse assunto, sendo o primeiro[5], E29, o objeto de estudo do presente trabalho.

Sobre a Solução de Problemas Diofantinos

O trabalho E29, mencionado no parágrafo anterior[6], foi apresentado à Academia de São Petersburgo em 1733. Só foi publicado, no entanto, sob o título *De solutione problematum diophanteorum per números íntegros* ("Sobre a solução de problemas diofantinos por números inteiros"), na revista oficial dessa Academia, os *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, em 1738.

No referido artigo, Euler (1738, p. 176, tradução nossa) propõe "fazer a fórmula ax^2+bx+c igual a um número quadrado". Isto é, propõe achar as soluções, sempre no conjunto dos números inteiros, da equação $ax^2+bx+c = y^2$. Para tanto, sua estratégia geral é usar uma solução particular (x_0, y_0) para achar novas soluções. Observa ainda, no entanto, que a procura para a solução particular inicial pode ser problemática, pois nem toda equação da referida forma tem soluções no conjunto dos números inteiros. Dá, como exemplo, a fórmula $3x^2+2$, que não é um quadrado (inteiro) perfeito para qualquer valor inteiro de x. Embora não justifique a sua afirmação,

5 O historiador sueco da Matemática, Gustav Eneström (1856-1923), investigou 866 obras de Euler, incluindo seus livros, artigos científicos e parte da sua correspondência científica. Indexou essas obras segundo a ordem de produção, que, em alguns casos é bastante diferente da ordem de publicação, usando os números E1 (para a primeira) até E866 (para a última). Hoje, os mesmos são chamados os "números de Eneström" e são usados como um expediente conveniente para se referir às várias obras do Euler.

6 Ver Euler (1738) nas Referências do presente trabalho.

presumivelmente reporta-se ao fato de que nenhum quadrado perfeito tem a forma $3k+2$.

Para implementar a estratégia geral, uma vez encontrada uma solução inicial, Euler utiliza as soluções da equação de Pell associada à equação original. Isto é, considera as soluções da equação $q^2 = ap^2+1$. Curiosamente, foi o próprio Euler quem deu o nome "equação de Pell" a equações dessa forma, pois pensou que a solução geral das mesmas havia sido descoberta pelo matemático inglês John Pell (1611-1685). Nisso, entretanto, Euler se equivocou, pois Pell não parece ter dado uma contribuição importante à resolução do referido tipo de equação, embora relatasse sobre o trabalho de alguns dos seus contemporâneos nesse sentido, e, em qualquer caso, os matemáticos hindus, como Brahmagupta (século VII), já haviam dado a resolução completa da mesma pelo próprio método, substancialmente, dado por Euler (ver Fossa, 2010).

A Solução de Euler

Dado, então, um número n que faz com que ax^2+bx+c seja um quadrado perfeito com raiz m, $\alpha n+\beta+\gamma\sqrt{(an^2+bn+c)}$ também será um quadrado perfeito com raiz $\delta n+\varepsilon+\zeta\sqrt{(an^2+bn+c)}$. Para determinar os desconhecidos α, β, γ, δ e ζ, Euler desenvolve duas expressões para o polinômio, iguala os coeficientes de potências iguais e chega ao seguinte teorema (Euler, 1738, p. 177, tradução nossa):

> Se ax^2+bx+c é um quadrado para $x = n$, então também será um quadrado para $x = qn+\frac{bq - b}{2a}+p\sqrt{(an^2+bn+c)}$ e sua raiz será $apn+\frac{bp}{2}+q\sqrt{(an^2+bn+c)}$.

As quantidades p e q são obtidas a partir da equação de Pell. Foi ainda necessário acrescentar a condição de que bp seja divisível por 2 para garantir que as quantidades mencionadas no teorema sejam números inteiros.

Devido às restrições de espaço, não apresentaremos aqui os detalhes dos cálculos de Euler. No lugar disso, apresentaremos, na próxima seção do presente trabalho, um exemplo de uma equação resolvida pelo método proposto. Uma análise dos cálculos algébricos gerais pode ser achada em Dantas (2011). Antes de apresentar o referido exemplo, porém, observamos que novas soluções são encontradas por iterar o procedimento. Nas palavras do próprio Euler (1738, p. 178, tradução nossa):

> Desta maneira, portanto, do valor n dado para x, esse outro é achado: $qn+\frac{bq-b}{2a}+pm$, onde m é colocado no lugar de $\sqrt{(an^2+bn+c)}$. Da mesma forma, quando essa quantidade é tratada como n, isto é, quando $apn+\frac{bp}{2}+qm$ é tomado no lugar de m, encontra-se mais um valor que, substituído no lugar de x, satisfaz ao quesito, a saber, $2ap^2n+bp^2+2pqm+n$, e a raiz desse novo quadrado[7] será $2apq+bp-q+2ap^2m+m$. Tomamos agora aquele valor para n e este para m e obtemos um quarto valor para x que satisfaz ao quesito, a saber, $4ap^2qn+2bp^2q+4ap^3m+qn+\frac{b(q-1)}{2a}+3pm$ cuja raiz[8] será $4a^2p^3n+2bp^3+4ap^2qm+3apn+\frac{3bp}{2}+qm$

7 O primeiro termo dessa raiz deveria ser $2apqn$. O original parece ser erro de composição da revista.

8 O segundo termo dessa raiz deveria ser $2abp^3$. O original parece ser erro de composição da revista.

Desta forma, o método de Euler consiste em um procedimento recursivo para gerar novas soluções a partir das soluções já encontradas. Nesse sentido, ele apresenta uma tabela dos primeiros valores para x e m (raiz do quadrado), que reproduzimos como Figura 1.

	Valores ipſius x	Valores $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$
I.	n	m
II.	$qn+pm+\frac{b(q-1)}{2a}$	$apn+qm+\frac{bp}{2}$
III.	$2q^2n+2pqm+\frac{b(q^2-1)}{a}$ $-n$	$2apqn+2q^2m+bpq$ $-m$
IV.	$4q^3n+4pq^2m+\frac{b(4q^3-3q-1)}{2a}$ $-3qn-pm$	$4apq^2n+4q^3m+2bpq^2$ $-apn-3qm-\frac{bp}{2}$
V.	$8q^4n+8pq^3m+\frac{4bq^2(q^2-1)}{a}$ $-8q^2n-4pqm$ $+n$	$8apq^3n+8q^4m+4bpq^3$ $-4apqn-8q^2m-2bpq$ $+m$
	etc. etc.	etc.
	Huius progreſſionis haec eſt lex.	Huius progreſſionis haec eſt lex.
	term. quicunque A	E
	hunc ſequens B	F
	$2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$	$2qF-E$

Figura 1. Valores para x e m.
Fonte: Euler (1738, p. 179).

Como a Figura 1 mostra, os valores de x e m formam duas sequências que são dadas por recorrências. No caso dos valores de x, se A e B forem quais quer dois elementos consecutivos da sequência, o próximo será dado por $2q\text{B}-\text{A}+\frac{b(q-1)}{a}$. De forma semelhante, se E e F forem quaisquer dois valores consecutivos de m, o próximo será dado por $2q\text{F}-\text{E}$. A descoberta dessas relações simplifica substancialmente o procedimento para a produção de novas soluções.

Um Exemplo

Consideremos agora a equação $3x^2+5x+7$. A estratégia geral é achar, por tentativa e erro, uma solução particular da expressão quadrática e, em seguida, fazer com que $3p^2+1$ seja um quadrado perfeito ($= q^2$) com a condição de que 2 divide $5p$.

A busca da solução da expressão quadrática é resumida na Figura 2. Segundo a referida Figura e usando a notação de Euler, temos $n = 3$, $m = 7$.

x	$3x^2+5x+7$
1	15
2	29
3	$49 = 7^2$

Figura 2.

Com relação à equação de Pell $3p^2+1 = q^2$, podemos, nesse caso, encontrar uma solução facilmente por inspeção. Visto que 5 é ímpar, é necessário que p seja par. Assim, para $p = 2$, temos $3p^2+1 = 13$, que não é quadrado. Mas, para $p = 4$, temos $3p^2+1 = 49 = 7^2$. Assim, na notação de Euler, temos $m = 7$ e $q = 7$. O fato de termos $m = q$ é apenas uma coincidência.

Para achar uma segunda solução da equação, usamos a expressão

$$qn+\frac{bq-b}{2a}+pm,$$

onde, é claro, substituímos os seguintes valores: $a = 3$, $b = 5$, $m = 7$, $n = 3$, $p = 4$ e $q = 7$. Assim, temos

$$7\cdot 3+\frac{5\cdot 7-5}{2\cdot 3}+4\cdot 7=54.$$

Substituindo 54 por x na equação $3x^2+5x+7$, obtemos

$$\begin{aligned} 3\cdot 54^2+5\cdot 54+7 &= 8748+270+7 \\ &= 9025 \\ &= (95)^2. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos usar a fórmula fornecida por Euler para calcular diretamente a raiz do quadrado obtida pela segunda solução, a saber,

$$apn+\frac{bp}{2}+qm.$$

Basta substituir os já conhecidos valores de a, b, m, n, p e q. Esse procedimento nos dá

$$\begin{aligned} 3\cdot 4\cdot 3+\frac{5\cdot 4}{2}+7\cdot 7 &= 36+10+49 \\ &= 95. \end{aligned}$$

De qualquer forma, agora temos duas soluções, $x = 3$ e $x = 54$ que fazem com que a equação $3x^2+5x+7$ seja um quadrado perfeito, 7^2, no primeiro caso, e 95^2, no segundo. Para obter ainda mais soluções, poderíamos continuar substituindo os valores de a, b, m, n, p e q nas fórmulas apropriadas. No entanto, será muito mais fácil nos apropriar das relações de recursão dadas na Figura 1. Na exposição dessas relações, contudo, será expediente modificar a notação de Euler por usar índices para indicar as sucessivas soluções. Embora isso não seja um recurso encontrado no texto euleriano, seu uso facilitará tanto a apresentação, quanto a compreensão, da explanação.

Nesse sentido, então, usamos x_i para designar a i-ésima solução da equação $3x^2+5x+7$. Analogamente, pomos $3x_i^2+5x_i+7 = m_i^2$ para o valor da referida equação quando $x = x_i$ e, em consequência, m_i designa a raiz do i-ésimo quadrado. Dessa forma, os resultados já obtidos são designados da seguinte maneira: $x_1 = 3$, $m_1 = 7$ e $x_2 = 54$, $m_2 = 95$.

Para achar x_3, então, usamos a relação $2q\mathrm{B}-\mathrm{A}+\frac{b(q-1)}{a}$, onde $\mathrm{B}=x^2$ e $\mathrm{A}=x_1$.

Visto que, para o exemplo sob consideração, $2q=14$ e $\frac{b(q-1)}{a}=10$, a fórmula geral para a i+1-ésima solução, em termos das duas soluções precedentes, é, usando a nova notação,

$$x_{i+1} = 14x_i - x_{i-1} + 10.$$

Dessa forma, para x_3 temos

$$\begin{aligned} x_3 &= 14x_2 - x_1 + 10 \\ &= 14\cdot 54 - 3 + 10 \\ &= 763. \end{aligned}$$

Para achar m_3, usamos a relação $2q\mathrm{F}-\mathrm{E}$, onde $\mathrm{F} = m_2$ e $\mathrm{E} = m_1$.De forma análoga ao que foi feito no parágrafo anterior, a fórmula geral para raiz do i+1-ésimo quadrado, para o exemplo sob consideração, é

$$m_{i+1} = 14m_i - m_{i-1}.$$

Dessa forma, para m_3 temos

$$\begin{aligned} m_3 &= 14\cdot 95 - 7 \\ &= 1323. \end{aligned}$$

A Figura 3 lista os primeiros cinco valores dados pelo procedimento de Euler para valores de x que fazem a referida equação um quadrado perfeito; lista também o valor dos quadrados correspondentes, bem como suas raízes.

i	***x***	$3x_i^2 + 5x_i + 7$	m_i
1	3	49	7

2	54	9025	95
3	763	1750329	1323
4	10638	339554329	18427
5	148179	65871789025	256655

Figura 3. Valores para a equação $3x^2+5x+7$.

Euler ainda aborda a solução geral da equação de Pell, ilustrando o procedimento e apresentando uma tabela que lista o menor valor de p que faz ap^2+1 um quadrado perfeito (q^2) para cada valor de a de 2 até 68. A mesma é reproduzida na Figura 4.

a.	*p.*	*q.*	*a.*	*p.*	*q.*
2.	2.	3.	37.	12.	73
3.	1.	2.	38.	6.	37
5.	4.	9.	39.	4.	25
6.	2.	5.	40.	3.	19
7.	3.	8.	41.	320.	2049
8.	1.	3.	42.	2.	13
10.	6.	19.	43.	531.	3482
11.	3.	10.	44.	30.	199
12.	2.	7.	45.	24.	161
13.	180.	649.	46.	3588.	24335
14.	4.	15.	47.	7.	48
15.	1.	4.	48.	1.	7
17.	8.	33.	50.	14.	99
18.	4.	17.	51.	7.	50
19.	39.	170.	52.	90.	649
20.	2.	9.	53.	9100.	66249
21.	12.	55.	54.	66.	485
22.	42.	197.	55.	12.	89
23.	5.	24.	56.	2.	15
24.	1.	5.	57.	20.	151
26.	10.	51.	58.	2574.	19603
27.	5.	26.	59.	69.	530
28.	24.	127.	60.	4.	31
29.	1820.	9801.	61.	226153980.	1766319049
30.	2.	11.	62.	8.	63
31.	273.	1520.	63.	1.	8
32.	3.	17.	65.	16.	129
33.	4.	23.	66.	8.	65
34.	6.	35.	67.	5967.	4884-
35.	1	6.	68.	4.	33

Figura 4. Solução para a equação de Pell.
Fonte: Euler (1738, p. 184).

Conclusão

O artigo E29 (*De solutione problematum diophanteorum per números integros*) mostra que Euler se interessou, ainda muito jovem, por questões sobre a Teoria dos Números. Também revela *vária*s características típicas dos trabalhos dele, tais como a claridade de expressão, a preocupação com exemplos numéricos como um guia para a investigação e o desenvolvimento de métodos gerais. Há também outras questões abordadas no trabalho, como a da completude do procedimento e a investigação de vários subcasos. Para mais detalhes sobre essas questões, veja Dantas (2011).

Referências

DANTAS, Joice de Andrade. *Uma Análise Histórica e Matemática do Trabalho E29 de Leonhard Euler*. Dissertação de Mestrado. PPGEd da UFRN sob a orientação de Prof. John A. Fossa. Natal: 2011.

DUNHAM, William. *Euler: The Master of Us All*. Washington, D.C.: MAA, 1999.

EULER, Leonhard. De solutione problematum diophanteorum per números íntegros. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, v. 6, p. 175-188, 1738.

FELLMANN, Emil. *Leonhard Euler*. Tradução de Erika Gautschi & Walter Gautschi. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007.

FOSSA, John A. *Os Primórdios da Teoría dos Números*. Natal: EDUFRN, 2010.

7

Alguns Aspectos Históricos da Investigação de Leonhard Euler sobre os Números Pentagonais

Andreia Caroline da Silva Cota
John Andrew Fossa

O artigo *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium* ("Sobre as notáveis propriedades dos números pentagonais"), de Leonhard Euler (1707-1783), foi apresentado à Academia de São Petersburgo em 1775, época em que Euler se encontrava na então capital da Rússia pela segunda vez[1]. O referido trabalho, conhecido pelo número[2] de Eneström E542, só veio a ser publicado[3], no entanto, em 1780.

1 Eular estava em São Petersburgo de 1727 a 1741. De 1741 a 1766, estava em Berlim. Voltou a São Petersburgo em 1766 e lá permaneceu até seu falecimento em 1783.

2 Gustav Eneström (1856-1923) foi um historiador sueco da matemática que catalogou 866 trabalhos de Euler. Sua enumeração é uma tentativa de precisar a ordem de produção desses trabalhos. Em alguns casos, contudo, o ano de produção não é conhecido e, nesses casos, a designação do historiador sueco é apenas um *educated guess*.

3 Ver Euler (1780a).

Como seu título sugere, E542 aborda os números pentagonais, uma espécie de número figurado. Embora explicaremos o conceito de números figurados na próxima seção, observamos desde já que o mesmo foi conhecido na antiguidade. Euler, contudo, não se limitou a reproduzir o conceito dos antigos, pois, no referido artigo – o cúmulo do seu trabalho sobre esse assunto –, modificou a própria definição desses números e deduziu mais do que 30 propriedades. Várias dessas propriedades relacionam os números pentagonais com ramos mais modernos da Matemática. Aqui, privilegiaremos o seu trabalho sobre os números pentagonais e o que veio a ser chamado "o Teorema dos Números Pentagonais"; para mais detalhes sobre outros aspectos desse trabalho de Euler, veja Cota (2011).

Números Figurados

Os números figurados são, essencialmente, sequências de números que podem ser modelados por figuras geométricas. A modelação é feita através de pequenos seixos, ou outros materiais semelhantes, que estão dispostos na forma da figura em questão. Graficamente, os seixos podem ser representados, por exemplo, por pontos ou pequenos círculos. Os números triangulares, por exemplo, são modelados por triângulos equiláteros, conforme mostra a Figura 1. Observa-se que o número 1 inicia todas as sequências de números modelados por figuras regulares e, assim, poderá ser concebido como exemplares degenerados dessas figuras.

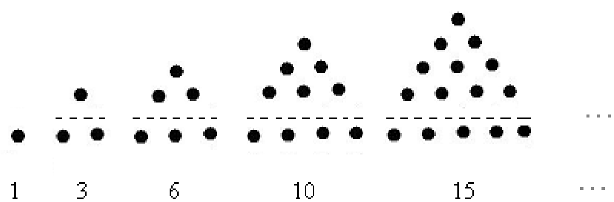


Figura 1. Segmento inicial dos números triangulares.

A parte abaixo da linha quebrada de cada número na Figura 1 é chamada o *gnomon*. Representa o que tem de ser acrescentado para obter o número a partir do seu predecessor. Podemos usar subscritos para representar os números algebricamente. Assim, convencionamos que t_n representa o n-ésimo elemento da sequência dos números triangulares. Desta forma, a relação entre qualquer número triangular e seu predecessor é dada por $t_{n+1} = t_n+n+1$. É também fácil mostrar que $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. O simbolismo adotado é, de fato, muito conveniente, no entanto, deve-se ressaltar que é um recurso que Euler não usava.

A Figura 2 mostra um segmento inicial da sequência dos números quadrados. Neste caso, o *gnomon* consiste em $2n–1$ seixos, pois $(n+1)^2–n^2 = 2n+1$. Usando s_n para representar o n-ésimo elemento da sequência, temos que $s_{n+1} = s_n+2n+1$. Pode-se mostrar facilmente a seguinte decomposição de números quadrados em números triangulares: $s_n = t_n+ t_{n–1}$.

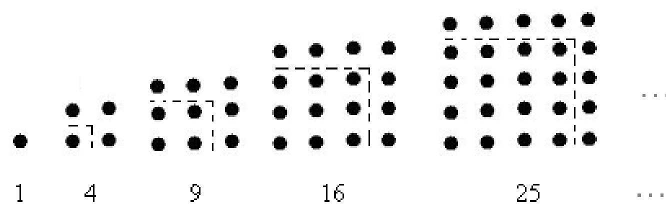


Figura 2. Segmento inicial dos números quadrados.

A Figura 3 mostra os cinco primeiros números pentagonais, destacando, em cada caso, seu *gnomon*. Não é difícil mostrar que o n-ésimo número pentagonal, p_n, é dado pela fórmula $p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$ e que o seu *gnomon* tem $3n–2$ seixos.

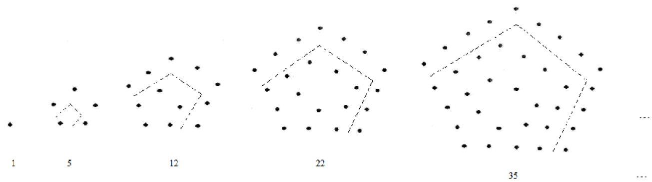


Figura 3. Segmento inicial dos números pentagonais.

A relação entre os números pentagonais e os números quadrados e triangulares pode ser visualizada de outra forma, ao dar um rearranjo aos seixos, como mostrado, para o caso de p_4, na Figura 4. A referida relação é sintetizada nas seguintes equações: $p_n = s_n + t_{n-1} = t_n + 2t_{n-1}$.

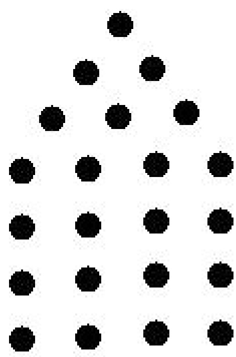


Figura 4. Representação alternativa de p_4.

Leonhard Euler e a Busca pelo Teorema dos Números Pentagonais

O Teorema dos Números Pentagonais, como veremos mais adiante, relaciona, de maneira surpreendente, o desenvolvimento do produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)$$

com os números pentagonais, ou melhor, com a ampliação que o próprio Euler fez desse tipo de número. Na presente seção, faremos um pequeno histórico do trabalho de Euler sobre o referido teorema até a elaboração de E542, seu último trabalho sobre o assunto.

Segundo Bell (2010), Euler provavelmente mencionou o teorema, embora ainda não soubesse demonstrá-lo, em algumas cartas ao Daniel Bernoulli (1700-1782). As cartas de Euler foram perdidas, mas a resposta de Bernoulli, no início de 1741, contém uma variante do referido teorema, o que poderá implicar que Euler havia abordado o mesmo em uma ou mais das cartas perdidas.

Seja como for, ainda em 1741, o trabalho E158, *Observationes analyticae variae de combinationibus* ("Várias observações analíticas sobre combinações"), foi apresentado à Academia de São Petersburgo. O ensaio, publicado[4] em 1751, contém uma formulação explícita do teorema, bem como a admissão de que ele ainda não sabia demonstrá-lo.

Em E158, Euler também deu a função geradora para o número de partições de um número natural, ou seja, o número de maneiras em que um número pode ser expresso pela adição de números naturais. As partições são relacionadas ao Teorema dos Números Pentagonais em duas cartas ao Nikolaus Bernoulli (1687-1759), escritas em 1742.

Durante o período de 1743 a 1746, Euler escreveu pelo menos três cartas a Christian Goldbach (1690-1764), nas quais o teorema foi discutido. A primeira contém uma formulação do mesmo e, mais uma vez, a confissão de que ainda não

4 Ver Euler (1751).

sabia como demonstrá-lo. Nas outras duas cartas, o teorema é mencionado no contexto da expansão de produtos infinitos. Ainda recomendou, numa carta escrita em 1747, o problema da demonstração do referido teorema ao matemático francês Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783).

Ainda em 1747, Euler mencionou o referido problema na sua correspondência com Goldbach e, finalmente, em 1750, mandou-lhe uma carta contendo uma demonstração do teorema. A demonstração é repetida em E244, *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum* ("Demonstração de um teorema sobre a ordem observada nas somas de divisores")[5]. Em E541, *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ *in seriem simplicem* (Expansão do produto infinito $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ em uma série simples")[6], apresentado à Academia de São Petersburgo em 1775 e publicado em 1780, Euler deu duas demonstrações do teorema, sendo uma delas a mesma, embora mais detalhada, que havia dado na carta ao Goldbach.

Finalmente, E542 faz uma apresentação sistemática da teoria euleriana dos números pentagonais, do Teorema dos Números Pentagonais e de várias propriedades conexas. A seguir, explanaremos alguns aspectos desse artigo.

A Expansão do Conceito de Números Pentagonais

Já vimos que os números pentagonais são dados pela fórmula $p_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$ e que podem ser representados em termos de

5 Ver Euler (1760).

6 Em republicações desse artigo, seu título é dado como *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ *etc. in seriem simplicem*. Que a palavra "etc." foi omitida do título original foi provavelmente um erro de composição gráfica. Ver Euler (1780b).

quadrados e triângulos da seguinte maneira: $p_n = s_n + t_{n-1} = t_n + 2t_{n-1}$. Em E542, no entanto, Euler explicou sua expansão do conceito de número pentagonal por conceber como pentagonais também os números dados por $p'_n = \dfrac{3n^2 + n}{2}$.

Isto dá a sequência 2, 7, 15, 26, 40, ... No referido artigo, Euler não justifica esse procedimento, o que imediatamente levanta a questão da sua legitimidade. Presumivelmente, é lícito, caso esses números possam ser dispostos, de alguma forma, como pentágonos. A Figura 5, usando uma disposição semelhante àquela usada na Figura 4, mostra como isso pode ser feito (com a exceção de p'_1). Observa-se, no entanto, que os pentágonos resultantes não são regulares.

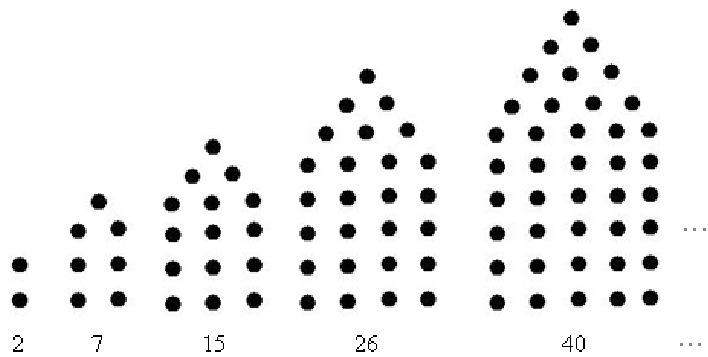


Figura 5. Segmento inicial dos novos números pentagonais.

Em termos algébricos, contudo, os novos números pentagonais são bastante análogos aos números pentagonais tradicionais, pois, como a Figura 5 sugere, $p'_n = s_n + t_n = 2t_n + t_{n-1}$ e isso vale até para p'_1. Assim sendo, pode-se concluir que é um procedimento razoável incluir os números p'_n entre os números pentagonais.

Feita a expansão do referido conceito, Euler os representou pela fórmula $\frac{3nn \mp n}{2}$ e os dispôs[7] em ordem crescente da seguinte maneira:

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, \ldots$$

O resultado parece ser bastante arbitrário, mas Euler observou que, após da interpolação de certas frações, feita da seguinte maneira

$$1, 2, \frac{10}{3}, 5, 7, \frac{28}{3}, 12, 15, \frac{55}{3}, 22, 26, \frac{91}{3}, 35, 40, \ldots$$

a sequência de diferenças,

$$\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$$

é formada por uma lei regular e, ainda mais, cada número pentagonal é três vezes um número triangular.

É fácil ver a verdade dessa proposição de Euler, pois, se a sequência interpolada é multiplicada por 3, a sequência das diferenças se torna a sequência dos números naturais, ou seja, os *gnomon* dos números triangulares[8]. Deve-se observar, porém, que $3t_n$ nem sempre é um número pentagonal. Não será pentagonal, de fato, sempre que $n = 3k+1$, ou seja, exatamente nos lugares das frações interpoladas por Euler.

Observa-se ainda que três vezes um número pentagonal (tanto p_n quanto p'_n) é um número triangular. Isso pode ser visto algebricamente, pois $3\frac{3nn \mp n}{2} = \frac{3n(3n \mp 1)}{2}$ e, fazendo

7 Às vezes incluiu o zero.

8 Observe que é necessário acrescentar t_1.

uma troca de variáveis (num caso $3n = m+1$ e, noutro, $3n = m$), obtemos a fórmula para os números triangulares, a saber, $\frac{m(m+1)}{2}$. De fato, três vezes a sequência interpolada é a sequência dos números triangulares.

O Teorema dos Números Pentagonais

Voltamos agora para o produto infinito mencionado anteriormente, que foi dado por Euler como:

$$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \ldots$$

Depois de ter achado um segmento inicial desse produto por multiplicação direta – Weil (2001) afirma que fez a multiplicação de, pelo menos, os primeiros 51 fatores –, ele se convenceu que S fosse igual a seguinte série infinita:

$$S = 1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}- \ldots$$

Observa-se que, na referida série, os expoentes da variável são exatamente os números pentagonais eulerianos. O sinal, que alterna de dois em dois termos, é negativo quando o expoente é igual a p_n (ou p'_n) e n é ímpar; é positivo quando o expoente é igual a p_n (ou p'_n) e n é par. Esse resultado é o Teorema dos Números Pentagonais.

A demonstração que Euler fez, na referida carta ao Goldbach e em E541, para o teorema depende do seguinte lema:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) \ldots = 1-\alpha-\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)-\delta(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)- \ldots$$

A segunda demonstração, dada em E541, é feita por indução. Para mais detalhes, ver Cota (2011).

Conclusão

O Teorema dos Números Pentagonais foi um tema sobre o qual Leonhard Euler se preocupou durante pelo menos 35 anos, de 1740 a 1775. Durante esse período ele expandiu o conceito dos números pentagonais – o que lhe permitiu formular o teorema –, desenvolveu cálculos numéricos – que o convenceram da sua validade – e forneceu duas demonstrações para o teorema. As demonstrações se encontram em E541. Finalmente, no E542, ele complementou seu trabalho na obra anterior, eliciando mais do que trinta proposições sobre a sequência dos números pentagonais e o referido teorema. Em especial, relacionou esses assuntos às raízes da unidade, à Teoria de Partições de um número natural e ao que seria eventualmente desenvolvido como a Teoria das Funções Elípticas Modulares. A fecundidade do resultado é mais uma ilustração da sagacidade da tão comentada intuição matemática de Euler, bem como a sua tenacidade na procura e na justificativa de verdades matemáticas.

Referências

BELL, Jordan. A Summary of Euler's Work on the Pentagonal Number Theorem. <http://individual.utoronto.ca/jordanbell/pentagonal.pdf>. Acesso em 07/02/2010.

COTA, Andreia Caroline da Silva. *Euler e os Números Pentagonais*. Dissertação de Mestrado. PPGECNM da UFRN sob a orientação de Prof. John A. Fossa. Natal: 2011.

EULER, Leonhard. De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae*. p. 56-75. 1780a.

______. Evolutio producti infiniti $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ in seriem simplicem. *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae*. p. 56-75. 1780b.

______. Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5, p. 75-83, 1760.

______. Observationes analyticae variae de combinationibus. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 13, p. 64-93, 1751.

WEIL, André. *Number Theory: An approach through history from Hammurapi to Legendre.* Boston: Birkhäuser, 2001.

8

E798: o Último Trabalho de Euler sobre Números Amigáveis?

John A. Fossa
Sarah Mara Silva Leôncio

Em 1913 o matemático sueco, Gustav Eneström (1852-1923) publicou um estudo bibliográfico sobre a obra de Leonhard Euler. Neste estudo, Eneström listou 866 itens da autoria de Euler pela ordem de publicação, o que tem fornecido aos historiadores da matemática uma maneira muito conveniente de especificar os trabalhos de Euler. De fato, a referida enumeração é especialmente útil no caso que será abordado aqui, os artigos eulerianos sobre números amigáveis, pois trata-se de três artigos tendo o mesmo título, a saber, *De numeris amicabilibus* (Sobre números amigáveis). O primeiro destes artigos homônimos foi publicado em 1747 na revista *Nova Acta Eruditorum* e recebeu o número E100. O artigo consiste de apenas uma página e meia, mas lista trinta pares de números amigáveis. O segundo artigo, que recebeu o número E152, foi publicado em volume dois de um conjunto de três livros, conhecidos coletivamente pelo título *Opuscula varii argumenti*, em 1750. É um artigo comprido (tem mais que 80 páginas), que detalha os métodos que Euler usou para achar números amigáveis e contém um "catálogo" de 61 pares. Finalmente, o terceiro artigo, inacabado e não publicado por Euler, foi publicado postumamente em 1849 no volume dois da coletânea *Commentationes arithmeticae*, recebendo o número E798.

Infelizmente, os números de Eneström, que, como já mencionamos, indicam a ordem de publicação, criam uma presunção sobre a ordem de composição, embora as duas ordens sejam independentes. Assim, Ed Sandifer (2005), embora sua formulação seja formalmente neutra, nos leva a crer que E798 foi o último dos três a ser composto. Dominic Klyve, Lee Stemkoski e Erik Tou (2011), no entanto, dizem explicitamente que E798 foi uma retomada de seu trabalho anterior sobre os números amigáveis. Não obstante, Eneström (2004, originalmente 1913) afirmou que E798 foi lido à Academia de Berlim em 1747 e que E152 é "obviamente" uma nova versão de E798.

No presente trabalho, apresentaremos evidência interna ao E798 que apoia a conclusão de Eneström.

Números Amigáveis

Antes de prosseguir para E798, porém, será interessante definir o conceito de números amigáveis e caracterizar o estado da pesquisa sobre esse tipo de número na época de Euler.

Números amigáveis são, então, pares de números (m, n) tais que a soma dos divisores próprios ("partes alíquotas", na terminologia mais antiga) de cada um é igual ao outro; ou seja, a soma dos divisores próprios de m é igual a n e a soma dos divisores próprios de n é igual a m. O menor par de números amigáveis é (220, 284), um fato demonstrado pelo matemático holandês Frans van Schooten (1615-1660) no seu livro Schooten (1657). Com efeito, temos

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$$
$$1+2+4+71+142 = 220.$$

Visto que números amigáveis tendam a ser relativamente grandes, é muito inconveniente investigá-los através do cálculo explícito dos divisores. Assim, lançamos mão à função $\sigma(n)$ = a soma dos divisores (positivos) de n, que tem as seguintes propriedades:

Para p primo, $\sigma(p)=p+1$.

Para p primo, $\sigma(p^k)= \dfrac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$

Para p, q primos entre si, $\sigma(p \cdot q)=\sigma(p) \cdot \sigma(q)$

A facilidade da função fica aparente quando decompomos o número em fatores primos, separamos o produto em partes pela terceira propriedade e avaliamos cada parte usando as primeiras duas propriedades. No entanto, ao usar essa função para achar a soma dos divisores próprios, precisamos diminuir a soma pelo divisor impróprio; isto é, a soma dos divisores próprios de n é $\sigma(n)-n$.

$$\sigma(220) = \sigma(2^2 \cdot 5 \cdot 11) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(5) \cdot \sigma(11) = 7 \cdot 6 \cdot 12 = 504,$$
$$\text{assim, } \sigma(220)-220 = 504-220 = 284;$$
$$\sigma(284) = \sigma(2^2 \cdot 71) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(71) = 7 \cdot 72 = 504,$$
$$\text{assim, } \sigma(284) - 284 = 504 - 284 = 220$$

No exemplo, temos que a soma dos divisores de cada elemento do par é igual à soma dos próprios números. Isto é verdadeiro em geral, pois se (m, n) for um par de números amigáveis, teremos

$$\sigma(m) - m = n$$
$$\sigma(n) - n = m$$
$$\text{logo, } \sigma(m) = \sigma(n) = m + n.$$

O já mencionado par, (220, 284) era conhecido na antiguidade pelos pitagóricos. Aparentemente eles não descobriram qualquer outro par. Sabemos hoje que Thabit ibn Qurra (836-901), trabalhando em Bagdá desenvolveu um método para descobrir esse tipo de número, que pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\text{Sejam } x = 3 \cdot 2^n - 1,$$
$$y = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,$$
$$z = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1.$$

Então, sempre que x, y e z são números primos, $(2^n xy, 2^n z)$ é um par de números amigáveis.

Para $n = 2$, obtemos (220, 284), enquanto obtemos, para $n = 4$, o par (17296, 18416) e, para $n = 7$, o par (9363584, 9437056). Fossa (2017) argumenta que Thabit conheceu esses três pares. Mesmo assim, o trabalho de Thabit não foi conhecido pelos europeus dos séculos XVII e XVIII e seu método foi redescoberto por Pierre de Fermat (1601-1665) e, posteriormente, René Descartes (1596-1650). Fermat deu o segundo destes pares e Descartes o terceiro. Assim, na época de Euler somente três pares de números amigáveis foram conhecidos e achar outros conferiria muito prestígio ao descobridor. Mesmo assim, nenhum outro par era achado antes de 1747, quando

Euler apresentou seu trabalho sobre o assunto. A única novidade, de fato, foi a utilização de métodos algébricos, em vez de aritméticos, por van Schooten. Embora isto não ocasionasse a descoberta de novos números amigáveis, poderia ter inspirado Euler, pois ele conhecia o livro deste matemático holandês.

Evidência para a Inversão da Ordem de Composição

Apresentaremos agora alguns aspectos do artigo E798 que apoiam a tese de que este foi o primeiro, e não o último, artigo que Euler escreveu sobre números amigáveis. A estas considerações, prefixaremos uma pequena apreciação sobre o pronunciamento de Jacobi.

1. *O pronunciamento de Jacobi.*

Como já vimos, o matemático alemão Carl G. J. Jacobi, segundo Eneström (2004), relatou que E798 foi lido na Academia de Berlim em 1747. De fato, ele até deu a data exata como sendo o dia 23 de fevereiro daquele ano. No entanto, visto que Jacobi só nasceu em 1804 (faleceu em 1851), ele certamente não estava presente no momento da leitura. Isto abre a possibilidade de que o artigo lido fosse ou E100 ou E152, pois todos os três artigos têm o mesmo título, o que poderia ter ocasionado alguma confusão no julgamento de Jacobi. Em qualquer caso, o relato depende da investigação que Jacobi fez da documentação contida na Academia, mas não sabemos se a referida documentação foi suficientemente explícita para informar uma conclusão precisa. Caso só contivesse o título, por exemplo, a conclusão seria apressada, enquanto se também contivesse o número de páginas do artigo lido, a conclusão seria mais acertada. Infelizmente, não dispomos destes dados e, portanto, não podemos avaliar efetivamente o pronunciamento de Jacobi. Não obstante, o fato de que seu relato também contém a informação de que o manuscrito foi achado no arquivo da Academia é evidência *prima facie* a favor, da conclusão de Jacobi e, portanto, podemos aceitá-la, pelo menos provisoriamente, como sendo provável.

2. *A natureza inacabada do artigo.*

De fato, E798 não contém uma tabela que é mencionada no texto como constando num anexo. Com essa exceção, o artigo poderia ter sido apresentado à Academia na sua forma atual. Na verdade, no último parágrafo, Euler disse que nele iria apresentar um último exemplo e a linguagem no final do parágrafo é consistente com um fechamento para o artigo. Observamos ainda, em relação ao anexo ausente, que, se Euler decidisse não publicar o artigo (ver a Conclusão do presente trabalho), ele presumivelmente teria retirado a tabela de E798 para incluí-la em E152.

3. *Os pares contidos em E798.*

Observamos que E798 só contém onze pares de números amigáveis, incluindo, entre estes, os três pares já conhecidos antes de 1747. Todos os onze pares constam na lista dos trinta pares contida em E100. Assim, vemos um aumento nítido entre os pares apresentados nos três trabalhos: E798 contém 11, enquanto E100 e E152 contêm, respectivamente, 30 e 62 pares. Isto, apesar de uns detalhes (ver Fossa, no prelo) que não são significantes para nossa questão, é consoante com a seguinte ordem de composição: E798, E100, E152.

4. *Abordagem geral de E798.*

A abordagem adotada por Euler em E798 é muito mais geral do que a abordagem utilizada em E152. Isto complica os cálculos porque é muito difícil de especificar as condições que eliminariam cálculos desnecessários. Isto necessita a investigação de muitos casos que não produzem pares de números amigáveis e, consequentemente, aumenta a quantidade de esforços empregados em vão. Em E152, em contraste, Euler desenvolveu estratégias específicas que dependem da forma algébrica do par a ser procurado, o que torna a busca numérica muito mais eficaz.

5. *Ausência de notação funcional.*

Em ambos os artigos E798 e E152 Euler usou a função soma de divisores que apresentamos na seção anterior através da notação moderna $\sigma(n)$ e mostra, em efeito, que a mesma é uma função multiplicativa. A notação usada em E798, no entanto, é estreitamente algébrica, pois adota, para a soma dos divisores de n, o símbolo N. Para as manipulações algébricas, isto não acarreta maiores problemas. A busca para números amigáveis, contudo, consiste em uma caracterização algébrica inicial seguida por intensivos cálculos numéricos. Esses cálculos numéricos são dificultados pela notação algébrica e, de fato, os exemplos dados por Euler em E798 não são muito ilustrativos. Em E152, em contraste, Euler adotou uma notação funcional, pois usou $\int n$ para representar a soma dos divisores de n. A notação funcional lhe permitiu apresentar todos os detalhes dos cálculos numéricos, o que resultou num texto muito mais claro e preciso.

Quando consideramos as características de E798 que acabamos de expor, estamos levados a abandonar a ideia de que E798 era uma retomada de E152. De fato, as referidas características, tomadas em conjunto, mostram que E152 é um trabalho mais sofisticado e eficaz, tanto matematicamente, quanto literariamente, e, portanto, é provável que E152 era uma reformulação mais profunda do trabalho iniciado em E798. Em contraste, a estes artigos, E100 é apenas uma nota sobre trabalho em andamento.

Conclusão

Quando juntamos às características expostas na seção anterior o pronunciamento de Jacobi sobre E798, parece bastante provável – embora, como deve ser claro, não definitivamente comprovado – que a ordem de composição dos três artigos homônimos de Euler sobre números amigáveis era a seguinte: E798, E100, E152.

Há, de fato, muitas possibilidades sobre como isto transpirou. Em conclusão, gostaríamos de sugerir uma possibilidade que também solucionaria uma questão de Sandifer (2005), que observou que E100 é muito atípico dos trabalhos de Euler, pois não dá indicação alguma do procedimento usado para obter seus resultados. Na verdade, Sandifer até disse que ele não podia achar qualquer explicação convincente para a "obscuridade" de Euler sobre seus métodos em E100.

Ora, se E100 fosse o primeiro artigo de Euler sobre os números amigáveis, o questionamento de Sandifer seria procedente. Mas, agora que temos a forte possibilidade de que foi E798 que foi o primeiro, a situação muda. Euler teria comunicado E798 à Academia de Berlim em fevereiro de 1747. De certa forma, a comunicação teria sido um golpe de audácia, pois o prestigioso problema sobre números amigáveis havia resistido novas soluções por muito tempo e Euler, no artigo, apresentou de uma só vez oito novos pares além dos três já conhecidos. Isto certamente garantiria sua publicação logo e, de fato, E100 foi publico em maio do mesmo ano.

Assim, é provável que entre fevereiro e maio Euler começou a desenvolver os novos métodos que lhe permitiriam achar mais pares de forma mais fácil. Desta maneira, ficou aborrecido com as sérias falhas (em comparação com a nova abordagem) de E798 e o retirou de publicação. Visto que já havia achado novos pares e que não havia tempo para elaborar um novo texto, ele escreveu a nota E100, contendo agora 27 novos pares e submeteu a mesma para ser publicada no lugar de E798. É possível que até houvesse um elemento de soberba neste todo, pois Euler certamente poderia orgulhar-se da sua façanha, mas isto não parece muito consoante com sua personalidade. Em qualquer caso, teria sido necessário publicar algo em pouco tempo sobre o assunto, dada a apresentação de E798, e a nota E100 teria sido uma saída satisfatória, não somente no sentido de responder ao imperativo da publicação iminente, mas também no sentido de lhe proporcionar o tempo necessário para escrever o mais sofisticado E152.

Referências

ENESTRÖM, Gustav. Euler's Work Organized Chronologically by Date of Publication. Trans. de Greta Perl. 2004. Disponível em <www.math.dartmouth.edu/~euler>. Acesso em 04/02/2013.

EULER, Leonhard. De numeris amicabilibus.*Nova acta eruditorum*, 1747, maio, p. 267-269. [E100.]

______. De numeris amicabilibus. *Opuscula varii argumenti*, 1750, v. 2, p. 23-107. [E152.]

______. De numeris amicabilibus. In *Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae*. P. H. Fuss & Nicolaus Fuss (Eds.), q.v., p. 627-636.

FOSSA, John A. Introdução à História dos Números Amigáveis. In: Leonhard EULER. *Sobre Números Amigáveis*. Trad. de Sarah Mara Silva Leôncio, John A. Fossa e Fabrício Possebon. Comentário de John A. Fossa. Natal: Editora da UFRN, 2017.

KLYVE, Dominic, Lee STEMKOSKI e Erik TOU. The Euler Archive. 2011. Disponível em <www.math.dartmouth.edu/~euler>. Acesso em 04/02/2013.

SANDIFER, Ed. Amicable numbers. 2005. Disponível em: <www.maa.org/news/howeulerdidit>. Acesso em 04/02/2013.

SCHOOTEN, Francisci à. *Exercitationum mathematicarum libri quinque*. Leydensis [Leiden (Holanda)]: Johandis Elsevirii, 1657.

9

A Janela Face de Jano: História da Matemática e Ciências afins nos Dicionários de Hutton

John A. Fossa

Todo documento histórico é, de certo modo, uma janela para o passado. Ao ler o documento, podemos decifrar, com certas limitações, o conhecimento que ele encerra e compará-lo com os conhecimentos anterior e posterior; além disto, a leitura pode revelar as atitudes do autor e até algumas das atitudes sociais inerentes na cultura ao qual o autor pertence. O documento *A Mathematical and Philosophical Dictionary*, de Charles Hutton, não é diferente nesse respeito. De fato, visto que a obra reza sobre a matemática e as ciências matemáticas, ela pode revelar aspectos, tanto cognoscíveis, quanto atinentes às atitudes, dessas ciências na época da sua publicação (fim do século XVIII e início do século XIX).

A janela da história, contudo, não somente nos permite olhar para fora, isto é, na direção do passado, mas também admite relances para dentro, isto é na direção da, por assim dizer, alma do historiador. Neste sentido, o referido *Dicionário* de Hutton carrega consigo um fator complicador, pois inclui artigos sobre a própria História da Matemática. Assim, em vez da relação bipolar passado/historiador, temos, ao lidar com esse documento, a seguinte relação tripolar: passado / historiador passado / historiador contemporâneo. Talvez isto de fato não implique em problemáticas muito diferentes das que geralmente aparecem na investigação histórica, mas torna-as mais evidentes.

As complicações, no entanto, não chegaram ao fim. Isto acontece porque não existe apenas uma versão do referido *Dicionário*, mas sim três. O primeiro é a versão original de Hutton. A segunda é uma versão abreviada, preparada, não pelo próprio Hutton, mas por seu protegido, Peter Barlow. Finalmente, Hutton, no ano seguinte da publicação da versão de Barlow, trouxe à luz uma segunda edição, revisada e ampliada, da obra original.

Face todas essas fatores complicadores, não ensaiaremos uma análise definitiva do que podemos rotular "os três *Dicionários* de Hutton". Antes, queremos apenas exemplificar as duas maneiras – a saber, como indicador do estado de desenvolvimento da matemática na época de Hutton e como história explícita (especialmente em relação a biografias) da parte desse autor – em que a História da Matemática se configura neles e como se interagem nas três versões. Primeiramente, contudo, prefixaremos algumas palavras sobre a natureza do conhecimento histórico a fim de indicar como nos vemos como participante dessa multifacetada atividade humana e, em seguida, apresentaremos os dois autores e as suas referidas versões do *Dicionário* a fim de contextualizar a exemplificação proposta.

O Paradoxo de Jano

O deus romano Jano (*Ianus*) deveria ter apresentado um pequeno paradoxo aos seus antigos seguidores, pois olha, ao mesmo tempo, tanto para o futuro, quanto para o passado.

Num golpe severo de lógica, porém, os antigos aparentemente resolveram o paradoxo por dar à sua divindade duas faces, uma para cada direção. A resolução é, de fato, apenas aparente, uma maneira metafórica não de resolvê-lo, mas de conviver com ele. Há, decerto, os que abandonam essa tentativa de convivência: por um lado, o antiquário, que se mergulha no passado e, por outro, o tecnocrata, que se imersa em suas novidades. Mas, o homem, na verdade, é uma *imago dei*, precariamente equilibrado num presente fugaz, mas constituído pelo seu passado, enquanto projetado para seu futuro. Assim, talvez seria bem frutífero, em pelo menos algumas situações, compreender o homem como o lugar onde paradoxo ocorre, ou seja, como o ser que sustenta paradoxo. De fato, ao se constituir como *imago Iani*, o homem também sustenta a fábrica do tempo como constituinte do seu mundo.

Dentro de um contexto mais lato, o paradoxo toma as feições do debate realismo vs. idealismo e, em termos científicos, surpreende-se com os inesperados limites impostos no conhecimento, tanto pela teoria geral da relatividade, quanto pela teoria quântica, bem como – o mais surpreendente de todos! – pela lógica. Mais relevante para os nossos propósitos, porém, é sua manifestação no campo de história. F. R. Ankersmit (1989, p. 145-146), por exemplo, contrasta o "historiador modernista" com o "historiador pós-modernista" da seguinte forma:

> The modernist historian follows a line of reasoning from his sources and evidence to an historical reality hidden behind the sources. On the other hand, in the postmodernist view, evidence does not point towards the *past* but to other *interpretations* of the past; for that is what we in fact use evidence for. To express this by means of imagery: for the modernist, the evidence is a tile which he

> picks up to see what is underneath it; for the postmodernist, on the other hand, it is a tile which he steps on in order to move on to other tiles: horizontality instead of verticality.

Para continuar a metáfora de Ankersmit, do ponto de vista do historiador pós-moderno, o historiador moderno não sai do lugar, enquanto, do ponto de vista do historiador moderno, o historiador pós-moderno nunca chega a lugar algum. Sendo a metáfora posta nesses termos negativos, vemos que todas as duas alternativas são insustentáveis. São, de fato, insustentáveis porque não levam em conta a natureza paradoxal do conhecimento humano em geral e, em consequência, do conhecimento histórico em particular.

Ao evitar as duas posições insustentáveis, no entanto, estamos jogados numa situação aparentemente tão incômoda quanto as posições evitadas. Pois, precisamos aceitar o homem como constituinte de um conhecimento que se impõe como sendo verdadeiro de uma forma independente dessa constituição. Isto é, o homem é a *imago Iani* que sustenta uma realidade independente. Isto será importante para nós, pois o tema do presente trabalho é a história presente numa obra histórica, sobre a qual faremos avaliações críticas.

Hutton e Barlow

Antes, porém, de passarmos para uma análise dos dicionários a serem investigados, será interessante fazer um pequeno retrato da vida e obra dos seus autores.

Charles Hutton[1] (ver a Figura 1) nasceu em 1737 em Newcastle no norte da Inglaterra. Seu pai e irmãos trabalha-

1 As informações biográficas sobre Hutton são retiradas de O'Connor e Robertson (2002).

vam numa mina de carvão, ofício que ele também certamente teria seguido se não fosse por um ferimento que recebeu quando ainda criança. O acontecimento deixou sequelas que o incapacitaram para o serviço nas minas e, em consequência, foi mandado para a escola. Neste empreendimento Hutton teve muito sucesso, chegando a abrir sua própria escolha quando teve apenas 23 anos de idade. Ao mesmo tempo, agiu como professor particular para certos filhos de nobres da região e a estima que os mesmos tiveram para Hutton lhe rendeu a preferência deles em relação a sua carreira.

Figura 1. Charles Hutton.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008b).

Foi, de fato, com o apoio de alguns ex-alunos que Hutton começou a publicar livros textos de matemática, que foram, por sinal, bem recebidos, e a desenvolver projetos para o município de Newcastle. Animado ainda pelos ex-alunos, fez um concurso para a posição de professor de matemática da Academia Militar Real de Woolwich, situado um pouco ao sudeste de Londres[2]. Foi o primeiro colocado nas provas e, assim, assumiu o posto em 1773, nele ficando até sua aposentadoria em 1807, aos 70 anos de idade. Nesse mesmo ano de 1773, tornou-se editor da revista *Ladies' Diary*, o que lhe proporcionou a oportunidade de promover vários jovens matematicamente talentosos.

Em 1774, ingressou na Sociedade Real e publicou muitos artigos nas *Philosophical Transactions* desta Sociedade, sendo que para um deles, "The force of fired gunpower and the velocity of Cannon balls", recebeu a prestigiosa Medalha de Copley da Sociedade Real. Enquanto publicava artigos e tratados que abordavam, em geral, a matemática aplicada, continuava a escrever livros textos muito apreciados. Sua obra mais cotada, no entanto, foi *A Mathematical and Philosophical Dictionary*, que descreveremos mais adiante.

Hutton veio a falecer em 1823.

Peter Barlow[3] (ver a Figura 2) nasceu em 1776 em Norwich, no leste da Inglaterra. Autodidata, Barlow publicou vários artigos matemáticos na *Ladies' Diary* e, em consequência, atraiu a atenção de Hutton, que o trouxe para Woolwich como seu assistente em 1801. Posteriormente, foi contratado como professor. Publicou vários artigos para enciclopédias, o primeiro tratado sobre a Teoria dos Números em inglês, um bem acolhido livro de tabelas matemáticas e uma versão abreviada do *Dictionary* de Hutton.

---

2 Devido ao crescimento da capital britânica, Woolwich foi incorporado à cidade de Londres em 1889.

3 As informações biográficas sobre Barlow são retiradas de O'Connor e Robertson (2000a).

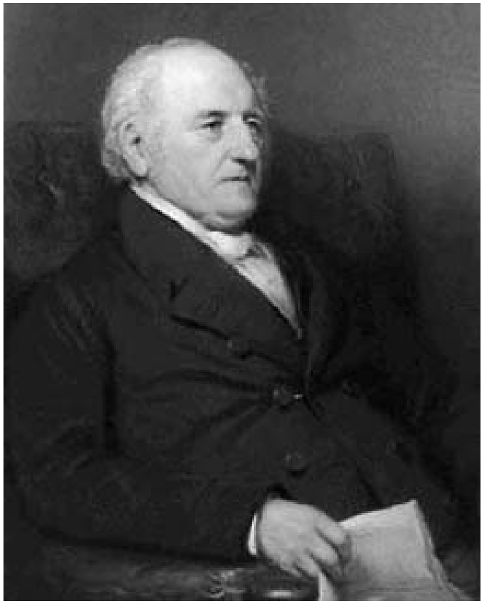


Figura 2. Peter Barlow.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008a).

Ao exemplo do seu mentor, Barlow foi muito ativo na matemática aplicada, especialmente nas áreas de magnetismo, a construção de pontes e o desenvolvimento do sistema ferroviário. Inventou um novo tipo de lente para telescópios que está ainda em uso hoje em dia. Foi eleito à Sociedade Real em 1823 e, em 1825, recebeu a Medalha de Copley para seus trabalhos sobre o magnetismo.

Barlow veio a falecer em 1862.

As Três Versões do Dicionário de Hutton

A Mathematical and Philosophical Dictionary, de Charles Hutton, foi publicado originalmente, em dois volumes, em 1795. Certamente faz parte do grande movimento oriundo do iluminismo, cujo lema fundamental sobre a importância da razão para o progresso do homem implicava na disseminação do conhecimento científico na sociedade em geral. Enquadra-se nesse movimento a publicação, entre os anos de 1751 e 1772, da *Encyclopédie* de Diderot e d'Alembert e, posteriormente, a organização da *Society for the Diffusion of Useful Knowledge* (1826-1848) em Inglaterra e dos *Chautauqua* (a partir de 1874) nas partes rurais dos Estados Unidos. Podemos, no entanto, também ver uma afinidade dessa obra de Hutton com as grandes *Summa* da Idade Média e da Renascença, dos quais os mais conhecidos, na matemática, são provavelmente a *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, (1494) de Luca Pacioli. Essas obras visaram proporcionar ao leitor um livro de referência sobre o estado atual de algum campo de conhecimento. De fato, o próprio Hutton confirmou a presença dos dois propósitos – o de divulgação e o de referência – ao indicar, no seu prefácio, que o *Dicionário* poderia ser consultado com proveito tanto pelo cientista, quanto pelo aluno.

Em relação às ciências tratadas no *Dicionário*, Hutton destaca a matemática, a astronomia e a filosofia. Há uma tendência de dar certa preferência para assuntos da matemática aplicada e, em consequência, incluiu muita informação sobre a construção de fortalezas, a arquitetura, pesos e medidas, tabelas de dados tecnológicos, a maquinaria de relógios e o desenvolvimento de sistemas calendáricos. A obra ainda contém referências a termos de tais áreas como a atuária, a mecânica em geral, a química, a música e até a geologia e a geografia. A filosofia é compreendida como filosofia natural e experimental, bem como a filosofia especulativa, todas das quais são tratadas, embora a última em grau menor.

O plano da obra é, primeiramente, o de fornecer artigos que explicam, com amplidão e precisão, termos técnicos das referidas áreas de conhecimento. Em segundo lugar, acrescentam-se artigos que retratam a origem e o desenvolvimento dessas áreas. Finalmente, incluem-se artigos que detalham as contribuições dos principais cientistas destas áreas, juntando dados biográficos sobre cada um e fazendo, na medida do possível, listas completas das suas obras. As principais fontes consultadas, segundo o próprio Hutton, eram os dicionários já existentes e as publicações das várias sociedades científicas da Europa. Ao que parece, contudo, há mais dependência das publicações da Sociedade Real de Londres e a Sociedade Real de Edimburgo, do que quaisquer outras.

Em 1814, Barlow publicou *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*. Embora o título pudesse indicar que se trata de uma obra completamente original, na realidade é nada mais do que uma versão mais breve da obra original de Hutton. Observa-se não somente que a imensa maioria das entradas é precisamente as que se encontram no livro anterior, mas também que parágrafos inteiras são repetidas verbatim da referida obra de Hutton. Presumivelmente, a ideia era a de reduzir os dois volumes do *Dicionário* de Hutton a um único volume. Isto foi realizado pela simplificação de alguns dos artigos e, mais importantemente, por uma nova formatação, permitindo a inclusão de mais informação em cada página, e pela eliminação das gravuras contidas no texto original. Há, de fato, algumas poucas entradas novas e algumas poucas que constam no livro de Hutton, mas não no de Barlow. O efeito dessas mudanças é, no entanto, irrisório e podemos, pelo menos para os propósitos do presente trabalho, considerar o livro de Barlow como a segunda edição do *Dicionário* de Hutton.

No ano após a publicação do livro de Barlow, Hutton publicou uma nova versão do seu *Dicionário*, ainda em dois volumes com uma mesma formatação da versão original, embora fossem feitas algumas mudanças para aumentar a quantidade de informação contida em cada página. Vários artigos foram corrigidos ou ampliados e há alguns artigos novos. O próprio Hutton, no prefácio à nova edição, alega que as mudanças foram tantas que o resultado deveria ser considerado quase uma nova obra[4]. A alegação, no entanto, não passa de um baita exagero.

Finalmente, devemos observar que, apesar da imensa quantidade de informação contida na obra, o *Dicionário* sofre de certas limitações óbvias devidas ao fato de que é um trabalho situado em um determinado lugar e tempo. Além dessas limitações óbvias, no entanto, há outras devidas às particularidades do próprio autor e da metodologia adotada para a composição da obra. Podemos ilustrar estas através de uma análise da entrada *números amigáveis*. Assim, Hutton (1975) define números amigáveis como pares de números que são mutuamente iguais à soma das partes alíquotas do outro, ilustra o conceito com o par (220, 284), lista os pares (17296, 18416) e (9363584, 9437056) e faz uma explicação rápida do método de van Schooten para achá-los. Dá a entender que só há, ou pelos menos só se conhece, esses três pares e afirma que foram descobertas por van Schooten. Na verdade, porém, o primeiro par era conhecido na antiguidade, enquanto o segundo foi largamente atribuído[5] ao Fermat e o terceiro ao Descartes. Ainda mais, o próprio van Schooten (1657) afirma que estava apenas explicando o método de Descartes. Pior ainda, Euler[6] (1747) já havia listado uns trinta pares de números amigáveis e em Euler (1750) a lista é ampliado para 62 pares (incluindo os três dados acima); Euler (1750) também contém explicações detalhadas sobre vários métodos que podem ser usados para achar esse tipo de número.

---

4 Neste sentido, observe a pequena modificação no título de Hutton (1815).

5 O segundo e terceiro pares foram de fato descobertos por Thabit ibn Qurra. Ver Fossa, 2017.

6 Fossa e Leôncio (2009) contém uma tradução de Euler (1747).

A entrada correspondente em Barlow (1814) repete o que foi dito por Hutton, embora afirmando explicitamente o juízo (errado) de que os únicos pares conhecidos são os três já mencionados e se referindo a Barlow (1811) para uma demonstração do método de van Schooten. Já em Hutton (1815), no entanto, acrescenta-se um novo par de números amigáveis, a saber, (6232, 6368), mas não dá qualquer indicação de onde veio[7]. No final do artigo, Hutton menciona um artigo de John Gough. No referido artigo, Gough (1809) afirma que conheceu os números amigáveis através de Hutton (1795) e procurou van Schooten (1657) para elaborar, no estilo do próprio van Schooten, algumas propriedades gerais do mencionado tipo de número. Não menciona qualquer par além de (220, 284). Assim, o mais provável é que Hutton tomou ciência do par (6232, 6368), sem maiores detalhes, através de algum correspondente.

De tudo isto, podemos concluir que o procedimento de Hutton era o de colher informação, frequentemente de forma acrítica, sobre as contribuições de autores que costumavam publicar nas revistas científicas britânicas e acrescentar ao resultado certas figuras históricas e determinados autores estrangeiros, sendo que a maioria destes provavelmente era ligada a algumas das sociedades científicas mencionadas na entrada *academia* no seu *Dicionário*.

Informação sobre o Estado do Desenvolvimento da Matemática

O fato de que todo documento histórico tem uma localização no espaço e no tempo parece implicar que podemos investigar o estado do desenvolvimento da matemática pela

7 É o penúltimo par dado em Euler (1750).

informação contida nos *Dicionários* de Hutton. A implicação, no entanto, não é inteiramente correta porque é limitada pelo conhecimento do autor e/ou pelas suas escolhas sobre o que seria incluído ou não no *Dicionário*. Não há, por exemplo, uma entrada sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, embora o mesmo seja mencionado rapidamente, sem o uso dessa nomenclatura, na entrada Álgebra, em relação às obras algébricas de Albert Girard (1595-1632). Houve, contudo, muita discussão do referido Teorema no final do século XVIII entre tais matemáticos como Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), bem como entre os matemáticos ingleses[8]. Foi, de fato, Gauss que deu a primeira demonstração convincente do Teorema na sua tese de doutorado em 1799.

A entrada *Função*, em contraste, é mais informativa. De fato, a entrada em Hutton (1795) é bastante curta, se limitando a definir o termo como uma expressão algébrica composta de letras (representando quantidades) e números, bem como dar alguns exemplos. O leitor é remetido para a *Análise dos Infinitos*[9] de Euler para mais detalhes. Visto que por "quantidade" se entende qualquer coisa que pode ser medida[10], é evidente que a ideia principal é a de variação concomitante, o que é explicitado em Barlow (1814), pois ele define esse conceito como a dependência de uma quantidade de uma ou mais outras quantidades. Assim, funções parecem pertencer

8 Ver, por exemplo, Pycior (1997).

9 Isto é, *Introductio in analysin infinitorum*, volume 1, que foi publicado em 1748. No código de Eneström usado para se referir às obras de Euler, o volume recebeu o número de referência E101.

10 Para Euler, em E101, uma função é composta de quantidades variáveis e quantidades constantes.

à álgebra, mas, continua Barlow, sua verdadeira natureza é revelada pelo Cálculo Diferencial. A maior parte da entrada de Barlow, que tem seis páginas, trata da análise da derivada de uma função sem o uso de infinitésimos. Isto é feito por seguir a abordagem de Lagrange (expansão em series) e revela a preocupação da época com uma justificativa rigorosa para o Cálculo. Hutton (1815) mantém a formulação dada na versão original do *Dicionário*, mas acrescenta um longo extrato (uma página inteira do *Dicionário*) da *Teorie des Fonctions Analytiques* (1797) de Lagrange, versado para o inglês, que tem o mesmo propósito da entrada de Barlow, embora a versão de Hutton é menos técnica. Podemos observar que, em contraste ao rigor procurado no Cálculo, faltava rigor na definição de "função". Isto certamente deve-se ao fato que não houve uma percepção da necessidade para mais rigor na referida definição, o que só aconteceria com a publicação da *Téorie analytique de la chaleur* em 1822, embora fosse lida ao Instituto de Paris em 1807, de Jean Baptiste Fourier. Neste trabalho a representação de funções por séries trigonométricas infinitas e isto causaria problemas com o conceito de função que só foram resolvidos com a adoção de uma nova definição (em termos de pares ordenados).

Disto, podemos ver que o *Dicionário* também nos dá alguma informação sobre as atitudes dos matemáticos da época para com a própria matemática. Assim, na entrada *Negativo, Sinal*[11], Barlow (1814) rejeita a existência de números negativos baseado no raciocínio de que uma quantidade menor do que zero é incompreensível. Para ele, o sinal negativo é primordialmente indicativo da operação de subtração, que não é uma operação simétrica (não pode tirar o maior do menor!). Desta forma, seu uso em álgebra precisa ser cuidadosamente

11 Isto é, em inglês, *Negative Sign*.

circunscrito por regras para evitar resultados anômalos. Por força maior, também rejeita os números imaginários. Hutton (1795), bem como Hutton (1815), adota uma posição parecida, embora a sua retórica seja menos estridente.[12]

Finalmente, voltemos a nossa atenção à entrada *Matemática*. Hutton (1795) define a matemática como a ciência de quantidade, acrescentando que considera a quantidade como sendo ou mensurável ou computável. Em seguida dá uma etimologia da referida palavra, embora de forma não muito perspicaz, como proveniente da palavra grega μάθησις, "disciplina" ou "ciência". Faz, então, uma pequena história da matemática antiga e fecha com uma consideração de vários tipos de matemática, entre os quais destaca matemática pura, uma ciência que alcança a verdade absoluta através das suas demonstrações. Hutton (1815) repete a versão original.

Barlow (1814) segue o mesmo plano geral que Hutton, embora seja mais prosaico sobre a matemática pré-histórica e faz uma tabela (de duas páginas) listando os matemáticos mais eminentes dos inícios até sua própria época. A lista contém uns 300 nomes, entre os quais tem-se, é claro, matemáticos como Newton e Euler, mas também contém nomes como Júlio César (devido a reforma juliana do calendário!), mas não contém seu conterrâneo John Dee (1527-1609), que escreveu sobre reforma do calendário, trigonometria, navegação e astrologia, nem Simon Stevin (1548-1620), que escreveu sobre frações decimais. Vários filósofos são mencionados, mas entre eles não achamos Immanuel Kant (1724-1804), embora ele escrevesse sobre a cosmologia e a sua filosofia é uma importante teoria sobre a matemática.

12 Para uma análise histórica da controvérsia sobre números negativos, ver dos Anjos (2012).

Há, no entanto, uma maneira interessante em que Barlow não segue seu mentor, pois explicitamente rejeita a definição da matemática como a ciência de quantidade. Em vez disto, propõe que a matemática seja definida como a ciência de razão, no sentido de razões e proporções, porque, na ótica dele, a matemática de fato investiga as razões que quantidades têm uma para com as outras. Desta forma, sempre segundo Barlow (1814), a geometria trata da comparação entre magnitudes de corpos, astronomia da comparação entre as distâncias e velocidades dos planetas e a mecânica da comparação entre a força de várias máquinas. Deixe implícito, porém inteiramente claro, de que a aritmética investiga as razões entre números (inteiros positivos). Desta forma, Barlow retoma, cientemente ou não, uma teoria antiga de Eudoxo (408-355 a.C.). A sua entrada *Eudoxo de Cuido*[13], contudo, é bastante curto e só identifica Eudoxo como geômetra.

Informação Biográfica Contida no Dicionário de Hutton

Há centenas de entradas no *Dicionário* de Hutton fornecendo informação biográfica sobre autores que contribuíram, de alguma forma, à matemática, astronomia, filosofia ou uma ciência afim. Geralmente começa com o nome, incluindo, quando apropriado, versões alternativas, bem como data e local de nascimento, seguido por uma curta frase encomiástica identificando sua profissão e nacionalidade (*e.g.*, matemático inglês muito célebre, ou um dos mais eruditos astrônomos escoceses). Raconta, em seguida, dados sobre a vida do autor e fecha com a data de falecimento. Finalmente, faz um resumo das principais contribuições científicas do autor em tela e anexa uma lista (geralmente parcial) de suas publicações. Há, claramente,

13 Isto parece ser um erro de grafia para Eudoxo de Cnido.

muitas variações neste padrão; em especial, as contribuições científicas, mormente nas entradas menores, são incorporadas nos dados biográficos. De vez em quando, dá somente a idade que a pessoa tinha quando faleceu, sem mencionar a data. Revisaremos alguns exemplos para ilustrar melhor a prática de Hutton.

Adelm (ou, alternativamente, *Aldhelmus* ou *Althelmus*) era, segundo Hutton, um inglês erudito que floresceu por volta de 680, vindo a falecer em 709. Sobrinho de Ina, um rei dos saxões ocidentais[14], Adelm foi o primeiro abade de Malmsbury e bispo de Shirburn. Escreveu sobre teologia, aritmética, astrologia e filosofia. A entrada em Hutton (1795) consiste de 12 linhas[15]. É repetida verbatim em Hutton (1815), onde, devido às já mencionadas mudanças de formatação, só ocupa 11 linhas. A entrada não é contida em Barlow (1814). Embora fosse bem conhecido na época dele, especialmente para seus escritos religiosos e sua poesia, não é lembrado hoje em dia. A única referência que achei, fora do *Dicionário* de Hutton, sobre um trabalho de Adelm (Aldhelm) relacionada com a matemática é seu *De septenario*, uma obra sobre as propriedades místicas do número sete.

A entrada referente ao matemático francês *Michel Rolle* (1652-1719), conhecido entre os alunos do Cálculo como autor do Teorema de Rolle, consiste de quase uma meia página (isto é, quase uma coluna inteira). Segundo Hutton (1795), Rolle,

14 Foram localizados no sudoeste da Inglaterra. Malmsbury (Malmesbury) and Shirburn (Sherborne) são dessa região.

15 Cada página de texto é dividida em duas colunas. Assim, a entrada consiste de 12 linhas de uma coluna. Observações semelhantes serão aplicáveis a todas as mensurações sobre o texto, mas serão deixadas implícitas. O mesmo acontece com Barlow (1814).

dono de uma bela caligrafia, saiu da sua cidade natal[16] no interior da França para sobreviver em Paris por dar lições sobre a referida arte. No entanto, seu talento matemático foi descoberto por Ozanam[17], que obteve, de Colbert[18], apoio financeiro para ele. Também observa que seu comportamento pacífico e polido lhe rendeu muitos amigos na comunidade científica. Na matemática, ele se dedicou especialmente à álgebra e eventualmente ingressou na Academia das Ciências. Hutton ainda cita dois livros da sua autoria sobre a álgebra, bem como treze artigos sobre vários tópicos matemáticos. Hutton (1815) repete esse artigo verbatim. Barlow (1814), no entanto, reduz a entrada a sete linhas, eliminando toda a informação de cunho biográfico e mencionado apenas as datas de nascimento e falecimento e os títulos dos dois livros. Ainda mais, Barlow afirma que Rolle veio a falecer aos 53 anos de idade em 1685, o que nem é aritmeticamente possível. As datas de Hutton são corretas. Também há indícios que Rolle não foi tão amável quanto Hutton aparentemente indica, pois Boyer (1995, p. 471), falando de Rolle, afirma o seguinte: "Tão violentos eram seus ataques ao cálculo, que certa vez a Academia de Ciências teve de intervir."

Do exemplo anterior, fica claro da maneira em que Barlow (1814) abrevia Hutton (1795). Não obstante, há entradas em Barlow (1814) que não constam em Hutton (1795), sendo uma delas a para *Maria Gaetana Agnesia* (versão latina do nome Agnesi). Segundo Barlow, Agnesi teve habilidades matemáticas formidáveis e ainda foi fluente em várias línguas antigas e modernas. Assumiu o posto de Professora de Matemática

16 A cidade natal de Rolle era Ambert na província de Auvergne (Basse-Auvergne).

17 Trata se do matemático francês Jacques Ozanam (1640-1717).

18 Trata-se de Jean-Baptiste Colbert, um oficial do governo de Luis XIV (reinado: 1643-1715).

na Universidade de Bologna[19] devido a excelência do seu livro *Istituzioni analytiche*[20], publicado, em dois volumes, em 1748, cuja tradução para o inglês, de professor Colson[21], foi publicada em 1801. Eventualmente, porém, deixou a Universidade para entrar num convento. Em consequência, todos os detalhes da resta da sua vida são perdidos, sendo que Barlow até professa ignorância sobre as datas de nascimento e falecimento dela. Hutton (1815) acrescenta uma entrada para Agnesi que é bastante similar, mas não idêntica, à entrada de Barlow. Observa que o referido livro dela foi traduzido para o francês por Cousin[22] (em 1775) e que assumiu seu posto na Universidade em 1750. Identifica a ordem religiosa à qual ela se associou como sendo a das "freiras azuis"[23] e fornece a data de nascimento (1718) e data aproximada de falecimento (1770). A primeira é correta, mas Agnesi só faleceu em 1779.

Há ainda entradas em Hutton (1815) que não são contidas em Hutton (1795), nem em Barlow (1814). Como um exemplo, podemos considerar a entrada, de mais que meia página, para *Robert Hues* (*c*.1552-1632). Hues nasceu em Little Hereford[24] e estudou em Oxford. Na entrada, Hutton destaca o trabalho de

19 Bologna (Bolonha) é situada no Norte da Itália. A Universidade foi fundada em 1088.

20 O título correto é *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Hutton (1815) não dá o título em italiano.

21 Trata-se do matemático inglês John Colson (1680-1760). A referida tradução foi publicada postumamente.

22 Não achei uma tradução por Cousin, mas sim uma tradução, de 1775, do matemático francês Pierre-ThomasAntelmy (1730-1783).

23 Aparentemente várias denominações de freiras católicas usam roupa azul ou parcialmente azul. A denominação de Agnesi era as augustinianas, que mantinha o hospício Pio Instituto Trivulzio em Milão.

24 Trata-se de uma pequena aldeia no oeste da Inglaterra, perto do País de Gales.

Hues sobre problemas de navegação de embarcações. Susan M. Maxwell (2008), escrevendo no *Oxford Dictionary of National Biography*, dá 1553 como o ano de nascimento de Hues.

Consideremos agora dois ou três exemplos de entradas sobre personalidades mais conhecidos. Em primeiro lugar, vejamos a sobre *Leonhard Euler* (1707-1783). Hutton (1795) raconta a história do jovem Euler na Universidade de Basileia[25], onde o seu pai o mandou para estudar teologia, sua virada para a matemática com a ajuda de John Bernoulli[26] e sua amizade com os filhos deste, Nicholas e Daniel. Os irmãos foram para Petersburgo[27] onde foram instrumentais na consecução de uma posição para Euler na Academia das Ciências, onde, depois de alguns anos foi promovido ao posto de Professor de Matemática em 1733. Ficou em Petersburgo até 1741, quando foi convidado a ingressar na nova Academia de Berlim, lá ficando até 1766, quando voltou ao Petersburgo. Aborda ainda os problemas que teve com a visão, o que eventualmente resultou em cegueira completa, mas não diminuía sua produção prodigiosa. De fato, segundo Hutton, ditou seu admirável livro *Elementos de Álgebra* a um servente, um aprendiz de alfaiate, o qual era completamente isento de conhecimento matemático. Em termos do conteúdo dos trabalhos de Euler, Hutton só menciona uns poucos resultados relacionados com a matemática aplicada, se limitando a fazer várias observações, quase bajuladoras, sobre a quantidade dos trabalhos produzidos e a habilidade de Euler de fazer cálculos complexos. Não acrescenta uma lista,

25 A cidade de Basileia, na suíça, é a cidade natal de Eular.

26 Trata-se de Johann Bernoulli (1667-1748) e seus filhos Nicolaus Bernoulli (1695-1726) e Daniel Bernoulli (1700-1782).

27 São Petersburgo, chamado Leningrado entre 1924 e 1991, era na época sede da corte russa.

nem parcial, das publicações de Euler, mas remete o leitor a várias fontes onde essa informação pode ser achada.

Sobre Euler, Barlow (1814) reduz as duas páginas de Hutton a menos de uma página. Desta, porém, só um parágrafo é dedicado à vida do referido matemático, sendo que o resto é voltado para uma lista de 21 das obras de Euler, incluindo a *Mecânica*, a *Introdução à Análise dos Infinitos*, a *Dióptrica*, as *Cartas a uma Princesa Alemã* e os *Elementos da Álgebra*. A correspondente entrada em Hutton (1815) repete a de Hutton (1795) com algumas pequenas modificações. Há, nas entradas sobre Euler, certa falta de apreciação sobre as realizações do matemático suíço – sua grande atuação na Teoria dos Números, por exemplo, nem sequer é mencionada.

Visto que os ingleses tendam a ter uma estima exagerada para Newton, poderemos esperar um artigo bastante comprido referente a esse cientista. De fato, a entrada *Sir Isaac Newton*, em Hutton (1795), consiste de nove páginas, às quais são acrescentadas mais quatro páginas sobre *Newtonian Philosophy*. Newton nasceu em Woolstrop[28] no dia de Natal[29] de 1642. Foi o único filho de John Newton[30], que faleceu quando seu filho foi ainda muito jovem. Não obstante, sua mãe[31], que havia casado novamente percebeu as habilidades extraordinárias de Newton e cuidou, junto com as solicitações de um irmão dela, da sua edu-

---

28 É um pequeno lugar na parte central leste da Inglaterra, perto de Lincoln.

29 Isto é de acordo com o velho calendário juliano ainda em uso na Inglaterra na época do nascimento de Newton. Segundo o calendário gregoriano, seria 04 de janeiro de 1643.

30 O pai de Newton foi também chamado Isaac (1606-1642); ver More (1962, p. 1) que cita o registro de batismo de Isaac filho. O pai faleceu alguns meses antes do nascimento do seu filho.

31 Trata-se de Hanna (ou Hannah) Ayscough Newton (1623-1679). Seu novo marido foi Barnabas Smith (1583-1653) e o irmão de Hanna e, portanto, tio de Newton foi William Ayscough (*c.* 1610-1669).

cação, eventualmente o mandando para Cambridge. Lá, atraiu a atenção de Dr. Barrow[32], o primeiro Professor Lucasiano desta instituição, com quem manteve uma grande amizade. Foi direcionado a ler os *Elementos* de Euclides, mas achou-os fáceis demais e passou a ler Descartes e Kepler. Hutton apenas menciona rapidamente o trabalho de Newton sobre o Cálculo, embora também mencione, no final do artigo, seu trabalho com séries infinitas, mas detalha a controvérsia com Leibnitz[33] sobre a prioridade da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. Relata, em especial, que a Sociedade Real de Londres estabeleceu uma comissão para determinar quem tinha razão; o relatório dessa comissão foi uma vindicação completa para Newton. Em contraste do seu tratamento de Newton e o Cálculo, Hutton dá muito atenção ao trabalho de Newton na óptica e relata como, devido ao fechamento da Universidade face à peste de 1665-1667, Newton voltou à fazenda ancestral e, quando via maçãs caindo das árvores, concebeu seu sistema do mundo baseado na gravitação universal. Em 1669, Barrow abdicou da Cadeira Lucasiana em favor de Newton. Ele ficaria neste posto até 1696, quando assumiu um lugar na Casa da Moeda da Inglaterra. Ingressou na Sociedade Real em 1672, foi eleito presidente da referida Sociedade em 1703 (posto que manteria até seu falecimento 25 anos depois) e foi feito cavaleiro por Rainha Anne[34] em 1705. Depois de vários problemas de saúde e cer-

32 Trata-se de Isaac Barrow (1630-1677). Professor Lucasiano se refere à Cadeira de Matemática endossada em 1663 por Henry Lucas (1610-1663), membro do Parlamento inglês.

33 Trata-se claramente de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). O *z*, em alemão, frequentemente tem o som de *tz* e, assim, o nome Leibniz às vezes se grafia com *tz*, o que, no entanto, não é o preferido.

34 Rainha Anne (1665-1714) foi a última monarca dos Stuart. Reinou de 1702 até 1714.

tos desgostos, devidos, na maioria, às maquinações de Leibnitz e seus partidários, ele veio a falecer, com 85 anos de idade, em 1727. Hutton até dá-se certo trabalho em mostrar cuidadosamente que Newton não somente suportou esses problemas e desgostos com uma invejável tranquilidade, mas também que, na vida inteira, possuía um nível altíssimo de serenidade e paz de espírito. Acrescenta uma lista de 26 itens[35] das publicações de Newton, bem como uma lista de 82 itens não publicados, sendo a maioria papéis avulsos e/ou incompletos.

Barlow (1814) segue o tom do artigo original do seu mentor, mas reduz o mesmo ao espaço de apenas uma página e meia. Só lista 22 das 26 publicações mencionadas por Hutton e elimina a lista dos 82 itens não publicados. Ainda dá a data de nascimento de Newton segundo o calendário juliano. O mesmo acontece em Hutton (1815), que, de fato, exceto por algumas pequenas modificações, é igual ao artigo em Hutton (1795).

Além das várias imprecisões já assinaladas nas nossas notas, devemos mencionar mais alguns aspectos dos artigos de Hutton. Em primeiro lugar, Hutton esconde as tribulações da juventude de Newton. Tinha apenas dois anos quando sua mãe casou com Barnabas Smith, o qual, basicamente, rejeitou Newton. Em consequência, ele foi forçado a morar com os avôs maternos e desenvolveu relações hostis tanto para com esses avôs, quanto para com a sua mãe e o seu padrasto[36]. Em segundo lugar, parece que Newton não evidenciou muita promessa de ser dono de uma inteligência fora do comum[37]. De fato, foi somente após ele se revelou incapaz de gerenciar a fazenda ancestral que ele foi mandado à escola, embora, na

35 Alguns desses itens contêm múltiplas publicações.

36 Ver, por exemplo, O'Connor e Robertson (2000b).

37 Ver More (1962).

verdade, como Hutton relata, seu tio, William Ayscough, foi instrumental em convencer a mãe a deixá-lo ir a Cambridge. Devemos desconfiar, em especial, da estória de que Newton absorveu os *Elementos* de Euclides sem qualquer esforço. Estórias semelhantes são contadas sobre vários matemáticos e todas têm o mesmo nível baixíssimo de probabilidade. Gilberte Pascal (1620-1687), por exemplo, relata que seu irmão Blaise (1623-1662) deduziu o primeiro livro inteiro dos *Elementos* sem a ajuda de qualquer texto matemático.[38] Finalmente, observamos que, longe de ser uma pessoa sossegada como Hutton alega, Newton teve acessos de ira sempre que recebesse qualquer crítica[39]. A controvérsia com Leibniz foi um exemplo disto, pois Newton foi tão enfurecido com os acontecimentos que ele mesmo, na condição de Presidente da Sociedade Real, constituiu a comissão investigativa mencionada por Hutton e foi o *de facto* presidente da mesma, bem como o próprio autor do relatório. É, portanto, um tanto ingênuo oferecer, como faz Hutton, o relatório como demonstração da retidão de Newton e a perfídia de Leibniz. É interessante observar que, na entrada *Godfrey-William Leibnitz*, Hutton é um pouco mais generoso com Leibniz, apenas afirmando *en passant* que o referido matemático alemão provavelmente obteve dicas sobre o método de Newton em uma viagem para Inglaterra em 1673 e que estas serviriam como base para seu Cálculo Diferencial. Não obstante, na entrada *Fluxiões*, retoma a controvérsia, explicando em mais pormenores os raciocínios da comissão investigativa da Sociedade Real, sem mencionar (de fato, ocultando) o papel de Newton nessa comissão.

38 Ver Fossa, 2013. Observamos que, na entrada *Blaise Pascal*, Hutton raconta essa estória de uma forma mais branda.

39 Ver O'Connor e Robertson (2000b).

Conclusão

Como já indicamos, o *Dicionário* de Hutton foi considerado, pelos seus contemporâneos, sua obra mestre. Na verdade, reúne uma quantidade enorme de informação, especialmente sobre tópicos relacionados à matemática aplicada, embora muito do que foi assim chamado na época de Hutton seria considerado hoje parte de alguma ciência específica e não parte da matemática. Em relação à História da Matemática, o livro, nas suas três versões, precisa ser analisado segundo pelo menos dois parâmetros. Em primeiro lugar, o *Dicionário* fornece um meio de investigar o estado do desenvolvimento da matemática na época em que foi escrito. Em segundo lugar, as entradas de conteúdo explicitamente histórico fornece informação relacionada à própria História da Matemática. Analisamos vários exemplos destes dois parâmetros a fim de ilustrar as possibilidades e limitações do texto, bem como para mostrar as relações básicas entre as três versões do texto.

O procedimento pouco crítico de Hutton implica que a informação que ele traz nem sempre é confiável, embora haja um nível muito mais rigoroso em relação a assuntos técnicos do que em relação a assuntos históricos. Mas, também implica que ele inclui muita informação que talvez não seria incluída por um autor mais crítica. Isto é especialmente o caso em relação à inclusão de informação biográfica de muitos matemáticos de menor importância, os quais não são mencionados em histórias gerais da matemática. Assim, o *Dicionário* é um bom ponto de partida para os historiadores que querem investigar as contribuições de figuras menores.

Referências

ANKERSMIT, F. R. Historiography and Postmodernism. *History and Theory*, v. XXVIII, n. 2, p. 137-153, 1989.

BARLOW, Peter. *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*. London: Robinson, et al., 1814.

______. *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*. London: Johnson & Co., 1811.

DOS ANJOS, Marta Figueredo. *Um Estudo Histórico-Epistemológico do Conceito de Número Negativo*. Natal: Editora da UFRN, 2012.

EULER, Leonhard. De numeris amicabilibus.*Nova acta eruditorum*, 1747, maio, p. 267-269. [E100.]

______. De numeris amicabilibus. *Opuscula varii argumenti*, 1750, v. 2, p. 23-107. [E152.]

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FOSSA, John A. Introdução à história dos números amigáveis. In: Leonhard EULER. *Sobre Números Amigáveis*, 2017.

______. Pascal e seu triângulo: um ensaio introdutório. *In*: PASCAL, Blaise. *Tratado sobre o Triângulo Aritmético*. Trad. de John A. Fossa e Fabricio Possebon. Natal: Editora da UFRN, 2013.

FOSSA, John A.; LEÔNCIO, Sarah Mara Silva. "Sobre números amigáveis", de Leonhard Euler: Tradução e Comentário. *Revista brasileira de história da matemática*, v. 9, n. 17, p. 87-90, 2009.

GOUGH, John. The Theory of Amicable Numbers. *New Series of the Mathematical Repository* (Thomas Leybourn), v. II, p. 34-39, 1809.

HUTTON, Charles. *A Mathematical and Philosophical Dictionary*. London: Johnson & Robinson, 1795.

______. *A Philosophical and Mathematical Dictionary*. London: Hutton et al., 1815.

MAXWELL, Susan M. Robert Hues. *Oxford Dictionary of National Biography Online*. 2008. Disponível em <www.oxforddnb.com>. Acesso em 12/11/2012.

MORE, Luis Trenchard. *Isaac Newton, A Biography*. New York: Dover, 1962.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Barlow Portraits. 2008a. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Barlow>. Acesso em 11/11/2012.

______. Hutton Portraits. 2008b. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Hutton>. Acesso em 10/10/2012.

______. Charles Hutton. 2002. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hutton>. Acesso em 10/10/2012.

______. Peter Barlow. 2000a. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barlow>. Acesso em 11/11/2012.

______. Sir Isaac Newton. 2000b. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton>. Acesso em 12/11/2012.

PYCIOR, Helena M. Symbols. *Impossible Numbers and Geometric Entanglements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

SCHOOTEN, Francisci à. *Exercitationum mathematicarum libri quinque*. Leydensis [Leiden (Holanda)]: Johandis Elsevirii, 1657.

10

Matemática, História e Alienação

John A. Fossa

Uma das mais promissoras linhas de pesquisa em Educação Matemática tem sido o uso da História da Matemática como um recurso pedagógico. Dentre as várias propostas para o referido uso, achamos a leitura de textos históricos, o contraste e comparação de abordagens diferentes de algum conceito ou problema matemático, e, o que é talvez a mais interessante de todas, o uso da História da Matemática para informar atividades construtivistas. Todas essas propostas diferem do uso tradicional da História na Educação Matemática pelo fato de que propõem auxiliar o processo da aprendizagem de conceitos matemáticos através do desenvolvimento de materiais e métodos que levam o aluno a participar ativamente na construção dos seus próprios conceitos. Nesse sentido, todas as referidas propostas são consoantes com princípios construtivistas para um ensino eficaz.

O uso tradicional da História da Matemática no ensino da Matemática, em contraste, se limitava a tentar proporcionar ao aluno uma maior motivação para estudar a Matemática. A tentativa era feita, no entanto, de tal forma que a informação histórica era, quase sempre, marginalizada, ou seja, a mencionada informação não fazia parte integral do módulo de ensino e, dessa forma, o aluno frequentemente usava o material histórico para fugir da matemática, em vez de investigá-la com mais interesse. A esse respeito, há duas observações a serem feitas. Em primeiro lugar, isso não significa que o uso tradicional era inteiramente nefasto, pois mesmo quando funcionava na maneira indicada, proporcionava ao aluno uma pequena recreação dentro da aula de matemática.

A segunda observação que devemos fazer aqui é que a motivação do aluno é uma importante função da Educação Matemática e não deveria ser desprezada. De fato, a mencionada função é tão importante que as propostas modernas frequentemente alegam que o uso da História da Matemática no ensino da Matemática é bastante eficaz na motivação do aluno. Infelizmente, na maioria dos casos, a questão da motivação não é tematizada no contexto da discussão do uso da história como um instrumento pedagógico. Para algumas considerações a mais sobre isto, no entanto, ver Fossa (2008).

Para essas razões, entre outras, acredito que podemos concordar que o uso da História da Matemática como um instrumento pedagógico é um importante tópico para a Educação Matemática. No resto do presente trabalho, contudo, quero deixar o referido tópico de lado para abordar outro, igualmente importante para a nossa disciplina. Trata-se da questão da apreciação do papel cultural da matemática, ou melhor, os papéis culturais da mesma.

Matemática como uma Herança Cultural da Humanidade

Frequentemente se diz que a matemática nasceu com o homem. Isso significa tanto que a matemática é uma atividade especificamente humana, quanto que, historicamente, os homens, por mais primitivos que fossem, sempre faziam algum tipo de matemática. Ao mesmo tempo, se quer afirmar que a matemática é um produto cultural do homem. Isso, no entanto, não é consoante com a afirmação anterior, pois, como um produto cultural, foi ou inventado num determinado ponto de tempo ou se desenvolveu de algum conjunto de atividades anteriores. Visto que há, espalhadas nas várias culturas ao redor do planeta, uma multiplicidade de formas diferentes do que geralmente chamamos de matemática, parece que a matemática, de fato, se desenvolveu de um complexo de atividades anteriores, que chamo atividades proto-matemáticas. Na verdade, podemos definir a etnomatemática como sendo, primordialmente, o estudo de atividades proto-matemáticas tanto num contexto histórico quanto no contexto atual.[1]

Tudo isso, então, reforça a ideia da matemática como um produto cultural, ou seja, como uma criação livre do espírito humano e, de fato, quase todos os grandes matemáticos que têm opinado sobre o assunto concordam com essa caracterização da matemática.

Podemos ir além disso, porém, e dizer um pouco mais sobre esse produto cultural que é a matemática? Talvez a primeira coisa que salta aos olhos é que a matemática é útil. Mas, de novo, quando perguntamos os grandes matemáticos porque a matemática lhes encanta, quase ninguém diz: "porque é útil." Dizem algo como "porque é bonito" ou "porque é puro", onde puro significa "absolutamente verdadeiro". Assim, a matemática parece compreender em si mesmo tanto o conhecimento verdadeiro da sua aplicabilidade, quanto o conhecimento belo da sua verdade absoluta, o que nos leva a ver na matemática a exemplificação do seguinte ensinamento da urna no poema *Ode on a Grecian Urn* de John Keats:

1 Para uma explicação mais precisa do conceito de atividades proto-matemáticas, bem como o da própria matemática, ver Fossa (2010).

'Beauty is truth, truth beauty, — that is all
Ye know on earth, and all ye need to know.'

Ao exemplo do poema de Keats e da própria urna que o poema contempla, a matemática não mescla os conceitos distintos de conhecimento, verdade e beleza através de argumentos discursivos acarretando a referida mesclagem como conclusão. Muito pelo contrário, revela, através da sua estrutura, uma visão do mundo como repousando na unidade do pensamento humano e, neste sentido, a matemática é uma grande obra de arte.

Mais ainda, como uma obra de arte, a majestade e sublimidade da matemática superam em muito a arte das urnas gregas e até a da poesia de Keats. Desta forma, certamente faz parte da herança cultural da humanidade e, como tal, deve ser apreciada, compreendida, interpretada e vivida, tanto como uma expressão cultural histórica, quanto como uma expressão vigorosa da nossa cultura atual. Finalmente, visto que a matemática faz parte da nossa cultura, é naturalmente inserida dentro de uma cultura maior e, portanto, é relacionada às outras partes da cultura de várias maneiras. Em consequência, a apreciação da matemática deve conter uma explanação e apreciação dessas relações.

Alienação

Dado, então, que a matemática é uma parte importante da nossa herança cultural e deve ser apreciada, tanto como uma expressão cultural, quanto com respeito às relações que ela mantém com as demais partes da nossa cultura, podemos perguntar o que acontecerá se a referida apreciação não for realizada. A resposta é que ficamos alienados da nossa cultura e, em consequência, de nós mesmos. Isso requer maiores explanações.

Para tanto, voltamos a nossa atenção para o conceito de alienação. Esse conceito é, talvez, mais familiar a nós no contexto jurídico, no qual se refere à transferência de um bem de uma pessoa a outra. Assim, quando um dono de um terreno, por exemplo, vende-o a outrem, o outro passa a receber a posse legal do terreno, o qual torna-se a propriedade do outro. Isso significa que o vendedor perdeu seu prévio domínio sobre o terreno, bem como o usufruto das vantagens que poderá produzir.

O conceito de alienação também tem uma longa história dentro da filosofia, remontando pelo menos aos hegelianos e marxistas e certamente relacionado ao conceito de autenticidade dos fenomenológicos e existencialistas. Para nossos propósitos, não será necessário fazer as distinções cabíveis entre essas várias doutrinas. Basta conceber o conceito como a perda da nossa posse de nós mesmos. Isto é, perdemos a habilidade de agir em conformidade com nosso livre-arbítrio, tornando-nos objetos para nós mesmos. Dessa forma, perdemos nossa consciência de nós como pessoas, bem como a humanidade do outro.

Ora, à primeira vista, é até difícil perceber o que tudo isto tem a ver com a matemática. A dificuldade, no entanto, é precisamente na nossa ideologia de que é somente através das nossas próprias ações que nos constituímos como homens. A mencionada ideologia, contudo, é inverídica, pois nossa constituição humana é também determinada pelas relações que mantemos com os outros, ou seja, pela nossa cultura. Em consequência, quando não nos apropriamos a matemática, nos alienamos de uma importante parte da nossa cultura e, portanto, diminuímos a nossa humanidade. Assim, é imperativo que temos uma apreciação da matemática em termos da sua organização interna, bem como em termos dos vários papéis que ela desempenha dentro da nossa cultura.

O Tamanho da Tarefa

Dado, então, que há uma necessidade para uma apreciação da matemática de forma generalizada entre os membros da sociedade, pareceria que a tarefa de preparar materiais pedagógicos adequados recairia sobre a comunidade da Educação Matemática. Isto se deve não somente ao nosso mandato de proporcionar ao aluno (seja ele criança ou adulto, estudante ou cidadão) o desenvolvimento de habilidades relacionadas à compreensão e uso da matemática, mas também ao fato de que é a Educação Matemática que detém o conhecimento e habilidades inter- e transdisciplinares necessários para a realização do serviço.

Mesmo com todas as vantagens mencionadas, porém, a referida tarefa é gigantesca. Em primeiro lugar, a própria matemática é tão ampla e seu conteúdo e seus métodos são tão variados que seria impossível abordá-la pontualmente. Assim, será necessário fazer escolhas sobre o material a ser abordado e sobre os momentos dentro do currículo onde cada conteúdo deve ser inserido. Ainda mais, não se trata apenas de modalidades referentes ao conteúdo matemático, mas também, como já indicamos, de conteúdos referentes ao papel da matemática dentro da sociedade.

Em segundo lugar, precisamos admitir que a matemática não é o único importante componente da nossa cultura que reclama, justificadamente, a apreciação do homem enculturado[2]. Dessa forma, será necessário negociar tempo e espaço dentro da matriz educacional com esses outros componentes culturais.

2 Desculpem o neologismo, mas queremos falar do homem que se acha dentro de uma cultura, não necessariamente um homem culto.

Primeiras Sugestões

Para finalizar o presente trabalho, indicarei alguns dos meios em que a referida tarefa educacional poderá ser abordada. Deve-se encará-los como primeiras sugestões a fim de iniciar o debate. Para tanto, podemos conceber a tarefa como tendo duas vertentes: uma referente à educação formal, dentro da escola, e outra referente à educação informal, fora da escola.

Na educação formal, tem-se os seguintes itens:

- Todo aluno, até o final do seu curso secundário, deve dominar conteúdos matemáticos até e incluindo o Cálculo Integral e Diferencial, embora restrito a funções polinomiais.

- O ensino que utiliza a História da Matemática como instrumento pedagógico, especialmente se levar em conta o contexto social da matemática estudada, ajudará a fomentar a apreciação pleiteada.

- Deve ser criadas, especialmente no nível universitário, disciplinas que contemplam a sociologia da matemática e a Etnomatemática.

Na educação informal, tem-se os seguintes itens:

- Confecção de materiais paradidáticos para ser usados fora do ambiente da escola.

- Confecção de materiais atrativas de divulgação científica.

Referências

FOSSA, John A. *Os Primórdios da Teoria dos Números*. [2 vols.] Natal: EDUFRN, 2010.

______. Matemática, História e Compreensão. *Revista Cocar* v. 2, n. 4, p. 7-15, 2008.