3

O Olho do Mestre
Dez Livros - Textos Históricos

John A. Fossa
(*Organizador*)

Coleção CAROÁ

eduepb

Editora indexada no SciELO desde 2012

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Editora filiada a ABEU

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone (83) 3315-3381 - e-mail: eduepb@setor.uepb.edu.br | http://eduepb.uepb.edu.br

John A. Fossa
(*Organizador*)

O Olho do Mestre
Dez Livros-Textos Históricos

eduepb
Campina Grande-PB
2021

O46 O Olho do Mestre: dez livros-textos históricos. [Livro eletrônico]/ John A. Fossa (Organizador). - Campina Grande: EDUEPB 2021. 6700 kb. - 322 p. Il. (Coleção Caroá; v. 3)

ISBN 978-65-86221-89-3 (E-book)

ISBN 978-65-86221-88-6 (Impresso)

1. Ciência - Estudo e ensino. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Educaçào Matemática - História. 4. Ciência e Tecnologia. 5. Teorias do digital. 6. Ciências e Matemática - Esnino - Tecnologia. I. Fossa, John A. (Organizador).

21. ed. CDD 507

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme Lei nº 10.994, de 14 de dezembro de 2004
Ficha catalográfica elaborada por Heliane Maria Idalino Silva – CRB-15ª/368

Sobre a Coleção

Caroá, uma coleção de livros do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM-UEPB), tem por objetivo publicar e divulgar resultados de pesquisas do próprio PPGECEM e de outros programas de pós-graduação com linhas de pesquisas semelhantes, tanto do Brasil quanto de outros países.

Caroá é uma planta originária da região caririzeira, típica da Caatinga brasileira, simboliza a resistência da natureza contra a seca. Foi com base em algumas características desta planta que surgiu a proposta de batizar a coleção de livros do PPGECEM-UEPB com este nome.

Sumário

Introdução

John A. Fossa

O olho do dono, segundo o adágio popular, é o melhor recurso para promover a prosperidade dos nossos próprios interesses. A matemática, no entanto, não tem donos – ou, melhor, dela somos todos nós os donos. Assim, é mister recorrer ao olho do mestre. Isto é, aquele que se destaque pelo reconhecimento da sua desenvoltura no ensino do mesmo. Às vezes o mestre também se destaque pelas suas contribuições ao desenvolvimento dessa ciência, pois aquele que participa de forma ímpar em investigações puramente matemáticas frequentemente tem interesse e habilidade em explanar a ciência para outras pessoas. Os artigos do presente volume se ocupam com dez exemplos da mestria no ensino de matemática, codificada em dez livros-textos históricos, começando com a matemática do Egito antigo e progredindo até o ensino do cálculo no passado recente e a obra literário-matemática do nosso Malba Tahan. Em vários dos casos abordados, há uma mestria dupla, a do ensino e a do pesquisador. Em todos os casos, porém, os referidos textos foram reconhecidos pelos contemporâneos dos seus autores como importantes marcos no ensino da matemática. Assim, os artigos da presente coletânea propõem analisar os textos, visando discernir neles o que se pode contribuir para o ensino contemporâneo da matemática.

Fontes Históricas

Nesse sentido, recorrer a fontes históricas traz várias vantagens para o professor de matemática e seus alunos. No caso de textos históricas magistrais, ver como um grande mestre aborda o seu assunto de forma didática poderá nos levar a entender melhor como ele compreendia os conceitos matemáticos tratados no texto. Isso, porém, poderá ser mais interessante para o historiador do que para o pedagogo, embora o pedagogo também poderá aproveitar desse conhecimento. Assim, voltaremos a nossa atenção agora para uma breve consideração de algumas das vantagens pedagógicas que poderão resultar da leitura de fontes históricas.

Uma das caraterísticas mais marcantes da matemática é sua preocupação com o rigor na verificação das suas afirmações. Naturalmente, a referida preocupação é adotada pelo escritor de livros didáticos. Ao fazer isto, porém, o resultado é frequentemente um texto que é munido de um nível de rigor inapropriado para o principiante e que, em consequência, ofusca os conceitos matemáticos para o leitor. Livros-textos históricos, sendo escritos segundo o padrão de rigor de seus tempos, tendem a ser mais intuitivos para o iniciante na matemática e, portanto, mais compreensivos para ele. De fato, o iniciante está numa posição análoga aos atores históricos e, portanto, os escritos destes são mais significantes para esse tipo de leitor. Exigir um nível de rigor cuja razão de ser não é compreensível pelo aluno fatalmente levará o mesmo a conceber a matemática como um amontoado de retalhos arbitrários sem sentido. A definição Dirichlet-Bourbaki de função, por exemplo, surgiu em resposta a certos problemas no que é hoje chamado de Análise de Fourier, certamente um assunto que não é abordado junto com a apresentação de funções. Assim, textos mais antigos que lidam com funções como variação concomitante são mais apropriados e intuitivos.

Outra caraterística marcante da matemática é a sua natureza auto-referencial. Isto é, conceitos originando de uma parte da matemática frequentemente se relacionam de forma surpreendente com conceitos de outras partes dessa disciplina. Talvez o exemplo mais notório é o do Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona taxas de variação com áreas. Com o tempo, esses relacionamentos tendem a ser banalizados e, a não ser que sejam problematizados pelo professor, o aluno geralmente perde o significado mais profundo da descoberta dessas relações. Assim, em vez de participar na maravilha de um novo achado, o aluno, mais uma vez, fica emaranhado no que parece para ele entediantes arbitrariedades. Livros-textos mais antigos que estão mais pertos à época da descoberta tendem a ser menos banalizados e, portanto, apresentam as descobertas com mais perspicácia.

Finalizamos essa discussão com apenas mais uma vantagem da leitura de livros-textos históricos. A Educação Matemática tem empreendido muito esforço em desenvolver abordagens eficazes para o ensino da matemática. Disto, uma coisa que tem ficado evidente é que geralmente não há uma abordagem única que “funciona” para todos os alunos. Assim, é necessário que o professor tenha várias maneiras de apresentar conceitos e procedimentos matemáticos para os alunos. Os livros-textos históricos, porém, são fontes extremamente ricas em abordagens alternativas para o ensino da matemática. A regra dos sinais para multiplicação, por exemplo, tem sido problemática perante toda a história e os autores de livros-textos têm usado múltiplas estratégias para esclarecer o assunto. Na verdade, a Educação Matemática tem resgatado várias dessas abordagens na composição das suas atividades para o ensino da referida regra. Assim, a leitura, pelo próprio aluno, de uma abordagem alternativa numa fonte histórica poderá ser muito eficaz.

Embora haja outras vantagens para o uso de livros-textos históricos, muitas delas vão transparecer nos artigos incluídos no presente volume. Assim, passaremos agora a fazer uma pequena introdução aos contextos desses artigos, recortando-os temporalmente nos seguintes três agrupamentos: o mundo antigo e a Idade Média, as eras pré-moderna e moderna e o passado recente.

O Mundo Antigo e a Idade Média

O primeiro capítulo do presente volume, da autoria das professoras Ana Carolina Costa Pereira e Isabelle Coelho da Silva, aborda a matemática do Egito antigo, debruçando sobre as medidas encontradas no célebre Papiro de Rhind. De certa forma, é surpreendente achar um documento matemática tão impressionante oriundo da antiga civilização egípcia, pois a cultura egípcia não é muito conhecida pela sua desenvoltura na matemática. Embora, mais tarde, os gregos eram quase unânimes em apontar ao Egito como sendo a origem da sua própria matemática, o que aprenderam dos egípcios era de fato originário da babilônia e pouco desenvolvido pelos egípcios. Por outra parte, há uma presunção de que as construções megalíticas dos egípcios, em especial as pirâmides, requereriam muito conhecimento matemático para serem edificadas. A referida presunção, contudo, é simplesmente falsa, pois a construção foi realizada com métodos empíricos práticos, aliados por uma aritmética de pouco alcance.

De fato, a história nos tem legado poucos documentos matemáticos do Egito antigo. Além de vários fragmentos de papiros, há apenas o Papiro de Berlim, o Rolo de Coro, o Papiro de Kahun, o Papiro de Moscou e o próprio Papiro de Rhind (Figura 1). Desses, os primeiros três são também fragmentários e, assim, são apenas o Papiro de Moscou e o Papiro de Rhind que contêm textos mais integrais. Tratam, basicamente, dos mesmos assuntos.

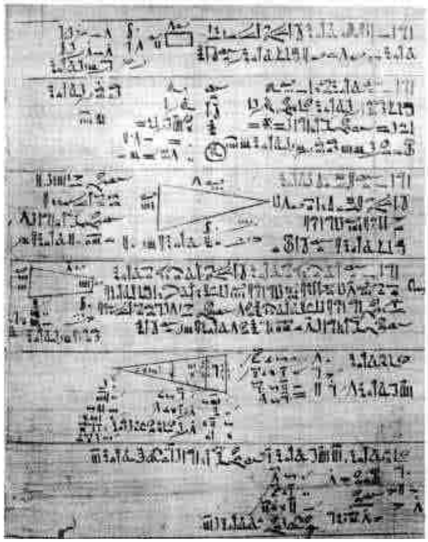


Figura 1. Um recorte do Papiro de Rhind.
Fonte: O'Connor & Robertson (2000).[1]

O Papiro de Rhind data de aproximadamente 1650 a.C.[2] e é assim chamado por ser adquirido pelo antiquário escocês, Alexander Henry Rhind (1833-1863); após o falecimento dele, o papiro foi vendido para o Museu Britânico. É também conhecido como o Papiro de Ahmes, sendo Ahmes o escriba que fez a cópia de um documento que data de aproximadamente 200 anos mais cedo, ou seja, por volta de 1850 a.C. Não se sabe do autor do documento original, mas sabemos que foi escrito para ser usado

1 O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. An Overview of Egyptian Mathematics. Disponível em: /www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_mathematics.html. Acesso em 08/11/2019.

2 Isto é, antes de Cristo. Frequentemente se usa a sigla inglesa BC (*before Christ*). Nossas autoras usam a abreviação a.E.C. (antes da era comum), que é muito empregada em contextos científicos.

no treinamento de escribas e, portanto, é certamente um dos livros-textos de matemática mais antigas que temos.

Em Capítulo 2, as professoras Bernadete Morey e Gabriela Lopes investigam o *Tratado Aritmético* de Al-Khwarizmi. O livro foi um marco importante no desenvolvimento da matemática árabe, pois explica o sistema de numeração e os métodos aritméticos dos hindus aos matemáticos do grande império árabe. Ao abordar os problemas encontrados na tradução dessa obra para o português, as reflexões das referidas professoras contribuem para um melhor entendimento do que é envolvido no uso de textos históricos na sala de aula contemporânea.

Figura 2. Al-Khwarizmi.
Fonte: O'Connor & Robertson (1999).[3]

---

3 O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html. Acesso em 08/11/2019.

Abu Já'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (Figura 2) nasceu, provavelmente, em, ou ao redor, de Bagdá, no atual Iraque, por volta de 780 e faleceu por volta de 850. Além do *Tratado Aritmético*, que só sobreviveu numa tradução para o latim, escreveu obras sobre astronomia, geografia e álgebra. Era membro da Casa de Sabedoria (*Bayt al-Hikmah*), uma academia prestigiosa fundada no século VIII. A Casa foi um centro de atividades culturais e seus membros se empenharam em fazer traduções de textos gregos e hindus, bem como perseguiam suas próprias contribuições originais ao desenvolvimento das ciências. Foi destruído por invasores mongóis em 1258.

A cultura árabe foi altamente marcada pelo seu contato com a herança grega. De modo geral, Aristóteles foi predominante e, na matemática, Euclides foi muito apreciado. No entanto, também sofreram grande influência das tradições aritméticas e algébricas dos povos hindus. Assim, conseguiram desenvolver trabalhos avançados na matemática que foram transmitidos, posteriormente, á matemática europeia, que era, na época, bastante menos desenvolvida.

As Eras Pré-Moderna e Moderna

Em Capítulo 3, o Prof. João Cláudio Brandemberg aborda a *Epitome Arithmeticae Practicae* (*Sumário de Aritmética Prática*) de Christopher (Christoph) Clavius (1538-1612). Clavius (Figura 4) nasceu na cidade de Bamberg, um posto importante no Sacro Império Romano, localizada na região de Francônia no norte da Baviera. Por volta de quinze anos após do falecimento de Clavius, a cidade angariou certa notoriedade devida à sua participação na caça de "bruxas". A repressão da bruxaria, de fato, era constante no cenário europeu durante vários séculos, alcançando uns máximos relativos durante a revolução protestante que estava eclodindo na

Alemanha nessa época. A Francônia, contudo, se manteve fiel à Igreja Católica e o próprio Clavius ingressou na militante ordem dos jesuítas.

O nome “Clavius” é relacionado à palavra latina *clavis* que significa “chave”. Visto que era muito comum adotar nomes latinizados na época, especula-se que o nome original alemão do nosso matemático foi algo que significa “chave” nesse idioma, mas não temos qualquer registro que comprova, ou não, o mesmo. Mas, “Clavius” relembra a forma do genitivo plural clavium, “das chaves” o que poderia indicar que recebeu o nome devido a algum encargo relacionado às chaves, digamos, da Universidade de Coimbra, onde ele foi para estudar em 1556, depois de ter entrado na Sociedade de Jesus em 1555. Seja isto como for, era durante sua estadia em Coimbra que Clavius observou um eclipse espetacular do sol e, em consequência, começou a estudar a matemática e a astronomia intensivamente. Em 1560 foi para o Collegio Romano, um instituto jesuíta em Roma, para mais estudos teológicas e ficou lá como professor.

Clavius era considerado pelos seus contemporâneos a maior autoridade da época sobre assuntos astronômicos. Foi um dos principais arquitetos da reforma gregoriana do calendário juliano, que era importante para a Igreja para a determinação da data da Páscoa, e inventou vários instrumentos astronômicos. Foi amigo e correspondente de Galileo Galilei (1564-1642) e instigava à comunidade científica interpretações das descobertas de Galileo que seriam consoantes com a doutrina da Igreja. Além da *Aritmética* discutida na presente coletânea, Clavius também escreveu livros-texto muito influentes de geometria e astronomia.

Figura 3. Cristoph Clavius.
Fonte: O'Connor & Robertson (2008).[4]

O professor Iran Abreu Mendes, no quarto capítulo da presente obra, aborda o livro *Elémens généraux des principales parties des mathématiques, nécessaires à l›artillerie et au génie* (*Elementos Gerais das Principais Partes da Matemática Necessária para a Artilharia e Engenharia*) de l'abbé Deidier, que foi publicado em 1745. O abade nasceu em 1698 na cidade de Marseille (Marselha), um importante porto mediterrâneo no sul da França. Interessantemente, o hino nacional da França, La Marseillaise, recebeu esse título em homenagem às tropas marselheses da Revolução Francesa.

4 O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. Christopher Clavius. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clavius.html. Acesso em 08/11/2019.

Deidier foi professor de matemática na Escola Real de Artilharia de La Fére, localizada no norte do país, perto da fronteira com a Bélgica. A Escola foi fundada em 1720 e, nos próximos anos, evoluiria ao ponto de ser a mais importante escola francesa de artilharia. Deidier chegou em La Fère (ver a Figura 4) em torno de 1741 e ficou conhecido como autor de textos pedagógicos sobre a aritmética, a geometria e o cálculo, bem como suas aplicações à engenharia. Faleceu precocemente em 1746, no pleno Século das Luzes (que abordaremos mais adiante).

Figura 4. Uma gravura de La Fère.
Fonte: Deutsche Fotothek.[5]

Os próximos dois capítulos abordam aspectos da matemática de Leonhard Euler. O primeiro (Capítulo 5), da autoria do presente escritor, é uma comparação de três introduções à álgebra, produzidas, respectivamente, por Wallis, Euler e De Morgan. O segundo (Capítulo 6), da autoria do Prof. Miguel Chaquiam analisa a apresentação de Euler do importante conceito de função.

5 Deutsche Fotothek, Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6480610. Acesso em 08/12/2019.

Dos matemáticos mencionados no parágrafo anterior, o mais velho é John Wallis (1616-1703), que nasceu na cidade de Ashford (Kent) no sudeste da Inglaterra, perto de Canterbury e sua famosa catedral, sede da Igreja Anglicana. Entrou na Universidade de Cambridge em 1632, onde estudava tudo (ou assim se parece!) menos a matemática. Mas, havia lido vários livros matemáticos, embora apenas os que ele achava por acaso, e teve o dom de poder fazer com facilidade compridos cálculos mentais. Essa habilidade certamente foi instrumental na realização das suas façanhas relacionadas a criptografia durante a guerra entre o parlamento e o rei (1642-1651) que resultaram na sua promoção dentro da Igreja Anglicana. Mas, logo ficou financeiramente independente com o falecimento da sua mãe, Joanna, em 1643, quando herdou grandes propriedades em Kent.

Figura 5. John Wallis.
Fonte: O'Connor & Robertson (2002).[6]

6 O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. John Wallis. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wallis.html. Acesso em 08/11/2019.

Wallis (Figura 5) foi um dos fundadores da Sociedade Real e foi nas reuniões desse grupo que ele descobriu a *Clavis Mathematicae* (*A Chave da Matemática*) de William Oughtred (1574-1660), que, em contraste a Wallis, apoiava o rei contra o parlamento. Mesmo assim, Wallis reconheceu a importância matemática do livro de Oughtred, especialmente em relação à álgebra, e é possível que Wallis achou em Oughtred o modelo para as suas atitudes contra os matemáticos franceses, especialmente contra René Descartes (1596-1650). É provável que foram as suas atividades ligadas à Sociedade Real e sua posição nos arquivos da Universidade de Oxford que o levaram a apreciar a obra, muita da qual não havia sido publicada (ver o próximo parágrafo), de Thomas Harriot (1560-1621). De fato, foi devido ao interesse de Wallis que Harriot foi reconhecido pela comunidade científica e ambos Oughtred and Harriot exerceram grande influência sobre o *Treatise of Algebra* de Wallis.

Em 1649 Wallis foi agraciado com uma cátedra (Savilian Chair) de geometria na Universidade de Oxford e em 1657 ganhou o posto (concorrente) de diretor dos arquivos dessa universidade. Sua obra mais importante foi a *Arithmetica Infinitorum*, em que ele aborda os métodos pioneiros de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) sobre o Cálculo Infinitesimal, mudando a apresentação geométrica de Cavalieri para uma formulação algébrica. Também investigou séries infinitas e o teorema binomial generalizado. Entre suas outras obras, há livros sobre as seções cônicas e a mecânica. Sua obra foi muito influente no desenvolvimento de Isaac Newton (1643-1727).

Figura 6. Leonhard Euler.
Fonte: O'Connor & Robertson (1998).[7]

O segundo do trio de matemáticos mencionados acima é Leonhard Euler (1707-1783). Nasceu na cidade de Basileia na Suíça e ingressou na Universidade de Basileia para estudar, conforme os desejos do seu pai, teologia. Seu interesse e, acima de tudo, sua habilidade em matemática, no entanto, foram logo descobertos por Johann Bernoulli (1667-1748), professor da Universidade e um dos mais distintos matemáticos da época. Talvez ainda mais decisiva para o destino do jovem Euler (Figura 6) foi o fato de Bernoulli ter sido colega do pai quando estiveram ambos universitários e assim conseguiu do velho amigo seu consentimento para

7 O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. Leonhard Euler. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html. Acesso em 08/11/2019.

a mudança do curso do filho para o de matemática. Euler travou amizade com os filhos de Bernoulli e, através da influência deles, recebeu convite para ser docente na recém-fundada Academia Imperial de São Petersburgo. Chegou à (então) capital russa em 1727, onde ficou até 1741. Devido a situação política do país, que acabou sendo desfavorável aos estrangeiros que lá moravam, bem como o medo da sua mulher, Katharina Gsell (1707-1773), dos incêndios que periodicamente decimava as casas de madeira de São Petersburgo, mudou para a academia de Berlim, onde permaneceu de 1741 a 1766. Desentendimentos com seu patrão, Frederico II (1712-1786), o levou a aceitar o convite de Catarina II (a Grande) a voltar para a Academia de São Petersburgo, onde ficou até seu falecimento em 1783.

A vida de Euler quase atravessa todo o Século das Luzes (século XVIII), o que é assim denominado devido ao fato de a filosofia geral da época ser o iluminismo. Altamente influenciados pelo racionalismo de Descartes, os iluministas confiavam na razão humana para garantir o progresso da humanidade. Apostaram que uma crítica racional das crenças que dominavam a organização social do homem revelaria a pobreza do pensamento tradicional e apontaria para novos caminhos que poderiam transformar a história. Nesse sentido, foram desconfiantes, senão fracamente hostis, à religião tradicional, especialmente à Igreja Católica com sua pletora de dogmas, e ao absolutismo na política. Os pensadores alemães, como Immanuel Kant (1724-1804) e o próprio Euler tendiam a tentar conciliar suas crenças religiosas com as atitudes iluministas, mas os pensadores franceses tendiam a ser muito mais radicais. Em qualquer caso, viram a ciência como o modelo do verdadeiro conhecimento e, de fato, foi durante o iluminismo que a matemática, especialmente com o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, começou a ser aplicada com grande sucesso aos problemas do dia a dia. Nisto, Euler foi fiel à sua época, pois, além dos seus estudos da matemática pura, também se empenhou muito no desenvolvimento da matemática aplicada e na ciência matematizada.

Na verdade, o problema que temos de enfrentar ao tentar resumir o trabalho de Euler é a sua prolificidade. A bibliografia da obra de Euler compilada pelo matemático sueco Gustaf Eneström (1852-1923) lista 866 itens diferentes. Foi inovador nas áreas de Análise Matemática, Equações Diferenciais, Teoria dos Números, Álgebra, Física (especialmente a Mecânica), Geometria, Trigonometria e Astronomia. Trabalhos seus venceram o prestigioso prêmio da Academia de Paris uma dúzia de vezes e ele manteve uma correspondência intensa com vários dos mais importantes matemáticos da sua época. Sua resolução de um problema recreativa, o das sete pontes de Königsburgo, fundou a Teoria dos Gráficos e ele foi um dos primeiros matemáticos a abordar conceitos topológicos. Além das suas atividades de pesquisa, Euler teve de se ocupar com questões burocráticas tanto na Academia de São Petersburgo, quanto na Academia de Berlim. Também tinha de enfrentar problemas de visão, ficando virtualmente cego ainda no auge da sua carreira.

O último do trio de matemáticos considerados no Capítulo 5 da presente coletânea é Augustus De Morgan (1806-1871). De Morgan (Figura 7) nasceu em Madura (agora Madurai) no sul da Índia, onde seu pai, um oficial do exército britânico colonizador, servia. Como Euler, teve problemas de visão num olho e foi uma criança frágil, o que lhe custo caro, pois sofreu o *bullying* dos seus colegas de classe na escola primária e secundária. Em 1828, tornou-se o primeiro professor de Matemática na recém-fundada University College London. Foi um dos fundadores e primeiro presidente da Sociedade Matemática de Londres e membro da Sociedade Real de Astronomia, mas recusou a participar na Sociedade Real de Londres porque, apesar do seu presígio como uma sociedade científica, De Morgan pensava que ela representava demasiadamente a classe privilegiada. Em contrapartida, ele foi ativo em organizações que promoviam o bem-estar dos menos favorecidos, como a Society for the Diffusion of Useful Knowledge (Sociedade para a Divulgação de Conhecimento Útil, fundado em 1826). Como Wallis, teve interesses antiquários.

Figura 7. Augustus De Morgan.
Fonte: O'Connor & Robertson (1996).[8]

O período de 1789 a 1799 foi acometido pela Revolução Francesa. Os excessos desse movimento marcaram um certo desencantamento com as aspirações do iluminismo. Muitos pensadores viram, no início, Napoleão Bonaparte (1769-1821) como o grande salvador dos princípios iluministas na política, mas este logo se revelou como sendo apenas mais um megalomaníaco interessado somente em mandar em tudo e todos. Tendo sofrido essas decepções, a Europa do século XIX voltou a sua atenção à alimentação das inovações trazidas pela Revolução Industrial.

8 O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. Augustus De Morgan. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Morgan.html. Acesso em 08/11/2019.

Houve, de fato, muito progresso associado ao desenvolvimento de novos processos de manufatura e de novos métodos de acumular e utilizar o capital, mas houve também muitas consequências nefastas. Como já mencionamos, De Morgan ajudava a combater essas consequências, não no sentido de querer modificar as novas estruturas socias, mas no sentido de apoiar o assistencialismo.

De Morgan foi aluno e amigo de George Peacock (1791-1858), cuja axiomatização dos números inteiros (anéis) legitima os números negativos. Na sua própria obra *Trigonometry and Double Algebra*, publicado em 1849, De Morgan procura uma interpretação geométrica para os números complexos e correspondeu com William Rowan Hamilton (1805-1865) sobre tentativas de generalizar esse tipo de número. Mesmo assim, mostra uma certa hesitação em aceitar os números negativos, alegando que não valem na aritmética, mas sim na álgebra. Que o problema não era ligado às várias subdisciplinas da matemática, mas ao conjunto numérico em que a aritmética estava sendo feita, não parece ter sido claro para De Morgan. Na verdade, contanto que os números negativos fossem concebidos, mesmo implicitamente, como correlatos teóricos de quantidades menores do que o nada, seria difícil aceitar os negativos. Outra possível fonte de confusão para De Morgan é o fato de ele ser casado com Sophia Frend (1809-1892), filha de William Frend (1757-1841), um dos últimos ferrenhos opositores dos números negativos da Inglaterra. Em qualquer caso, De Morgan também foi amigo de George Boole (1815-1864) e, como este, investigava a matematização da lógica.

O Passado Recente

Em Capítulo 7, da autoria do professor Manoel de Campos Almeida, entramos no ensino do Cálculo através do livro *Elements of the Differential and Integral Calculus*, editado no Brasil sob o título *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral* (Figura 8). Seu autor original foi W. A. Granville (1863-1943); posteriormente contava com o apoio dos coautores P. F. Smith (1867-1956) e W. R. Longley (1880-1965). William Anthony Granville nasceu na cidadezinha de Vasa Township no sudeste do estado norte-americana de Minnesota. O referido lugarejo, provavelmente fundado por emigrantes suecos, recebeu o nome de Vasa em homenagem a Gustav I (Gustav Ericsson, da linhagem Vasa, 1496-1560) da Suécia. Granville estudou na Yale University, onde lecionou por alguns anos antes de assumir a direção da Gettysberg College, uma universidade afiliada com os luteranos. Foi sob a sua direção como o sexto presidente da instituição que Gettysberg College obteve acreditação do governo americano. Saiu de Gettysberg em 1923 para assumir uma posição com uma companhia de seguros.

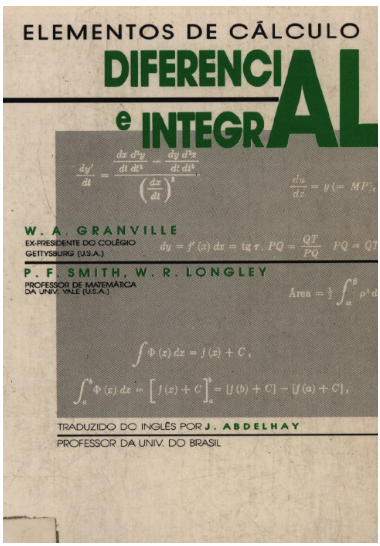


Figura 8. Edição Brasileiro do "Granville".
Fonte: Passeidireto (s.d.).[9]

9 Passeidireto. Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/61970815/elementos-de-calculo-diferencial-e-integral-w-a-granville-p-f-smith-w-r-longley. Acesso em 08/11/2019.

O Cálculo é, por assim dizer, o portal para a matemática superior. Por um lado, apresenta ao aluno questões que serão abordadas mais profundamente na Análise Matemática; por outro lado, inicia o aluno a métodos e técnicas que são largamente empregados nas ciências da natureza, na tecnologia e nas ciências sociais. Assim sendo, é ensinado a um grande número de alunos de vários cursos todo ano. Há, no entanto, uma porcentagem muito alta de alunos que desistem da disciplina ou que são nela reprovados e isto tem ocasionado muita preocupação com o ensino dessa disciplina desde pelo menos os meados do século XX, senão antes. Em resposta à referida preocupação, a Educação Matemática tem proposto várias estratégias para melhorar a compreensão sobre o Cálculo. Entre outras coisas, há a procura de livros-textos sempre mais inteligíveis. O "Granville" foi um desses textos que houve uma grande aceitação pelo aluno. Embora seja atualmente considerado ultrapassado, ainda é uma introdução interessante ao Cálculo.

O oitavo e último capítulo, da autoria dos professores Moysés Gonçalves Siqueira Filho e Clarice Segantini, é dedicada à obra de Malba Tahan, em especial a *O Homem que Calculava*. Malba Tahan era o pseudônimo de Júlio César de Mello e Sousa (1895-1974). Carioca de nascimento, Mello e Sousa (Figura 9), junto com seus pais, foi morar em Queluz, uma pacata cidade paulista, localizado perto da junção dos estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Minas Gerais. Era uma criança engenhosa que gostava de criar sapos e estórias imaginativas. Aos dez anos foi mandado de volta ao Rio para estudar no Colégio Militar e, subsequentemente, no Colégio Pedro II. Formou-se como engenheiro civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro em 1913 e entrou na carreira do magistério nesse mesmo ano. Interessantemente, iniciou a carreira ensinando história e geografia e, depois, física. Descontento com a parte laboratorial do ensino de física, passou a ensinar a matemática.

Figura 9. Júlio César de Mello e Sousa.
Fonte: Wikipédia (2019).[10]

Como aluno, Mello e Sousa não se destacou nas aulas de matemática, o que ele atribuía a pobre metodologia de ensino adotado por seus professores. Assim, como professor dessa disciplina, adotou metodologias inovadores, pelos quais procurava estimular o interesse e a criatividade do aluno. Utilizava bastante os materiais manipulativos e, ironicamente para quem havia fugido dos laboratórios de física, defendia calorosamente a utilização de laboratórios de matemática no ensino da matemática. Foi com suas habilidades como autor, no entanto, que ele se revelou como um educador matemático diferenciado. Criou estórias de ficção em que problemas matemáticos foram embutidos de tal maneira a captivar o interesse do leitor e instigar sua curiosidade sobre a matemática.

---

10 Wikipédia. "Júlio César de Melo e Sousa." Disponível em: https://pt.wikipedia. org/wiki/J%C3%BAlio_C%C3%A9sar_de_Melo_e_Sousa. Acesso em 07/11/2019.

1

O PAPIRO DE *RHIND* NA ARTICULAÇÃO ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DE MEDIDAS

Ana Carolina Costa Pereira
Isabelle Coelho da Silva

Introdução

Estudos de documentos históricos no ensino tem se tornado constante na área de pesquisa da educação matemática no Brasil, principalmente, nos últimos dez anos (SILVA, 2018). Isso pode ter sido acarretado pela facilidade de acesso a obras originais completas disponibilizadas em plataformas digitais de grandes bibliotecas nacionais e europeias[1], que em qualquer lugar no mundo podem ser estudadas, analisadas e traduzidas, possibilitando a realização de um tratamento didático e incorporação

1 No Brasil um centro de referência para aquisição de obras históricas é a biblioteca CESIMA Digital, do Centro Simão Mathias de Estudos em História das Ciências da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (http://cesimadigital.pucsp.br/). Na Europa, dentre várias Bibliotecas Digitais importantes, é importante citar a Gallica (https://gallica.bnf.fr/).

na sala de aula. Embora ocorra alguns obstáculos até sua incorporação da educação básica (MASSA-ESTEVE, 2011), o uso de documentos históricos no ensino de matemática é um campo promissor que possui um potencial didático de atuação.

Segundo Saito (2015, p. 27), o conceito de documento original vai além dos livros e tratados, mas inclui também "[...] cartas, manuscritos, minutas e outros documentos não só escritos, mas também aqueles da cultura material, tais como instrumentos, monumentos, máquinas etc." Nesse sentido, o educador matemático pode selecionar um excerto escrito desses materiais para realizar suas investigações, o que é chamado de texto original. Esse recorte é necessário devido à grande complexidade do estudo, que inviabiliza a análise de um original completo visando o ensino seja realizada em apenas uma consulta.

Além disso, o seu estudo requer muita atenção e dedicação, pois exige tempo e formação do profissional para a compreensão e análise do seu conteúdo, do contexto e da epistemologia no qual está inserido. Essa já é uma tarefa delicada para o historiador que teve formação para lidar com esse tipo de material, portanto é ainda mais árdua para o educador matemático, que tem sido o principal personagem em pesquisa visando o seu uso em sala de aula. (SILVA, 2018).

Mesmo com a disponibilização de alguns materiais em bibliotecas digitais, ainda há uma grande dificuldade de acesso a muitos deles. Em alguns casos, não existe uma diversidade significante de fontes de informação da época do próprio documento, dificultando a análise do contexto em que ele está inserido. Além disso, a sua leitura também representa um impasse, principalmente, pelos idiomas em que eles estão escritos, que podem ser estrangeiros e/ou arcaicos. Dessa forma, os educadores matemáticos têm recorrido a traduções e versões mais atuais de textos originais, o que pode ser feito pelo objetivo da sua pesquisa não ser a análise histórica, mas a identificação de potencialidades didáticas para o ensino da sua disciplina.

Dentre os documentos históricos que merecem destaques, encontra-se o Papiro de *Rhind*. Este é um texto encontrado em meados do século XIX, aproximadamente em 1858, nas ruínas próximo ao templo mortuário de Ramesseum na cidade de Tebas as margens do rio Nilo, no Egito e vendido ao advogado e antiquário escocês, Alexander Henry Rhind. Esse documento contém 87 problemas de ordem práticos em que podem ser identificados diversos conceitos matemáticos.

Dentre os conteúdos tratados no papiro, muitos apresentam possíveis potencialidades didáticas para a sala de aula, a fim de discutir a formação do conceito a partir da matemática presente na sociedade egípcia. Assim, com leituras e análises feitas no Papiro de *Rhind*, foi identificado uma possibilidade de estudo com medidas. Embora as medidas apresentadas no documento sejam diferentes das ensinadas hoje em sala de aula no Brasil, o seu estudo pode ajudar na compreensão da construção desse conceito.

Dessa forma, esse capítulo tem o propósito de apresentar alguns conhecimentos matemáticos envolvendo o estudo de medidas presente no Papiro de *Rhind* com o intuito de discutir a possibilidades da sua incorporação em aulas da educação básica e formação de professores que ensinam matemática. Para isso, dividimos a escrita em quatro partes. Na primeira, é apresentada, de forma sucinta, uma discussão sobre a incorporação de textos históricos na articulação entre história e ensino de matemática sob uma perspectiva historiográfica atualizada. Na segunda parte, o Papiro de *Rhind* é exposto, contextualizando historicamente esse documento. Em seguida, é apresentado um estudo, ainda preliminar, das várias unidades de medidas que aparecem em problemas presentes no Papiro de *Rhind*. Por fim, na quarta parte, algumas observações são feitas sobre a importância desse documento para a educação matemática apontando possibilidades de discussão e inserção dele em sala de aula.

O Uso de Textos Históricos na Articulação entre História e Ensino de Matemática

Articular a história e o ensino de matemática não é algo novo. Entretanto, sob o olhar de uma escrita historiográfica atualizada, buscando possíveis potencialidades pedagógicas da história da matemática, vem tornando-se cada vez mais viável no sentido de adentrar as novas propostas curriculares estudadas no século XXI. Grupos de estudos e pesquisas[2] trazem discussões e reflexões cujo foco está na construção de uma interface entre história e ensino de matemática sob uma perspectiva historiográfica atualizada, pautada principalmente na formação do professor de matemática que teve por objetivo retomar e examinar o papel da história da matemática no ensino.

Para Saito e Dias (2013, p. 92), uma interface[3] é "o conjunto de ações e produções que provoca a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática". Nesse sentido, a construção de uma interface visa aproximar as duas áreas de conhecimento, a história da matemática e a educação matemática, pois ambas têm objetos de investigação específicos e bem definidos e a intenção não é sobrepô-los, mas buscar aquilo que cada campo tem em comum, que parte do conhecimento matemático.

Assim, um diálogo entre as duas áreas pode ser realizado tendo por base "um documento histórico, que pode ser um texto ou excerto de um texto, ou ainda um instrumento, um monumento, uma foto, uma imagem, uma figura, um vídeo, entre muitos

2 Grupos como o História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMA) da PUCSP e o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) da UECE fazem essa discussão.

3 A ideia de interface voltada para a história da ciência e o ensino pode ser encontrada em Beltran (2009) em que apresenta diferentes tendências pedagógicas.

outros" (PEREIRA, SAITO, 2019, p. 347). Ou seja, somente depois de uma escolha consciente desse documento histórico, ou mesmo do seu estudo e análise, que o diálogo é iniciado.

A partir da escolha do documento dois movimentos são realizados: um que busca contextualizar historicamente os conhecimentos matemáticos sob o aspecto contextual, o historiográfico e o epistemológico, e outro, revelando o movimento do pensamento na formação do conceito matemático que se quer abordar.

Dessa forma, na medida em que esse diálogo é promovido, ele propicia uma reflexão do processo histórico da construção do conhecimento matemático e a construção da interface, fazendo emergir diferentes questões, sejam elas didáticas, conceituais (matemática), ou epistemológicas, promovendo uma rica articulação entre história e ensino que conduz à elaboração de atividades. A atividade resultante da interface "busca refletir o processo da produção do conhecimento que, dependendo da intencionalidade do educador, poderá ser orientada para diferentes propostas de ensino" (SAITO; DIAS, 2013, p. 101) e sendo organizada em três etapas inter-relacionadas: o tratamento didático do documento; a intencionalidade e plano de ação; e o desenvolvimento[4].

Dentro dessa perspectiva, esse capítulo busca tratar do primeiro movimento da interface, ou seja, fazer uma contextualização histórica dos conhecimentos matemáticos exposto no Papiro de *Rhind*, tentando observar o aspecto contextual, o historiográfico e o epistemológico do documento estudado em relação a medidas egípcias.

O Papiro de *Rhind*

Os egípcios já realizavam registros desde aproximadamente o quarto milênio a.E.C, contudo os textos matemáticos estão datados por volta de 2000 a.E.C. As matemáticas presentes

4 Sobre a construção de interfaces entre história e ensino, vide: Saito e Dias (2013), Saito (2016) e Pereira e Saito (2019).

nessa sociedade estavam associadas, sobretudo, às necessidades administrativas, sendo os papiros a principal forma de acesso a elas hoje. Esse tipo de documento histórico era produzido pelos escribas, estando inserido dentro de uma tradição pedagógica que buscava instruir e prever situações que os futuros escribas poderiam encontrar. (ROQUE, 2012).

O Papiro Matemático de Rhind ou Papiro de *Rhind*[5], como é conhecido no Brasil, é um dos principais documentos históricos que remete aos egípcios, tendo sido redigido por volta de 1650 a.E.C. pelo escriba A'hmosè ou Ahmes[6]. Como esse estudo é voltado para reflexões em educação matemática, as análises puderam ser realizadas a partir de uma tradução livre da língua original, o hierático, para o inglês, feita por Arnold Buffum Chace. Essa tradução foi publicada inicialmente em dois volumes, em 1927 e 1929, sendo reimpressa em 1979, que é a edição utilizada aqui.

O livro de Chace (1979) também traz algumas informações sobre o documento, que foram compiladas a partir de sua leitura, e sobre o seu descobrimento no século XIX. O autor afirma que o papiro foi encontrado em Tebas, próximo ao Ramesseum[7] e comprado por Alexander Henry Rhind em 1858, sendo adquirido pelo Museu Britânico após a sua morte. A tradução livre de Chace (1979, p. 49, tradução nossa[8]) indica que o título dado para

---

5 Chace (1979) destaca a importância do uso do nome completo para diferenciação de outros dois documentos chamados "Papiro de *Rhind* 1" e "Papiro de *Rhind* 2", que são papiros mágicos que possuem passagens sobre embalsamamento e estão localizados no Museu Real da Escócia. Entretanto, nesse capítulo é tratado apenas do "Papiro Matemático de *Rhind*" e "Papiro de *Rhind*" é utilizado como sinônimo para o mesmo documento.

6 Devido ao nome do seu escriba, esse documento também ficou conhecido por Papiro de Ahmes.

7 Templo funerário do faraó Ramessés II, localizado na Província de Luxor, Egito.

8 "The entrance into the knowledge of all existing things and all obscure secrets" (CHACE, 1979, p. 49).

esse documento foi: “A entrada para o conhecimento de todas as coisas existentes e de todos os segredos obscuros”.

Além disso, na folha em que encontra-se o título (Figura 1), pode-se ver alguns dados importante, como o nome do escriba e a época em que ele foi copiado, que foi no “[...] ano 33, no quarto mês na temporada de inundação, sob a majestade do rei do alto e baixo Egito, ‘A-user-rÊ’[...]”, (CHACE, 1979, p. 49, tradução nossa[9]). A partir do período de dinastia desse faraó, o Papiro de *Rhind* foi datado de aproximadamente 1650 a.E.C.

Figura 1. Folha inicial do Papiro de *Rhind* contendo os problemas sobre frações.
Fonte: Robins e Shute (1987, Plate 1).

9 “[…] year 33, in the fourth month of the inundation season, under the majesty of the king of Upper and Lower Egypt, ‘A-user-Rê’[…]” (CHACE, 1979, p. 49).

Após a folha inicial, Chace (1979) mostra o conteúdo do papiro, classificado e dividido pelo autor em capítulos e seções a partir da matemática do presente. Inicialmente, tem-se tabelas de divisão do 2 por números ímpares, iniciando do 3 até o 101. Nessa seção podem ser vistos o método utilizado pelos egípcios para realizar divisões e o uso das frações unitárias[10], o que tem sido tema de muitas pesquisas em história da matemática e ensino[11], por exemplo Lopes (2008) e Pereira, Martins e Silva (2017).

Em seguida, o papiro traz 87 problemas e suas soluções, que poderiam ser situações enfrentadas pelos futuros escribas em seus encargos no dia a dia, tais como: a divisão de uma quantidade de pães por um número de homens; problemas de 'aha' ou em busca de uma quantidade; divisão de medidas; áreas e dimensões; inclinação da face de pirâmides; etc. A partir do conceito que eles abordam, são classificados por Chace (1979) como: aritmética egípcia; geometria; e problemas diversos.

Nesse sentido, é preciso tomar cuidado com essa identificação dos conceitos matemáticos do passado a partir das definições na matemática moderna. Ao estudar as questões do Papiro de *Rhind*, Roque (2012, p. 86) salienta que "os procedimentos descritos não caracterizam a existência de uma geometria no sentido da que nos foi legada pelos gregos". Assim, pode-se perceber que as resoluções apresentadas pelos egípcios, embora tratassem de conceitos que são entendidos hoje como geométricos, são aritméticas.

Além disso, embora os problemas do Papiro de *Rhind* estejam voltados para atividades do dia a dia, é anacrônico afirmar que a matemática egípcia seria essencialmente prática e com soluções baseadas em tentativa e erro. A organização do documento

---

10 Para explicações de como esses métodos eram utilizados, vide Roque (2012).

11 É importante destacar que a maioria dessas pesquisas têm como base uma perspectiva historiográfica presentista e buscam convenientemente no passado os conceitos que são ensinados hoje em sala de aula.

mostra uma série de problemas que envolvem um mesmo tipo de procedimento, podendo indicar um tipo de generalidade nas resoluções dadas pelos escribas. (ROQUE, 2012).

Uma das particularidades de vários dos problemas desse papiro é a utilização de unidade de medidas para expressar os resultados dos problemas. Chace (1979) dedica uma seção de seu livro para explicar um pouco sobre essas medidas antes de iniciar a tradução do papiro, em que indica haver estudos que foram elaborados apenas sobre esse assunto, demonstrando a importância da sua discussão. Esse tema é discutido a seguir, buscando identificar quais potencialidades didáticas podem emergir desse estudo.

Medidas Egípcias no Papiro de *Rhind*

Vários problemas presentes no Papiro de *Rhind* envolvem unidades de medida, em particular ligadas a cálculos de comprimento, área e volume. Segundo Roque (2012, p. 38) "a quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração do Egito".

As unidades de medida[12] egípcias aparecem em muitos problemas que são considerados referentes à geometria por Chace (1979). São 44 problemas no Papiro Rhind, em que são feitas referências a pesos e a medidas. Entretanto, é necessário salientar que chamar os cálculos feitos pelos egípcios de geometria, a partir dos conceitos modernos, pode ser anacrônico, pois "os procedimentos descritos não caracterizam a existência de uma geometria no sentido da que nos foi legada pelos gregos. Chamar de 'geometria' tais operações pressupõe esclarecer que ela é bastante distinta daquela que se desenvolve posteriormente" (ROQUE, 2012, p. 86).

12 O sistema numérico egípcio é decimal.

Além das já mencionadas, no decorrer dos problemas propostos, outras unidades aparecem no texto, tais como, as unidades de declive, como por exemplo o Seked. Segundo Robins e Shute (1987), essas unidades incomuns para o sistema métrico atual aparecem na planicidade de uma superfície, na face de uma pirâmide e na falta de qualidade de produtos como pão e cerveja, em que indicam um fator de diluição. Nesse último caso, quanto maior a grandeza apresentada, menor a qualidade do produto.

A unidade de comprimento padrão utilizada pelos egípcios e que está contida no Papiro de *Rhind* é o *royal cubit* (cúbito ou côvado real), também chamado de *cubit* "maior". Fazendo uma transformação para a unidade de medida atual, ele equivale à, aproximadamente, 52,5 cm[13]. O *cubit* "maior" pode ser subdividido em 7 palmas, ou 7,5 cm, na qual cada palma pode ser dividida em 4 dedos, ou 1,875 cm. A palavra *cubit* está relacionada à parte do antebraço, pois '*cubitum*' é o termo em latim para "cotovelo", ou seja, equivale à maior distância entre o osso do cotovelo à ponta do dedo médio do faraó vigente (SCOTT, 1942).

Entretanto, essa medida a partir de um homem mediano não seria igual à um *cubit* real. Robins e Shute (1987) se remetem a um *cubit* "menor" que corresponde a distância do cotovelo à ponta do dedo de um homem egípcio antigo, tendo apenas 6 palmas ou cerca de 45 cm de comprimento. Eles ressaltam que o *cubit* "menor" não aparece no Papiro de Rhind, "mas provavelmente foi usada para fins de medição diária, para os quais o comprimento do antebraço teria sido particularmente conveniente" (ROBINS; SHUTE, 1987, p. 13, tradução nossa[14]). Dessa forma, o *cubit*

13 Existem variações em relação a essa medida, por exemplo, Scott (1942) afirma que um *cubit* real era igual à 52,3cm.

14 "[...] but as probably used for everyday measuring purposes, for which the forearm length would have been particularly convenient" (ROBINS; SHUTE, 1987, p. 13).

real, ou “maior”, é utilizado nos problemas contidos no Papiro de Rhind, principalmente, naqueles relacionados a medições arquitetônicas e de terra. Para a medição da terra, os egípcios utilizavam cordas (Figura 2), na qual “uma distância de 100 *cubit*s ao longo de uma corda era chamada de *khet*” (ROBINS; SHUTE, 1987, p. 13, tradução nossa[15]).

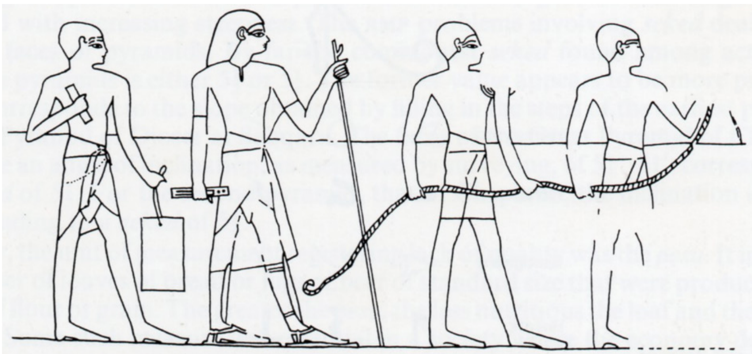


Figura 2. Imagem do túmulo de Djeserkaresonb em Tebas, em que um campo de milho é medido com uma corda.
Fonte: Robins e Shute (1987, p. 13).

Outras subdivisões do *cubit* também eram utilizadas pelos egípcios. Segundo Silva, Batista e Pereira (2018, p. 5), “para pequenas medidas, havia também o *small span*, que era a medida do polegar ao indicador, e o *great span*, que era a medida do polegar ao dedo mínimo, que seria atualmente o nosso palmo”. O Quadro 1 mostra a relação das unidades de medida egípcias com suas subdivisões e o sistema internacional de medidas.

15 “[...] a distance of 100 *cubit*s along a rope was called a *khet*” (ROBINS; SHUTE, 1987, p. 13).

Forma	Nomenclatura	Medida Egípcia	Sistema Internacional de Medidas
	**1** *Cubit* **Real** **(*Royal* *Cubit*)**	7 palmas 20,59 polegadas 28 dedos	52,5 cm
	**1** *Cubit* **Menor** **(*Short* *Cubit*)**	6 palmas 17,74 polegadas 24 dedos	45 cm
	**1 Palma** **(*Shep*)**	1/7 *cubits* 2,94 polegadas 4 dedos	7,5 cm
	**1 Dedo** **(*Téba*)**	¼ palma ¾ polegadas ou 0,735 polegadas	1,875 cm
	**Polegar ao indicador** ***(Small Span)***	3 palmas 12 dedos	22,5 cm
	**Polegar ao dedo Mínimo** ***(Great Span)***	3 ½ palmas 14 dedos	26,25 cm

Quadro 1. Síntese de unidades de medidas (comprimento).
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Para medida linear da terra, ou seja, a área, a unidade comum era o *khet* (100 *cubit*s reais) ou o quadrado do *khet* denominado de *setat* (10.000 *cubit*s quadrados). Segundo Robins e Shute (1987) para áreas menores o *setat* foi dividido progressivamente pela metade (1/2), um quarto (1/4) e um oitavo (1/8), em que é presumido que essas divisões teriam um nome específico, devido elas terem símbolos especiais no Papiro de *Rhind*. Os autores relacionam a medida do *setat* a 2/3 de um acre ou 0,275 hectares, que seria 2.750 m^2.

Nos problemas práticos, o *setat* também poderia ser dividido no que foi chamado de "tiras de *cubit*s"[16] (Figura 3), ou seja, uma tira (retângulo) de 1 *khet* de comprimento e 1 *cubit* de largura.

16 *cubit*-strips.

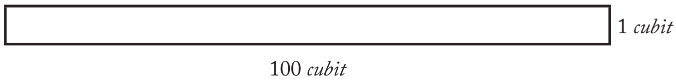


Figura 3. Tiras de *cubit*s.
Fonte: Elaborado pelas autoras

Outra possível divisão do *setat* era a sua metade, que foi denominada *remen*, “[...] sendo o quadrado de 100 do *remen* linear de 5 palmas de comprimento” (GRIFFITH, 1892, p. 410, tradução nossa[17]). Embora essas grandes medições pudessem ser expressas em *cubit*s, é preciso ressaltar que o *cubit* quadrado, utilizado para a medição de pequenas áreas, é raramente encontrado.

Algumas dessas utilizações podem ser encontradas nos problemas 48 a 55 do Papiro de *Rhind*, que envolvem cálculos de áreas e utilizam unidades de medidas como o *cubit* e *khet*. Um exemplo dessa aplicação pode ser visualizado no problema 49 (Figura 4), que diz: “Exemplo de cálculo de área. Suponha que seja dito para ti: Qual é a área de um retângulo de terra de 10 *khet* por 1 *khet*?” (CHASE, 1979, p. 91, tradução nossa[18]).

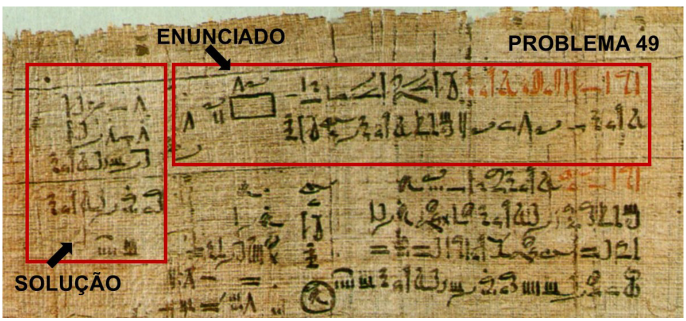


Figura 4. Problema 49 do papiro de *Rhind*.
Fonte: Adaptado de Robins e Shute (1987, Plate 16).

17 “[...] being the square of 100 of the linear *remen* of 5 palms in length (GRIFFITH, 1892, p. 410)”.

18 “Example of reckoning area. Suppose it is said to thee, what is the area of a rectangle of land of 10 *khet* by 1 *khet*?” (CHACE, 1979, p. 91).

A resolução apresentada pelo escriba é feita a partir de um cálculo de multiplicação. Conforme consta a seguir (CHACE, 1979, p. 91):

> Faça isso então:

1	1,000
10	10,000
100	100,000
$\frac{1}{10}$	10,000
$\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$	1000

> Isto é a sua área.

Note que um *khet* equivale a 100 *cubit*s, logo, 10 *khet* é 10 vezes 100 *cubit*s que resulta em 1000 *cubit*s. Dessa forma, como esse problema envolve uma tira de 1 *khet* por 10 *khet*, no seu resultado, a área era dada por 10 tiras de 1 *khet* cada, ou seja, 1.000 *cubit*. Na solução, eles utilizaram o método de multiplicação egípcia para encontrar o valor em *cubit*s de 10 *khet* e, em seguida, dividir em tiras de *cubit*. Assim,

1	×	1.000
10	×	10.000
100	×	100.000
1/10	×	10.000
1/10 de 1/10		1.000

Uma observação que Griffith (1892) apresenta nesse problema, é o erro encontrado no desenho feito pelo escriba que considerou 2 *khet*. Entretanto, o erro não aparece em seus cálculos, em que consta a informação de 1 *khet*.

Com relação a unidade egípcia utilizada para volume de produtos "secos", a principal encontrada é o *hekat*. Ela era usada para medir quantidades de cevada, trigo, milho e grãos em geral, sendo aproximadamente igual a 4,8 litros, pouco mais de um galão[19] ou 292,24 polegadas cúbicas. As frações do *hekat* têm uma denominação especial, o "olho de Hórus"[20], que equivale a divisões progressivas, resultando em 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 e 1/64. Note que uma quantidade decomposta a partir dessas frações é conveniente para fins práticos, pois ela seria visivelmente fragmentada pela metade sucessivas vezes. Além dessas, mais uma subdivisão do *hekat* era possível[21], que era o ro, correspondente a 1/320 do *hekat*. (ROBINS; SHUTE, 1987).

Como os egípcios trabalhavam com uma grande quantidade de grãos cultivados, alguns múltiplos do *hekat* eram necessários. Um deles era o *hekat* grande ou *hekat* quádruplo, que seria quatro vezes *hekat* simples. Esse *hekat* grande multiplicado 5 vezes formava um khar, que também equivalia a dois terços de um *cubit* cúbico. Entretanto, uma medida comum era 100 *hekat* grandes, ou 20 khar, que seria aproximadamente 2 m^3 de volume no sistema moderno (Quadro 2).

Para produtos líquidos, os egípcios utilizavam o *hin*, que também era outra unidade menor para medir grãos, sendo igual a 1/10 de um *hekat*. No dia a dia, para comensurar líquidos era utilizada a medida de uma jarra cheia[22], que era equivalente a um *hin* e teria aproximadamente 0,5 litros. (ROBINS; SHUTE, 1987).

---

19 Um galão americano no século XXI equivale a 3,78541 litros.

20 "As frações 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 e 1/84 de um *hekat* são conhecidas como frações do Olho de Hórus, porque elas são escritas com símbolos distintos que se assemelham às partes do olho do Deus Cabeça de Falcão Hórus" (ROBINS; SHUTE, 1987, p. 14, tradução nossa).

21 Chace (1979) também menciona o hînu, ou 1/10 de *hekat*, mas afirma que sua origem era independente do sistema de *hekat*.

22 Segundo Robins e Shute (1987) foram encontradas jarras com marcações de capacidade de um *hin*, o que proporcionou o cálculo da sua medida aproximada sendo 0,5 litros.

Nomenclatura	Medida Egípcia	Sistema Internacional de Medidas
Hekat	292,24 polegadas cúbicas	4,8 litros
hekat grande = 4x *hekat*	1.168,96 polegadas cúbicas	19,2 litros
khar = 5x *hekat* grande	5.844,80 polegadas cúbicas	96 litros
Hin= 1/10 *hekat*	29,224 polegadas cúbicas	0,48 litros
Ro = 1/320 hekat	0,913 polegadas cúbicas	0,015 litros

Quadro 2. Síntese de unidades de medidas para volume.
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Um exemplo presente no Papiro de *Rhind* que envolve volume pode ser visualizado no problema 41 (Figura 5) que nos diz: "Encontre o volume de um granário cilíndrico de diâmetro 9 e altura 10" (CHACE, 1979, p. 86, tradução nossa[23]). O método que os egípcios utilizam para encontrar o volume é similar ao que utilizamos atualmente, ou seja, encontra-se a área da base circular e multiplica o resultado pela altura dada.

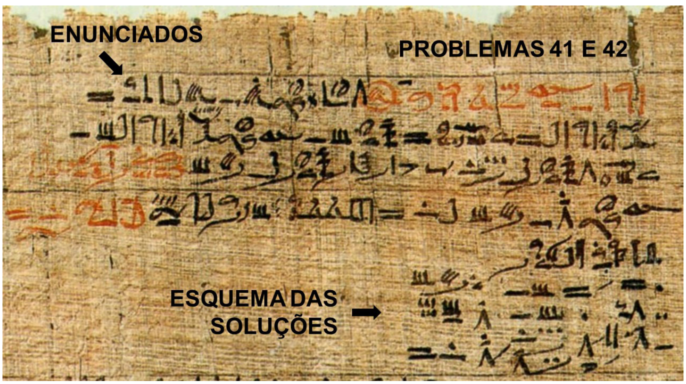


Figura 5. Problemas 41 e 42 do Papiro de *Rhind*.
Fonte: Adaptado de Robins e Shute (1987, plate 14)

23 "Find the volume of a cylindrical granary of diameter 9 and height 10" (CHACE, 1979, p. 86).

A resolução para o problema é dada pelo escriba da seguinte forma: "Tire 1/9 de 9, a saber, 1; o restante é 8. Multiplique 8 vezes 8; isso faz 64. Multiplique 64 vezes 10; isso faz 640 *cubits* cúbicos. Adicione 1/2 dele a ele; isso faz 960, seu conteúdo em khar. Tire 1/20 de 960, a saber, 48. 4800 *hekat* de grãos vão dentro dele". (CHACE, 1979, p. 86, tradução nossa[24])

Note que o escriba subtrai de 9 a sua nona parte (1/9) que resulta em 8 e o multiplica por ele mesmo, ou seja, 8, resultando em 64. Essa seria a área da base do celeiro. Em seguida, ele multiplica 64 pela altura 10, dando 640 *cubit* cúbicos. Entretanto, no problema 41 a unidade de medida apresentada no resultado é o *khar*. Logo, é estabelecida uma relação entre o *cubit* e o khar, em que um *cubit* é igual a 1 ½ de *khar* ou 3/2 *khar*, então 3/2 de 640 *cubits* será 960 *Khar*. E como 100 *hekat* quádruplos é igual a 20 *khar,* temos que 960 de 20 é 48 centenas de *hekats* quádruplos, que é o volume do granário. De fato,

> 960 khar = 19200 *hekat*s = 4800 *hekat*s quádruplos = 48 centenas de *hekat*s quádruplos.

Na resolução apresentada no Papiro de *Rhind*, o escriba também coloca o "Método de funcionamento", com os cálculos realizados a partir do método egípcio (CHACE, 1927):

24 "Take away 1/9 of 9, namely, 1; the remainder is 8. Multiply 8 times 8; it makes 64. Multiply 64 times 10; it makes 640 cubed *cubit*s. Add 1/2 of it to it; it makes 960, its contents in khar. Take 1/20 of 960, namely 48. 4800 *hekat* of grain will go into it" (CHACE, 1979, p. 86).

1	8	
2	16	
4	32	
\8	64.	DOBRO

1	64	
\10	640	UNIDADE DE MEDIDA *cubit* cúbico
\½	320	
Total	**960**	UNIDADE DE MEDIDA *Khar*
1/10	96	
\1/20	48.	

Nos conhecimentos matemáticos formalizados atuais, o cálculo do volume de um cilindro é dado pela área da base multiplicado pela altura (h). Como a base é um círculo, sua área é dada por pelo quadrado do raio (r) multiplicado pela razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro, ou seja, o π (pi)[25]. Entretanto, embora algumas fontes indiquem que existia um valor aproximado para π em algum momento, é preciso salientar que pode ser anacrônico afirmar que os egípcios já estimavam o valor do π, pois, segundo Roque (2012, p. 85), "o valor 1/9 dos egípcios era uma constante multiplicativa que devia ser operada com o diâmetro, e não um número". Então, na matemática moderna, tem-se:

$$V = \pi r^2 h$$

Aplicando os dados do problema 41, no qual a altura (h) igual a 10 *cubit*s e o diâmetro (2r) igual a 9 *cubit*, temos:

25 Para os egípcios, essa constante era dada por 256/81, que é aproximadamente 3,1605. Maiores informações sobre esse valor da constante π, vide Gaspar (2003).

$$V = \pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 \times 10$$

$$V = \pi\,\frac{81}{4} \times 10$$

$$V = \pi\,\frac{405}{2}$$

Utilizando o valor da constate igual a 256/81, temos:

$$V = \frac{256}{81} \times \frac{405}{2}$$

V = 128 × 5 = 640 *cubit*s cúbico

Robins e Shute (1987) dedicam uma breve parte de seu livro ao estudo das unidades de medidas presentes no Papiro de *Rhind*. Além das já citadas anteriormente, eles apresentam outras duas: o *seked* e o *pesu*, que estariam relacionadas à inclinação da face da pirâmide e à qualidade dos alimentos. Existe uma discussão quanto à consideração desses dois termos como unidades de medidas, ou seja, qual a grandeza que eles estão medindo e qual o conceito de unidade de medida da época para que eles sejam considerados como tais. Entretanto, como essas são discussões que necessitam de mais aprofundamento, aqui será utilizada a perspectiva apresentada por Robins e Shute (1987).

Assim, a unidade utilizada pelos egípcios, relacionada ao declive, era o *seked*. Ele era usado para medir o declive de uma superfície inclinada, em especial para pirâmides retas. Segundo Gillings (1972, p. 212, tradução nossa[26]) ele "[...] é a inclinação de qualquer uma das quatro faces triangulares ao plano horizontal de sua base [...]". Chace (1979) descreve que o *seked* era utilizado para relacionar o comprimento de duas retas, não como uma razão, mas como tantas palmas por *cubit*. O mesmo autor afirma que ele pode ser comparado a cotangente do ângulo de inclinação.

26 "[...] is inclination of any one of the four triangular face to the horizontal plane of its base […]" (GILLINGS, 1972, p. 212).

Entretanto, Gillings (1972, p. 212, tradução nossa[27]) ressalta que "em geral, o *seked* de uma pirâmide é um tipo de fração, dado o número de palmas na horizontal para cada *cubit* na vertical, onde 7 palmas são iguais a um *cubit*. A palavra egípcia '*seked*' está, portanto, relacionada à nossa palavra moderna 'gradiente'". A maioria dos problemas contidos no Papiro de *Rhind* envolvendo *seked* tratam sobre as faces de pirâmides, que aparecem do 56 ao 60.

Pereira *et al.* (2015) apresentam um estudo envolvendo o problema 56 (Figura 6). Embora o objetivo da pesquisa não seja o estudo das unidades de medida, eles mostram a relevância dos problemas que envolvem o cálculo do *seked*, termo que é discutido a seguir. O enunciado do problema diz: "Se uma pirâmide tem 250 *cubits* de altura e o lado de sua base tem 360 *cubits* de comprimento, qual é seu *seked*?" (CHACE, 1927, p. 96, tradução nossa[28]).

Figura 6. Problemas 56 do Papiro de *Rhind*.
Fonte: Adaptado de Robins e Shute (1987, plate 17).

A resolução apresentada pelo escriba é a seguinte (CHACE, 1979, p. 96-97, grifo nosso):

27 "In general, the *seked* of a pyramid is a kind of fraction, given as so many palms horizontally for each *cubit* vertically, where 7 palms equal one *cubit*. The Egyptian word "*seked*" is thus related to our modern word "gradient" […]" (GILLINGS, 1972, p. 212).

28 "If a pyramid is 250 *cubit*s high and the side of its base 360 *cubit*s long, what is its *seked*?" (CHACE, 1979, p. 96).

Tome ½ de 360; isso faz 180. Multiplique 250 para conseguir 180; isso faz $\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{50}$ de um *cubit*. Um *cubit* é 7 palmas. Multiplique 7 por $\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{50}$.

$$\begin{array}{ll} 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & 3\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 1\frac{1}{3}\frac{1}{15} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{10}\frac{1}{25} \end{array}$$

O *seked* é $5\frac{1}{25}$ palmas.

Com a matemática atual, esse problema seria classificado como referente à geometria. Entretanto, a resolução é realizada a partir de procedimentos aritméticos, mostrando o que foi discutido anteriormente, ou seja, pode ser anacrônico indicar que os egípcios teriam uma geometria no sentido que é conhecido hoje.

Contudo, em relação às unidades de medida, Chace (1979) afirma que esse problema introduz pela primeira vez no papiro a "palma", que é dada como uma subdivisão do *cubit*. Embora as duas sejam unidades de comprimento, o escriba mostra a necessidade de expressar o *seked* em palmas, o que também é notado nos problemas seguintes que envolvem o mesmo cálculo, do 57 ao 60. Nesse sentido, pode-se ter uma discussão sobre a qual grandeza o *seked* estaria relacionado.

Por fim, a última unidade de medida apresentada por Robins e Shute (1987) é o *pesu*. Os egípcios usavam o *pesu* para medir a força nutritiva da cerveja, do pão ou dos bolos, de acordo com a quantidade de grão utilizada. Gillings (1972, p. 212, grifo nosso[29]) apresenta um exemplo utilizando essa medida:

29 If one *hekat* of grain were used to make 10 loaves of bread, then their *pesu* was said to be 10; if one *hekat* made 15 loaves, then their *pesu* was 15. In the same way, if 1 *hekat* of grain was used to make 5 des-jugs of beer, then the beer was

> Se um *hekat* de grão fosse usado para fazer 10 pães, então seu *pesu* seria 10; se um *hekat* fizesse 15 pães, então o *pesu* era 15. Da mesma forma, se um *hekat* de grãos era usado para fazer 5 *des-jugs* de cerveja, então a cerveja teria um *pesu* 5; se ele produzisse apenas 3 *des-jugs*, seu *pesu* era 3.

Dessa forma, o *pesu* seria a razão do número de pães ou des-jugs[30] de cerveja (massa) produzidos pelo número de *hekat* de grão que tivesse sido utilizado na produção. Pode-se perceber o uso do *pesu* nos problemas 69 a 78 do Papiro de *Rhind*, em que a sua finalidade era determinar a qualidade de um produto para poder comercializá-lo. Tomando o problema 69, pode-se ver o que foi discutido por Gillings (1972). O seu enunciado diz (CHACE, 1979, p. 105-106, tradução nossa):

> 3 ½ *hekat* de cereal é transformado em 80 pães. Deixe-me saber a quantidade de cereal em cada pão e qual o seu *pesu*.
> Multiplique 3 ½ para conseguir 80

1	3 ½
10	35
\20	70
\2	7
$\backslash\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
$\backslash\frac{1}{21}$	$\frac{1}{6}$
$\backslash\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$

> O *pesu* é $\frac{2}{3}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{21}$. [...]

said to have a *pesu* of 5; if it made only 3 des-jugs, their *pesu* was 3. (GILLINGS, 1972, p. 212).

30 Um *des-jug* (massa) de cerveja é aproximadamente meio litro, de modo que seria, portanto, cerca de 7/8 de litro. (GILLINGS, 1972, p. 213).

O problema traz ainda a prova de que 22 $\frac{2}{3}\frac{1}{7}\frac{1}{21}$ multiplicado por 3 ½ equivale a 80 e, também, o cálculo de quanto cereal cada pão deveria conter. Contudo, observando a parte descriminada, é interessante que o leitor perceba que quanto maior o *pesu*, menos cereal o pão teria, ou seja, menor a sua qualidade. Isso pode ser notado a partir da operação de multiplicação que é realizada: multiplique a quantidade de cereal para conseguir o número de pães, ou seja, divida o número de pães pela quantidade de cereal utilizada, o que estabelecerá a qualidade do pão. Além disso, também pode ser discutido a especificidade dessa unidade de medida, que implica o reconhecimento de qual grandeza ela estaria medindo.

Algumas Discussões

A partir das discussões e exemplos mostrados, é importante notar que os egípcios se preocupam com um certo padrão para o uso das unidades de medidas. Por exemplo, o caso do problema 41 se repete nos problemas 42, 43 e 44, em que é necessário encontrar o volume de um celeiro a partir de medidas de comprimento dadas em *cubits*, obtendo um resultado em *cubits* cúbicos. Entretanto, conforme apresentado anteriormente, a principal medida para volume de grãos era o *hekat* e seus múltiplos. Assim, a resolução do problema inclui também a transformação desses resultados para a unidade de medida adequada para os egípcios.

Isso também pode ser observado em outros problemas similares, tais como o 45 e 46, em que é dado o volume do granário e são pedidas as suas dimensões. Do mesmo modo, é necessária uma conversão de unidades, pois o volume é dado em *hekat* quádruplos e as dimensões precisam estar em *cubits*.

Os problemas que envolvem o cálculo do *seked* também mostram essa transformação de unidades. Como Chace (1979) afirma, esses problemas introduzem uma medida nova no Papiro que é a "palma", assim, os cálculos que são encontrados em *cubits* são convertidos em palmas para o resultado da questão.

Isso pode suscitar um debate sobre as diferentes unidades de medidas atuais que são apresentadas nas aulas de matemática, em que muitas vezes os alunos realizam cálculos com conversões de unidades, mas sem a compreensão dessa necessidade.

Além disso, o próprio conceito de unidade de medidas também pode ser debatido, pois elas se desenvolveram no Egito com a necessidade da quantificação e registro de bens, em que cada tipo de produto ou dimensão tem o seu próprio padrão. Assim, essa também pode ser uma potencialidade didática dos problemas do Papiro de *Rhind*, que mostram como os problemas práticos instigam o uso de unidades de medidas.

Nesse mesmo sentido, essa discussão pode ser guiada para a questão de qual grandeza eles estavam mensurando em cada cálculo. Assim como, também é pertinente entender qual grandeza é aferida a partir das unidades do Sistema Internacional de Medidas, levando ao debate conceito, conforme mencionado anteriormente.

Notas Finais

O estudo de textos originais para a sala de aula requer uma pesquisa muito densa. Para uma real compreensão da epistemologia em que o documento está inserido, é necessário um mapeamento dos textos que estão relacionados a ele, ao seu conteúdo e que possam ter servido de base para sua construção. Entretanto, ao se tratar do Papiro de *Rhind*, que é datado de aproximadamente 1650 a.E.C., é muito difícil para o pesquisador de educação matemática ter acesso a outros materiais desse período.

Assim, o que é escrito sobre esse texto egípcio é geralmente baseado em traduções e publicações mais atuais, que foram elaboradas após a sua aquisição pelo Museu Britânico no século XIX. Contudo, esse material é relevante para o educador matemático, cujo objeto não é o estudo histórico, mas a identificação de possíveis potencialidades didáticas para a aula de matemática.

Nesse sentido, o estudo das unidades de medida utilizadas nesse documento original é um tema que ainda necessita diversas discussões, por exemplo, em relação à grandeza que elas estão medindo. Espera-se que esse capítulo seja um início desse debate, suscitando questões a serem estudadas pelos interessados na articulação entre história e ensino de matemática.

Referências

BELTRAN, Maria Helena Roxo. História da Ciência e Ensino: Algumas considerações sobre a Construção de Interfaces. In: WITTER, G. P.; FUJIWARA, R. (Org.). **Ensino de Ciências e Matemática.** São Paulo: Ateliê Editoral, 2009.p. 179-208.

CHACE, Arnold Buffum. **The Rhind Mathematical Papyrus**. Mathematical Association of America, Oberlin. Reprinted (1927) National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

GASPAR, Maria Terezinha Jesus. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 2003. 307 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GILLINGS, Richard J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs.** Cambridge, Mass: MIT Press, 1972.

GRIFFITH, Francis Llewellyn, 1892. Notes on Egyptian weights and measures**. Proceedings of the Society of Biblical Archaeology** 14, 403-450.

LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**.** **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MASSA-ESTEVE, Maria Rosa *et al*. Understanding Mathematics using original sources. Criteria and Conditions. In: BARBIN, Evelyne; KRONFELLNER, Manfred, TZANAKIS, Constantinos. (eds). **History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Sixth European Summer University.** Vienna: Verlag Holzhausem GmbH, 2011, p. 415 – 428.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, v. 13, n. 25, pp. 342-372, 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa *et al*. Sobre o uso de fontes na disciplina de História da Matemática: Problema 56 do Papiro de Rhind. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 10, n. 2, p. 243-257, jan. 2016. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n2p243>. Acesso em: 26 out. 2019. doi:https://doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n2p243.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; MARTINS, Eugeniano Brito; SILVA, Isabelle Coelho da. **Evolução histórica da multiplicação do século X ao XVI:** Construindo interfaces para o ensino. Belém: SBEM, 2017. 70 p.

ROBINS, Gay; SHUTE, Charles. **The Rhind Mathematical Papyrus:** an ancient Egyptian text. London: British Museum Publications, 1987.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 511 p.

SAITO, F. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. IN: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F. (eds.). **Investigaciones en Educación Matemática**. Lima: PUCP, 2016. p. 253-291.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: Uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 19, n. 1, p.89-111, 2013.

SCOTT, Nora E. Egyptian *Cubit* Rods. **Bulletin of the Metropolitan Museum of Art**, I, p. 70-75, 1942.

SILVA, Isabelle Coelho da Silva. **Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática:** buscando critérios na articulação entre história e ensino. 2018. 92f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SILVA, Isabelle Coelho da; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Estudos iniciais sobre o instrumento *cubit rod*: teoria e prática na história da matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Sergipe, v. 8, n. 2, p.1-10, 2018.

2

O *TRATADO ARITMÉTICO* DE AL-KHWARIZMI E SUA TRADUÇÃO PARA A LÍNGUA PORTUGUESA[1]

Bernadete Morey
Gabriela Lopes

1 Nota da tradutora. Tive oportunidade de pensar mais de uma vez sobre qual o sentido de traduzir do russo para o português uma obra sabendo de antemão que a tal obra foi escrita originalmente em árabe. Falando especificamente sobre a obra que é foco do presente trabalho, o *Tratado Aritmético* de al-Khwarizmi, obra escrita em árabe, mas da qual sobreviveu apenas a versão latina, penso que mesmo assim faz muito sentido. Sabendo o quão escasso é o material em português sobre a matemática islâmica medieval e sabendo como é difícil para os professores de história da matemática preparar suas aulas neste tema, creio que seria um benefício disponibilizar a tradução do texto do qual estamos falando. Mesmo sabendo das limitações acarretadas por uma tradução e pior ainda, uma tradução de tradução, levo em consideração a situação de escassez que temos em relação a obras que tratem da matemática islâmica medieval e digo que vejo como importante o fato de disponibilizar aos leitores brasileiros o *Tratado Aritmético* de al-Khwarizmi, mesmo numa tradução não do árabe, não do latim, mas do russo, que é uma língua para mim mais familiar. Além do mais, sendo otimista e pensando que em um futuro próximo pode alguém encontrar os meios e as forças para fazer uma tradução para o português dessa obra diretamente do manuscrito latino isto só virá enriquecer mais a bibliografia existente. B. Morey

Introdução: Sobre a Obra em Foco

Os pesquisadores que atuam na interseção Educação Matemática-História da Matemática consideram fundamental o trabalho com fontes históricas, especialmente nos cursos de formação de professores de matemática. No entanto, uma das dificuldades que temos superar no Brasil é a ausência de obras em português (ou numa outra língua que nos seja mais ou menos familiar).

O intenso e extenso trabalho de pesquisadores russos no âmbito da história da ciência e matemática islâmica medieval, principalmente, após a primeira metade do século XX, aqui está sendo usado como uma possibilidade de diminuir este tipo de dificuldade.

Este artigo, apresenta algumas observações de um trabalho recém-iniciado de tradução do russo para o português do *Tratado Aritmético* de al-Khwarizmi. Nossos primeiros resultados, de forma geral, já apontam para um enriquecimento acerca da valorização da ciência do mundo islâmico medieval exposto em língua portuguesa.

Este texto é parte de um estudo em andamento na UFRN sobre a matemática islâmica medieval. O estudo, levado a cabo por pesquisadores em história da matemática e em educação matemática é bastante amplo e um de seus ramos consiste no estudo de obras do sábio islâmico al-Khwarizmi (c.783-c.850). Entre as obras de al-Khwarizmi, uma das que chamou a nossa atenção imediata foi a obra conhecida por diversos nomes:

1. O *Tratado Aritmético de al-Khwarizmi* é o nome mais usado na literatura matemática russa, uma das poucas línguas modernas para a qual a obra foi traduzida. O nome teve ampla aceitação, pois, ele se contrapõe ao *Tratado Algébrico de al-Khwarizmi*, nomeando assim as duas obras mais conhecidas de al-Khwarizmi;

2. Outro nome corrente na literatura matemática russa é *Livro sobre o cálculo indiano* (Книга об индийском счетом), nome que se supõe ter sido o do manuscrito original árabe;
3. Uma outra denominação difundida nos meios acadêmicos ocidentais é *Algoritmi de Numeri Indorum*, pois, a obra chegou até nós apenas em manuscrito latim.

Adotaremos no presente texto o nome *Tratado Aritmético de al-Khwarizmi* para nomear a obra em questão, porque assim teremos a vantagem de podermos, ocasionalmente, nos referir a ele usando a versão curta do seu nome, ou seja, *O Tratado.*

O *Tratado Aritmético de al-Khwarizmi* foi escrito em língua árabe com o propósito de expor de forma didática o sistema de numeração decimal posicional usado pelos indianos. Esse trabalho foi responsável pela disseminação do sistema decimal entre os estudiosos islâmicos daquela época e mais tarde, entre os europeus. Infelizmente, não chegou até nós nenhum exemplar do manuscrito árabe. O que existe agora é um manuscrito que foi copiado no século XIV de uma tradução para o latim guardado na biblioteca da Universidade de Cambridge (Ii, 6.5). O manuscrito apresenta falhas, inserções e distorções. Em sua base está uma tradução do século XII, provavelmente feita por Gerardo de Cremona ou Adelardo de Bath. (BULGÁKOV 1983, p. 43)

Yushkiévitch, que traduziu o tratado para o russo, diz sobre o manuscrito de Cambridge:

> O texto árabe do tratado aritmético de al-Khwarizmi até agora não foi encontrado. Existe apenas um manuscrito em latim cujos dois parágrafos iniciais começam com as palavras "Algorizmi disse" (*Dixit Algorizmi*) e que sem dúvida descende de um protótipo árabe que não conhecemos. O único exemplar

do manuscrito que por algum tempo encontrava-se numa abadia inglesa, foi guardado na biblioteca da Universidade de Cambridge indexado como MS I i.6.5.ff.102^{R}-109^{V}. De acordo com o catálogo de manuscritos elaborado em 1858, o exemplar foi transcrito em letras miúdas no século XIII (written in small XIIIth century hands). Em 1857 este manuscrito foi publicado pelo historiador da matemática italiano B. Boncompagni com muitas imprecisões e erros e tal publicação foi utilizada por quase cem anos. Em 1963 K. Vogel [25][2] publicou um fac-símile e transcrição fiel. E o fac-símile apenas eu publiquei no apêndice ao artigo [180, p.55-63].[3]

O manuscrito de Cambridge, no entanto, não é uma tradução precisa e completa do original árabe. Ele se interrompe no exemplo da multiplicação das frações $3\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{11}$, contém uma série falhas e inserções óbvias assim como espaços em branco deixados para a escrita de cálculos com cifras "indianas"; além disso, o tradutor ou talvez o copista de uma tradução anterior, adequando-se ao conhecimento do

2 O artigo [25] a que Yushkiévitch se refere é: VOGEL, K. Mohammad ibn Ms Alchwarizmi Algorismus. Das früheste lehrbuch zum rechnen mit indischen ZIFFERN. AALEN, 1963. (A edição fac-simile da tradução Latina do tratado de al-Khorezmi sobre a aritmética indiana foi publicada pela primeira vez por B. Boncompagni. Na edição de Vogel foram corrigidos muitos erros da primeira edição.)

3 O artigo [180] a que Yushkiévitch se refere é: JUSCHKEWITSCH, A. P., Uber ein Werk des Ab 'Abdallah Muhammad ibn Ms al-Huwarizmi al Mausi zur Arithmetik der Inder. "Schriftenreihe Geschichte der Naturwissenschaften. Technik und Medizin, Beiheft, 1964. S.21-63. (O artigo consiste em uma variante revisada e ampliada do artigo de A. P. Yushkiévitch sobre o tratado aritmético de al-Khorezmi, publicada em russo em 1954. Contém o fac-símile do texto.)

> leitor, usou amplamente em seu texto as cifras romanas que na Europa de então eram mais difundidas. (YUSHKIÉVITCH, 1983, p.151, tradução nossa)

Reconhecido pelos historiadores como sendo a segunda grande obra matemática do estudioso islâmico medieval al-Khwarizmi, o tratado aritmético foi traduzido várias vezes. Traduções em línguas ocidentais constam no Quadro 1.

Ano	Tradutor	Título	Idioma
1857	Baldassare Boncompagni	Trattati d'arithmetica. I. Algorismi de numeri indorum	Latim
1963	Kurt Vogel	Algorismus de Mohammad ibn Musa Alchwarizmi	Alemão
1983	Kopelevitch e Yushkiévitch	Muhammad Ibn Musa al-Khorezmi – Kniga ob indiskoi chiote.	Russo
1990	John N. Crossley e Alan S. Henry	Thus Spake al-Khwarizmi: A Translation of the Text of Cambridge University Library	Inglês
1992	André Allard	*Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Le Calcul Indien (Algorismus).*	Francês

Quadro 1. Traduções do *Tratado* de al-Khwarizmi
Fonte: adaptado pelas autoras a partir da homepage de Jan P. Hogendijk. Acesso 15/09/2019.

O manuscrito de Cambridge não tem título, mas é comumente referido pelas duas primeiras palavras com as quais ele começa: *Dixit algorizmi* (Assim disse Algorismus). (Ver figura 1a). *Algoritmi de numero Indorum* foi o nome dado por Baldassarre Boncompagni para o seu trabalho de composição de uma nova versão em latim em 1857 para o Manuscrito de Cambridge. A figura 1b mostra a capa desse trabalho.

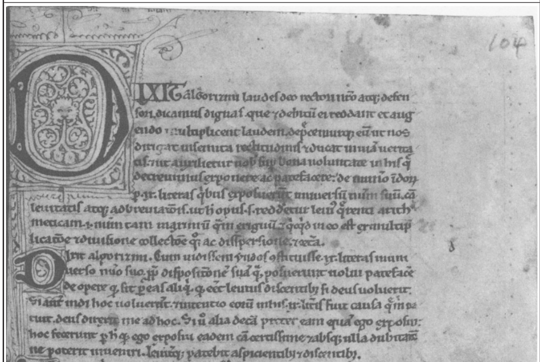
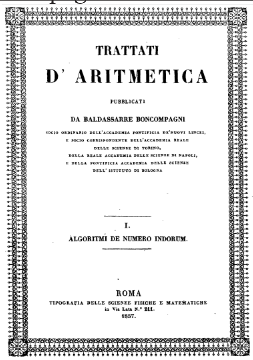
<table>
<tr><td>Figura 1a. Primeira página do manuscrito de Cambridge</td><td>Figura 1b. Capa da edição de B. Bomcompagni de 1857.</td></tr>
<tr><td></td><td>
TRATTATI
D' ARITMETICA
PUBBLICATI
DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI
SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI,
E SOCIO CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE
DELLE SCIENZE DI TORINO,
DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA
I.
ALGORITMI DE NUMERO INDORUM.
ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
in Via Lata N.° 211.
1857.</td></tr>
<tr><td>Fonte: Por Al-Khwarizmi - scanned from facsimile (1963), Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=865888</td><td>Fonte: Göttinger Digitalisierungszentrum</td></tr>
</table>

Figura 1. Distintas edições do Tratado Aritmético

Em resumo, nosso trabalho tem como foco uma obra escrita no século IX em Bagdá pelo sábio islâmico al-Khwarizmi, obra esta que descreve um sistema de numeração oriundo da Índia, assim como também descreve o modo de operar aritmeticamente nesse sistema. Fizemos uma breve apresentação não tanto da obra, mas, de como ela se apresenta para nós e agora tratemos de falar um pouco sobre seu autor.

Sobre o Autor do Tratado, suas Obras e o Contexto em que Viveu

Na península Arábica, desde o século VII, as tribos árabes já vinham se reunindo sob a bandeira do islã e aos poucos foi-se formando uma estrutura de estado teocrático, um califado, cujo governante máximo era o califa. O califado, cuja primeira capital foi Medina na Península Arábica, foi expandindo seus domínios por meio de campanhas militares, e, ao ponto de considerar viável mudar sua capital de Medina para Damasco em 635, na Síria. Damasco se manteve como capital até meados do século VIII d. c., quando uma nova capital foi estabelecida em 762, desta vez, Bagdá, nas margens do Rio Tigre. Acompanhando este movimento de expansão houve por parte dos islâmicos uma tendência em direção à busca do saber. À medida que se ia estabelecendo contatos (não obrigatoriamente amigáveis) com outros povos, obras importantes do saber de então eram recolhidas e enviadas a à capital islâmica.

Bagdá foi construída em torno do ano 760, logo no início da dinastia dos Abássidas[4] que assumiram o poder do califado quando este já se encontrava em sua máxima extensão. Os Abássidas imprimiram um interesse maior ainda na busca pelo conhecimento e teve início um período de intensa procura pelas obras da antiguidade e sua posterior tradução para o árabe. Yushkiévitch citando as palavras de Abu-l-Hassan al-Kifti (1172-1248), diz:

> No ano 156 da Hégira [i.e., 773] chegou a Bagdá vindo da Índia um homem muito conhecedor dos estudos de sua terra natal. Este homem dominava as técnicas Sindhind relativas aos movimentos dos astros assim como os cálculos por meio de senos com implementos de um quarto de grau. ... O califa ordenou que o tratado indiano fosse traduzido para a língua árabe para que os muçulmanos pudessem adquirir conhecimentos certos sobre as estrelas. ... (YUSHKIÉVITCH, 1961, p. 171, tradução nossa)

4 A história do califado pode ser considerada em três períodos a partir da morte de Maomé. O primeiro período seria o dos califas ortodoxos, que se estendeu de 632 (ano da morte de Maomé) até 661 quando se iniciou a dinastia dos Omíadas. O período Omíada termina em 750 com a tomada do poder pelos Abássidas que permanecem até o século XIII.

Incentivada e financiada pelos califas, em Bagdá nasceu e desenvolveu uma escola na qual, além de outras ciências, também se estudava matemática com muito afinco. Yushkiévitch diz que

> ... a escola de Bagdá funcionou intensamente por dois séculos. Em seu período inicial, o proeminente lugar era ocupado pelo estudo e publicação em árabe dos autores da antiguidade. Em 100 – 150 foram traduzidos para o árabe as obras principais de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Menelau, Teodósio, Heron, Ptolomeu, Diofanto e outros. Algumas obras, como *Os Elementos* de Euclides foram traduzidas diversas vezes. ... (YUSHKIÉVITCH, 1961, p.171, tradução nossa)

A escola de Bagdá, assim como outros centros de estudos que surgiram mais tarde no mundo islâmico não apenas traduziram as obras antigas, mas também produziram obras originais prenhes de novos conhecimentos. É neste contexto de podemos falar do estudioso que hoje é conhecido como al-Khwarizmi.

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 783 - c. 850) foi um estudioso notável que passou a maior parte de, se não toda, sua vida acadêmica em Bagdá, em estreita conexão com a corte dos califas Abássidas, e especialmente, com a do califa al-Mamūn, que reinou de 813 a 833. Era originário de Khwarizmi (Khorezmi), uma região situada ao sul do Mar de Aral[5].

Conhecido na literatura matemática como al-Khwarizmi, seu nome completo às vezes deixa o leitor não habituado com

---

5 O lugar de origem de al-Khwarizmi durante muito tempo foi considerado ser Bagdá. No entanto, muitos historiadores hoje concordam com a posição dos historiadores soviéticos que dizem ter al-Khwarizmi nascido em Khwarizm (Khorezm) região pertencente hoje ao Uzbequistão.

os nomes da matemática islâmica um tanto confuso. Uma explanação de Lennart Berggren sobre os nomes muçulmanos pode ajudar:

> Uma criança de uma família muçulmana recebe um nome (chamado em árabe de *ism*) como, por exemplo, Muhammad, Husain, Thabit, etc. Depois desse vem a expressão "filho de fulano de tal" e a criança será conhecida como Thabit ibn Qurra (filho de Qurra) ou Muhammad ibn Husain (filho de Husain). A genealogia pode ser composta, como por exemplo, Ibraim ibn Sinan ibn Thabit ibn Qurra, remetendo-se até o avô. Mais tarde, ao se tornar pai, recebe um nome que indica a paternidade (*kunya* em árabe) tal como Abu Abdullah (o pai de Abdullah). A seguir vem o nome que indica a tribo ou o lugar de origem (em árabe, *nisba*) tal como al-Harrani, "o homem de Harran". No final do nome pode vir uma caracterização (*laqad* em árabe) que pode ser um apelido "olhos saltados" (al-Djahiz) ou "o fazedor de tendas" al-Khayyami ou um título como "o ortodoxo" (al-Rashid) ou "o derramador de sangue" (al-Saffah). (BERGGREN, 1986, p. 25-26)

Sendo assim, o nome de nosso personagem era Muhammad, filho de Musa, pai de Jafar e tinha ainda o epíteto al-Khwarizmi, o que veio de Khwarizm. O historiador al-Ṭabarī (839-923) dizia que al-Khwarizmi também era chamado de al-Majūsī, uma designação indicativa para um zoroastriano[6] e não para um muçulmano.

6 De modo simplificado, podemos dizer que o zoroastrismo tem sua essência na crença em Ahura-Mazda, deus do bem e da luz que se opõe Ahrimã, senhor das forças do mal. A luta entre eles é a essência do processo que move o mundo.

Não abundam as fontes que apresentam uma biografia de al-Khwarizmi em língua inglesa, espanhola ou francesa. Na verdade, uma maior quantidade de publicações numa língua ocidental pode ser encontrada em alemão. Fora isto, há um número razoável de publicações em russo. Para algumas pessoas isto pode parecer estranho, por isto, cabe aqui um relato explicativo.

Figura 2. Repúblicas Soviéticas da Ásia Central

Fonte: Adaptado pelas autoras de Google Maps.

Tudo no mundo (deuses, animais, fenômenos da natureza, etc.), está relacionado ou com a verdade ou com o mal e se encontra em luta permanente. A vida vem da verdade e a morte vem do mal. O homem tem direito à escolha de quem ser e disto depende seu destino. O culto do fogo, (assim como o da terra e da água) ocupava lugar especial no zoroastrismo. O fogo era símbolo da boa vontade divina e da verdade. No zoroastrismo não enterravam nem queimavam seus mortos, mas os deixavam como alimento às aves. A casta sacerdotal nos países do zoroastrismo, e Khorezmi era um deles, era a parte mais letrada da sociedade. (Bulgákov, 1983, p. 16)

Historiadores soviéticos liderados por A. P. Yushkiévitch (1906-1973) empreenderam, na segunda metade do século XX um programa amplo de investigações sobre a matemática islâmica nas repúblicas soviéticas da Ásia Central. Tais repúblicas aparecem no mapa da figura 2, todas contidas no retângulo menor: Casaquistão, Uzbequistão, Turcomenistão, Quirguistão e Tadjiquistão. O Uzbequistão se sobressai pelo fato de ter se concentrado em seu território que ocorreu boa parte dos eventos da ciência medieval islâmica.

Sobre al-Khwarizmi, o nome mais conhecido e ao mesmo tempo mais misterioso entre os estudiosos islâmicos, devido à ausência de dados biográficos os estudos históricos para compor a sua biografia foram levados a cabo por meio de comparação minuciosa de documentos. Como resultado foram publicados livros e capítulos de livros sobre al-Khwarizmi onde se discute nome completo, lugar de nascimento e outros detalhes. E assim, muitos aspectos da vida deste sábio islâmico se tornaram conhecidos embora uma boa parte da bibliografia ocidental sobre história matemática islâmica não tenha ainda se atualizado.

Tradução do latim para o russo do tratado aritmético de al-Khwarizmi editada em 1983 por Yu. Kh. Kopelevitch e A. P. Yushkiévitch e publicada pela Academia Ciências do Uzbequistão num volume intitulado Muhammad Ibn Musa al-Khorezmi – Matematítcheskie Traktaty (Muhammad Ibn Musa al-Khorezmi – Tratados Matemáticos) em homenagem prestada aos 1200 anos de nascimento de al-Khwarizmi.

Figura 3. Selo comemorativo aos 1200 anos de nascimento de al-Khwarizm
Fonte: Jeff Miller Web Pages

Aqui não é o lugar para discutir detalhes não consensuais da vida de al-Khwarizmi como, por exemplo, o lugar de sua origem. Uma análise das publicações sobre a biografia de al-Khwarizmi faz parte de estudos futuros. Diremos apenas que segundo Bulgákov (1983) as mais antigas informações sobre al-Khwarizmi constam em um documento do século X contendo os dados biográficos dos estudiosos. O documento, chamado simplesmente de *Listagem* (*al-Fikhrist*), foi elaborado por Ibn Nadim[7] sendo o primeiro em língua árabe a listar os dados dos estudiosos. Sobre al-Khwarizmi, as informações não são muitas:

> Al-Khwarizmi. Seu nome era Muhammad ibn Musa, oriundo de Khorezmi. Ele foi colocado

7 IBN AL-NADIM. Al Fikhrist. Cairo, 1929, p. 397. (Em árabe)

> para chefiar pessoalmente o “Tesouro da Sabedoria”[8] no reinado de al-Mamun e pertencia ao círculo dos sábios em astronomia. Antes do início dos trabalhos em observatórios e depois disso, as pessoas se apoiavam em suas duas *Zidj* (tabelas astronômicas), a primeira e a segunda conhecidas pelo nome *al-Sindhind*. De sua autoria são os seguintes livros: o livro *Zidj* em duas redações – a primeira e a segunda; o livro sobre relógios de sol; o livro sobre o uso de astrolábios; o livro sobre a construção do astrolábio e o livro de história. (IBN NADIM, 1929, apud BULGÁKOV, 1983, p. 8)

Al-Khwarizmi foi um dos estudiosos islâmicos mais renomados, autor de vários trabalhos em astronomia e matemática sendo o mais importante deles o *Kitab al-jabr w'al-muqabala*, obra que marcou o início da álgebra das equações e que é conhecida atualmente como a *Álgebra de al-Khwarizmi* ou ainda *O Tratado Algébrico de al-Khwarizmi*.

Sob o califado de al-Mamun (813-833), al-Khwarizmi tornou-se um membro da Casa da Sabedoria em Bagdá, uma instituição que reuniu diversos estudiosos e que contribuiu para a consolidação da ciência islâmica medieval. Muitos manuscritos gregos foram traduzidos neste ambiente, entretanto muita matemática nova para a época também floresceu, como a de al-Khwarizmi.

Ibn al-Nadīm (1929) lista quatro obras astronômicas de al-Khwarizmi: o Zīj al-Sindhind (um manual astronômico de acordo com o Sindhind); um tratado sobre o relógio de sol e duas obras sobre o astrolábio. Destas obras, a primeira não existe mais em árabe, mas está disponível na tradução para o latim; a segunda

8 “Tesouro da Sabedoria” é uma expressão cujo significado não está claro para as autoras deste trabalho.

parece existir, assim como fragmentos de um trabalho sobre o astrolábio.

Indicamos aqui duas publicações algumas publicações importantes para o estudo al-Khwarizmi e suas obras:

- AL-KHWARIZMI, Muhammad Ibn Musa. The Beginnings of Algebra. Rushd Rashed (tradutor e editor). Saqi, 2009

Trata-se de uma tradução comentada da Álgebra de al-Khwarizmi feita por um estudioso da área.

- BULGÁKOV, I. G.; ROZENFELD, B. A.; ÁKHMEDOV. A. A. Muhammad al-Khorezmi (c.783 - c. 850). Izdátelstvo Naúka: Moscou, 1983.

Trata-se de uma publicação de 1983 comemorativa aos 1200 anos de al-Khwarizmi. O livro é sobre, mas não, de al-Khwarizm, o que quer dizer que além da biografia do estudioso islâmico, traz comentários detalhados sobre seus trabalhos, com a seguinte estrutura

- Prefácio
- P. G. BULGÁKOV. Época, vida e contexto em que viveu al-Khvarizmi. A última seção, que fala sobre as obras de al-Khwarizmi, teve a participação de B. A. Rozenfeld
- B. A. ROZENFELD. *O cálculo Indiano*. Análise do Tratado Aritmético baseado em A. P. Yushkiévitch
- B. A. ROZENFELD. *Aldj-bra e almukabala.* Análise do Tratado algébrico.
- A. A. AKHMÉDOV E B.A. ROZENFELD *Zidj e outros trabalhos em astronomia.* Baseado em E. Kennedy, O. Neugebauer e N. D.

- A. A. AKHMÉDOV E B.A. ROZENFELD *Livro sobre a aparência da terra*[9]
- P. G. BULGÁKOV E B. A. ROZENFELD, Conclusão
- Cronologia da vida e obra de al-Khwarizmi
- Bibliografia

Cremos que são duas obras que podem de início dar uma boa introdução ao que queira conhecer al-Khwarizmi.

Mesmo sabendo que ficaram de fora deste texto muitíssimas questões que poderiam ser tratadas a respeito de al-Khwarizmi, a nossa apresentação do mesmo termina aqui, prometendo retornar com outros estudos que tratem de forma mais pausada sobre este importantíssimo personagem da ciência islâmica medieval. A próxima sessão será dedicada às publicações que estão servindo de fonte para a tradução do tratado aritmético para a língua portuguesa.

Sobre a Fonte Usada na Tradução

O nosso ponto de partida para os estudos da matemática islâmica medieval foi o encontro com as publicações de historiadores soviéticos, russos ou não russos, sobre esta temática que vieram à luz na segunda metade do século XX.

Em Morey (2017) é dito que os estudos em história das ciências exatas se iniciaram no Uzbequistão ainda antes da II Guerra quando arqueólogos e astrônomos que investigavam as ruínas do observatório de Ulugh Beg em Samarkanda se puseram a estudar os trabalhos científicos do citado observatório. Kari-Nyázov, um dos membros da expedição, publicou a monografia *A escola astronômica de Ulugh Beg* que se tornou a obra de referência no tema.

9 Tradução ao pé da letra, provavelmente o título não é este. É sobre o livro de Geografia de al-Khwarizmi.

Na monografia, o autor faz uma análise das tabelas astronômicas de Ulugh Beg, além de dar as características dos astrônomos e matemáticos que trabalharam no círculo próximo deste sábio do século XV.

A partir de então figuras importantes como A. P. Yushkiévitch (1906-1993) e B. A. Rozenfeld (1917-2008) se envolveram nos trabalhos não apenas organizando e incentivando a comunidade de pesquisadores soviéticos na participação nos estudos, mas também eles mesmos tomaram parte ativa traduzindo e publicando obras fundamentais. E foi assim que a partir da década de cinquenta do séc. XX vem à luz uma série de publicações cujo foco são as obras dos matemáticos e astrônomos da Ásia Central. Entre as obras traduzidas no bojo deste movimento está aquela que é foco do presente estudo: o tratado aritmético de al-Khwarizmi.

Faremos aqui uma pequena digressão histórica e geográfico pensando nos leitores mais jovens. Em inícios do século XX formou-se um país chamado União das Repúblicas Socialistas Soviéticas ou, simplesmente, União Soviética, constituído por uma federação de 15 repúblicas. Cada uma dessas repúblicas federativas seguia o modelo político administrativo único que caracterizava a União Soviética, mas, no tocante às demais características, cada república era única e tinha sua identidade nacional (afinal de contas, antes da União Soviética, elas eram estados nacionais soberanos). De modo geral cada república tinha sua própria cultura no sentido antropológico, sua língua nacional, sua identidade histórica, suas características étnicas. Por várias razões que não faz sentido discorrer aqui, a língua russa era a língua conhecida e falada em todas as repúblicas. Assim, publicações que se destinavam a todo o país, era publicado em russo.

Figura 4. Mapa da União Soviética e suas Repúblicas
Fonte: Wikipedia. Acesso 30/11/2019

A Rússia (número 11) no mapa da figura 1 é situada parte na Europa (na direção oeste) e parte na Ásia (na direção leste). As repúblicas marcadas com os números 6, 13, 15, 7 e 12 são as repúblicas da Ásia central e as demais estão em território europeu. A república do Uzbequistão é n. 15.

Durante a longa vigência do mundo islâmico medieval, a ciência e a cultura floresceram em períodos distintos em lugares distintos. Desde finais do século VIII Bagdá desponta como um centro científico; no entanto, no século XV quem brilhava era Samarkanda, uma cidade situada na Ásia Central, no Uzbequistão (n.15). Em Samarkanda, o governante e astrônomo Ulugh Beg convidou de várias partes estudiosos brilhantes que o ajudassem na missão de criar ali um centro de ciência e cultura. Uma das edificações construídas foi o observatório astronômico, o mesmo cujas ruínas foram encontradas antes da II Guerra Mundial e que despertou entre os historiadores da ciência e matemática soviéticos onda de estudos e publicações sobre a ciência islâmica medieval.

Figura 5. Selo soviético comemorando 550 anos das tabelas astronômicas de Ulugh Beg
Fonte: Jeff Miller Web Pages

Os estudos historiográficos não se limitaram apenas aos trabalhos produzidos no período de Samarkanda (século XV), mas empreenderam estudos produzidos ainda nos primeiros séculos do período islâmico, ou seja, estudos feitos na Casa da Sabedoria em Bagdá (SIRAJDÍNOV E MATVIÉVSKAYA, 1976). Os tratados de al-Khwarizmi produzidos no século IX na Casa da Sabedoria em Bagdá, receberam a devida atenção e foram traduzidos do árabe para o russo. Yushkiévitch diz:

> Este não menos famoso tratado aritmético de al-Khwarizmi conservou-se somente na tradução latina. O manuscrito é guardado na Biblioteca da Universidade de Cambridge (Ii, 6.5); foi transcrito no século XIV e é uma cópia da tradução com muitas falhas, acréscimos e erros. Muito provavelmente, o manuscrito foi feito com base na tradução feita por Gerardo de Cremona ou Adelard de Bath no século

> XII. Os estudos em latim mais importantes deste tratado foram feitos por João Espanhol (conserva-se na Biblioteca Nacional de Paris – lat. 16202 ct. Fundo 7359) e pelo Mestre A., que pelo visto é Pedro Alfonso (conserva-se na Biblioteca Nacional de Viena – lat. 275, na Biblioteca Estatal da Bavária em München - CLM13021 e 18927; na Biblioteca Nacional de Paris - lat 16208 e na Biblioteca Ambrosiana em Milão – A sup. 3). Este tratado [aritmético] foi escrito depois do tratado algébrico, já que a ele faz referência. (BULGÁKOV, ROZENFELD E AHMEDOV, 1983, p. 43)

Em 1983, para marcar comemorar 1200 anos do nascimento de al-Khwarizmi, foram publicados nas repúblicas da Ásia Central e na Rússia vários trabalhos sobre al-Khwarizmi e traduções de obras desse autor foram republicadas.

E assim, dispomos de uma edição russa do *Tratado Aritmético de al-Khwarizmi*. Os dados do Quadro 1 se referem ao livro *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi – tratados matemáticos* publicado em 1983 em Tashkent, capital do Uzbequistão, em comemoração aos 1200 anos do nascimento de al-Khwarizmi, orgulho do Uzbequistão. O *Tratado Aritmético* se estende da página 5 a 19 do livro mencionado e nas páginas 109-117 se encontram os comentários e observações de B. A. Rozenfeld e A. P. Yushkiévitch sobre o *Tratado Aritmético*. É esta a edição do tratado aritmético que vamos usar para a tradução ao português.

Título: MUHAMMAD IBN MUSA AL-KHWARIZMI – **Tratados matemáticos**	Sumário	página
	S. R. Sirajdinova. **Prefácio**	3
	Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. **Livro sobre o cálculo indiano.** Tradução do latim Yu. Kh. Kopelevitch e A. P. Yushkiévitch	5
	Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. **Livro sobre o cálculo álgebra e almukabala.** Tradução do árabe B. A. Rozenfeld	20
	Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi **Tabelas trigonométricas.** **1.Zidj al-Khwarizmi reelaboração de Maslama al-Madjriti** (trecho). Tradução de Yu. Kh. Kopelevitch e B. A. Rozenfeld **2. Comentário al-Muçanni às zidj de al-Khwarizmi (trecho).** Tradução G. P. Matviévskaya	82
	B. A. Rozenfeld e A. P. Yushkiévitch **Notas sobre o tratado aritmético**.	109
	B. A. Rozenfeld e G. P. Matviévskaya **Notas sobre o tratado algébrico**	118
	B. A. Rozenfeld e G. P. Matviévskaya **Notas sobre as tabelas trigonométricas**.	142
	P. Yushkiévitch. **Sobre o trabalho em aritmética de al-Khwarizmi**.	150
	G. P. Matviévskaya. **O estudioso Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi e a bibliografía sobre ele**	201
	Índice remissivo (Nomes próprios)	300

Quadro 3. Contracapa e sumário da publicação que contém o Tratado Aritmético de al-Khwarizmi em língua russa
Fonte: Elaboração das autoras

Nosso projeto de estudo e tradução para a língua portuguesa do Tratado Aritmético de al-Khwarizmi iniciou-se recentemente e é nossa intenção disponibilizar posteriormente os resultados de nosso estudo e a tradução completa. No entanto, algumas observações preliminares podemos já ir fazendo.

A fonte que estamos utilizando na tradução é a versão do tratado aritmético de 1983 em russo feita por Kopelevitch e Yushkiévitch. O tratado em si é um texto curto (15 páginas) e ocupa as páginas 5-19 do livro *Muhammad Ibn Musa al-Khorezmi – Tratados Matemáticos*. Por ser uma edição comemorativa dos 1200 anos de al-Khwarizmi, o livro foi pensado para ser uma coletânea de textos do próprio al-Khwarizmi e de textos sobre al-Khwarizmi e suas obras.

O tratado que nos interessa está no primeiro capítulo do livro. Embora o tratado propriamente dito seja um texto breve, ele não se deixa compreender facilmente. Teremos que recorrer aos comentários sobre ele que vêm no quarto capítulo do livro citado. São 49 notas de fim de texto que apresentam comentários ou indicam artigos de pesquisa, que ajudam o leitor a avaliar a herança científica de al-Khwarizmi do ponto de vista moderno. Os autores desses comentários são A. P. Yushkiévitch e B. A. Rozenfeld, dois pesquisadores russos da ciência islâmica medieval que a partir de meados do século XX trabalharam com afinco no tema.

Sobre o Processo de Tradução

Nosso trabalho no estudo, tradução e publicação do Tratado Aritmético tem ainda um longo caminho a percorrer. No entanto, algumas considerações ou observações iniciais já devem ser feitas.

Nesta última parte do presente trabalho, é esperado que se fale muito mais do texto russo e como suas particularidades imprimirão consequências no texto em português. Na verdade, o processo é um pouco mais complexo. Para o texto em português serão importantes também as particularidades do texto latim, que não temos em mãos.

Será necessário vez por outra nos remeter a Yushkiévitch, que teve o texto latim em suas mãos sendo necessários nos referir aqui a três textos: o manuscrito latim de Cambridge, a edição de 1983 da tradução russa feita por Yu. Kh. Kopelevitch comentada por Yushkiévitch e finalmente, o texto em português da tradução em que estamos trabalhando agora. Será necessário vez por outra, transitar entre estes três documentos.

Sabemos por Yushkiévitch que o manuscrito latim não tem título. No entanto, o tradutor russo adicionou o nome de al-Khwarizmi e o que se supõe ter sido o título original do livro no alto da página. Mas é somente nisso que podemos perceber um óbvio afastamento entre original latino e a tradução russa. Na tradução, seguimos, obviamente, o texto russo.

No que se refere à estrutura do *Tratado Aritmético*, Yushkiévitch (1983) assinala que o manuscrito de Cambridge não está divido em partes com subtítulos. Pode-se perceber o mesmo versão russa que usamos para a tradução ao português, o que quer dizer que na tradução do latim para o russo foi mantida a mesma estrutura. No entanto, feita a leitura do texto, pode-se sem dificuldade listar os tópicos abordados:

1. Observações iniciais sobre as vantagens do cálculo indiano
2. Informações iniciais sobre as cifras indianas
3. Princípios do sistema de numeração decimal posicional
4. Regras de adição e subtração de números inteiros
5. Regras de multiplicação e divisão por dois
6. Regra de multiplicação
7. Verificação da multiplicação e da divisão por dois usando o nove
8. Regra da divisão de números inteiros
9. Sobre a frações sexagesimais
10. Multiplicação de frações sexagesimais
11. Divisão de frações e verificação pela multiplicação

12. Posicionamento das frações sexagesimais na adição, subtração, multiplicação por dois e divisão por dois
13. Multiplicação de frações ordinárias

Apresentamos na figura 5 os primeiros dois parágrafos da primeira página da tradução russa e na figura 6 a primeira página da tradução portuguesa. Observe os seguintes detalhes:

Na figura 5 vê-se o número 104 na margem direita indicando a página do manuscrito latim no catálogo de Cambridge. Vê-se também o número nove em algarismo romanos entre dois pontos (.IX.) nas linhas 6, 12, e 15. A numeração romana é a que aparece no manuscrito de Cambridge.

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми

КНИГА ОБ ИНДИЙСКОМ СЧЕТЕ

Сказал Алгоризми[1]: Вознесем достойную похвалу богу, правите-
лю и защитнику нашему, воздадим ему должное и хвалу умно-
жим прославлением, помолимся ему, чтобы направил он нас по 104
стезе справедливости, чтобы вел нас дорогой истины, чтобы по-
мог нам исполнить то, что мы решили разъяснить об индийском
счете с помощью .IX. букв[2], которыми они выражали любое свое
число для легкости и краткости, облегчая дело тому, кто изучает
арифметику, т. е. число самое большое и самое малое, и все, что
есть в нем от умножения и деления, сложения, вычитания и
прочее.
Сказал Алгоризми: Когда увидел я, что индийцы[3] составляли
из .IX. знаков любое свое число, благодаря расположению, ка-
кое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу,
что получается из этих букв для облегчения изучающему. Если
индийцы именно того хотели и смысл для них в этих .IX. буквах
был тот, который мне открыт, да направит меня бог на это. Если
же они делали это по другой причине, кроме той, которую я ука-
зал, из моего изложения и эту причину можно будет найти точ-
но и без всякого сомнения. И она легче откроется наблюдающе-
му и изучающему.
Пишут же они .IX. букв, фигуры которых такие... В фигурах
их имеются также различия у разных людей: такое различие бы-
вает в фигуре буквы пять и шесть, а также семь и восемь. Но в
этом нет никакой помехи. Ведь это знаки, выражающие число,
а фигуры, в которых имеются различия, следующие...[4] Я уже от-
крыл в книге алгебры и алмукабалы, т. е. восполнения и проти-
вопоставления[5], что всякое число является составным и что вся-
кое число составляется из единиц. Итак, единица находится в
каждом числе. И об этом говорится в другой книге по арифмети-
ке. Единица есть корень всякого числа, и она находится вне чи-
сел. Корень числа она потому, что через нее определяют всякое

Figura 5. Primeira página da tradução russa
Fonte: Al-Khorezmi, 1983

число. Вне чисел она потому, что определяется сама по себе,
т. е. без какого-либо другого числа. Остальные же числа не мо-
гут быть найдены без единицы. Ведь когда ты говоришь «едини-
ца», то она для определения своего не нуждается в другом числе,
а остальные числа нуждаются в единице, потому что не можешь
сказать «два» или «три», если этому не предшествует единица.
Итак, число есть не что иное, как собрание единиц, и когда мы
говорили, что ты не можешь сказать «два» или «три», если не
предшествует единица, то мы говорили не о словах, а, так ска-
104 зать, о существе дела. Ведь не || может быть два или три, если
об. уничтожить единицу. Единица же может быть без второго и
третьего. Итак, два есть не что иное, как удвоенность или удвое-
ние единицы. Таким же образом три не что иное, как утроение
той же единицы. И так же следует понимать прочие числа. А те-
перь вернемся к книге[6].

Figura 6. Início da segunda página da tradução latim-russo
Fonte: Al-Khorezmi, 1983

Na figura 6 temos a continuação do texto da figura 5. Observe que na margem esquerda consta a anotação 104 об., que em russo indica o reverso da página 104. Observe também o número 104 assinalado no fac-símile do manuscrito na figura 1a. Além disso, na altura da notação 104 об., no meio da linha correspondente aparece o sinal || , indicando que exatamente aqui, no manuscrito latino, termina a página 104 e começa a página 104 об. Tais anotações aparecem no texto russo, porém, ainda não decidimos se e como elas aparecerão no texto português. Logo a seguir temos a figura 7 com o início do texto da tradução para o português.

Passemos a examinar o início da tradução russo-português. Logo no início do texto (Fig.7), no primeiro parágrafo, vê-se a invocação a Deus seguida da exposição precisa do que o autor se propõe a fazer. O segundo parágrafo expõe os motivos pelo qual o autor se debruçou sobre o tema. É uma escrita rebuscada, mas, mesmo assim, muito clara.

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

LIVRO SOBRE O CÁLCULO INDIANO

Disse Algorizmi[1]: Alcemos louvor a Deus, nosso guia e defensor e multipliquemos o louvor com adoração, orando para que ele nos dirija no caminho da justiça, que nos leve ao caminho da verdade, para que possamos cumprir o que decidimos esclarecer sobre o cálculo indiano usando .IX.[2] letras pelas quais eles expressaram qualquer número com facilidade e brevidade, facilitando o mister daquele que estuda aritmética, isto é, o maior e o menor número, e tudo o que há nele desde multiplicação e divisão, adição e subtração e outras coisas.

Disse Algorizmi: Quando vi que os indianos compunham com .IX. sinais qualquer número que assim quisessem, graças à posição que eles determinavam, quis eu descobrir, se Deus assim o permitir, o que se pode obter de tais sinais para facilitar o mister do aprendiz. Se o que os indianos queriam era isto mesmo e o significado destes .IX. sinais for o que a mim foi desvendado, que Deus me guie para isso. Porém, se eles o fizeram por uma outra razão distinta da que indiquei, tal razão poderá ser encontrada sem dúvida alguma a partir da minha exposição. E será ela facilmente descoberta ao que observa e estuda... Escrevem eles de fato com .IX. cifras cujas figuras são estas

...

Nas figuras existem diferenças entre as pessoas; tal diferença acontece na figura correspondente ao cinco e ao seis e também nas figuras que correspondem ao sete e ao oito. Mas isso não cria dificuldades. Pois, estes são sinais que expressam o número e as figuras nas quais existem diferenças são as seguintes ... Eu já disse no livro de álgebra e almukabala, isto é, no livro al-jbr e almukabala que todo número é composto e que todo número é composto de unidades. Sendo assim, a unidade está em cada número. E isso é dito em outro livro de aritmética. A unidade é a raiz de todos os números e está fora dos números. Ela é raiz de todo número porque por meio dela se determina cada

Figura 7. Início da tradução russo-português
Fonte: Elaboração das autoras

No restante do tratado o autor se dedica a descrever os algoritmos das operações aritméticas usando o sistema decimal posicional indo da adição até a extração da raiz quadrada. Também demonstrou os métodos para se calcular com números naturais, método este desenvolvido na Índia no século V. A notável ideia indiana foi a forma de expressar, por um único símbolo, uma quantidade infinita de números. Cada símbolo em separado teria um valor e na composição de números maiores que 10, o valor do símbolo depende da ordem em que ele se encontra, isto é, na primeira ordem ela expressa unidades, na segunda ordem ela expressa dezenas, na terceira ordem ela expressa centenas e assim por diante.

Em numerais romanos, para cada potência de dez existe um símbolo diferente para expressá-la: I, X, C, M,...; no método indiano de representação dos números, o símbolo permanece o mesmo, mas a potência de dez é indicada por um novo símbolo para o qual os algarismos romanos não tinham equivalentes: o zero. A introdução e uso do zero no sistema decimal merece um estudo mais detalhado e seria prematuro expor aqui.

Três tipos diferentes de sistemas de numeração eram utilizados simultaneamente pelo povo islâmico, por volta do século X: um sistema que derivou da contagem com os dedos, com os numerais inteiramente escritos em palavras e foi o método utilizado pela comunidade mercantil (comercial); o sistema sexagesimal, com os numerais denotados por letras do alfabeto árabe difundido, principalmente, entre os matemáticos islâmicos que o utilizaram principalmente em trabalhos astronômicos e o sistema decimal indiano que permitiu grandes avanços nas investigações aritméticas de diversos estudiosos islâmicos, como por exemplo, na extração de raízes estudadas por Abu'l-Wafa e Omar Khayyam (CHAPARRO, 2002).

Al-Khwarizmi expõe suas descobertas sobre o cálculo indiano (adição, subtração, divisão e multiplicação de números naturais) explicando como se fazer essas operações seguindo um algoritmo. Por exemplo, a soma de dois números deve ser feita somando-se cada ordem de um com a ordem do mesmo tipo do outro. Explanado que em cada ordem não pode exceder mais do que 9 unidades, ele relata que os indianos usavam um pequeno círculo, para representar uma ordem vazia, ou seja não havia um número que a ocupava.

No processo de transmissão deste texto para o ocidente, o nome do autor al-Khwarizmi foi latinizado para Algorismus que deu origem a duas novas palavras: algarismo para indicar as cifras do sistema numérico e algoritmo que indica um procedimento de cálculo. A divulgação gradual na Europa pode ter ocorrido, em alguns aspectos, ao longo das rotas comerciais que ligavam povos cristãos e islâmicos. Segundo Struik (1986) a aceitação dos métodos de cálculo descritos por al-Khwarizmi dentro das regras matemáticas europeias foi favorecida pela obra *Liber abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci). O *Liber Abaci* de Fibonacci, datada de 1202, introduz os dez símbolos para representar os numerais e logo depois desenvolve uma aritmética baseada nesses símbolos, seguida por uma teoria de equações (FIBONACCI, 2002).

As obras matemáticas e astronômicas de al-Khwarizmi há muito tempo atraem a atenção de pesquisadores e foram repetidamente publicadas em diferentes idiomas. Essa atividade de tradução e edição trouxe muitos benefícios, sobretudo para a popularização do patrimônio científico de um dos maiores estudiosos da Ásia Central da época medieval. O quadro 1, mostra na primeira linha a referência do manuscrito de Cambridge, e nas linhas seguintes, segundo Hogendijk (2018), as traduções que foram feitas a partir deste manuscrito.

Estas são apenas algumas das observações no estudo do texto. Nosso trabalho está apenas começando e há muitas questões que merecem atenção. Para citar apenas algumas delas:

Como a prece inicial que caracteriza as obras muçulmanas do período se concilia com al-Khwarizmi e os indícios (ou possibilidade) de ele ser um zoroastrista?

1. A quantidade de cifras (nove) é indicada por meio de números romanos, o que certamente al-Khwarizmi não fez; qual símbolos al-Khwarizmi usou para representar os números em seu manuscrito árabe original?
2. Nove letras, o que quer dizer que o zero não conta como número. Como e quando o zero passou a ser considerado um número?
3. Letra, sinal, figura, cifra são termos usados como equivalentes. No manuscrito árabe havia também esta profusão de termos para indicar cifra?
4. As figuras de que fala o texto, que seriam os desenhos das cifras, não aparecem no manuscrito latim. Por quê?
5. Quais cifras seriam as usadas por al-Khwarizmi.

As perguntas não são simples, suas respostas exigem estudos posteriores. Esperamos ter forças para ir até o final.

Referências Bibliográficas

AL-KHWARIZMI, Muhammad Ibn Musa. **The Beginnings of Algebra** (Tradução comentada da Álgebra de al-Khwarizmi). Rushd Rashed (tradutor e editor). Saqi, 2009

BERGGREN, L. **Episodes in the mathematics of medieval Islam**. Includes bibliographies and index. N.Y. Springer Verlag, 1986.

BONCOMPAGNI, B. 1857. **Trattati d'arithmetica**, em: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de> Acesso em: ago. 2018.

BREZINA, C. **Al-Khwarizmi: The inventor of Algebra.** New York: The Rosen Publishing Group, 2006.

BULGÁKOV, I. G.; ROZENFELD, B. A.; ÁKHMEDOV. A. A. **Muhammad al-Khorezmi (c.783 - c. 850)**. Izdátelstvo Naúka: Moscou, 1983.

CAMBRIDGE. **A catalogue of the manuscripts preserved in the Library of the University of Cambridge**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1858.

Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modem English of Leonardo Pisano's Book of calculation. Trad. Laurence Sigler. Springer, 2002.

Göttinger Digitalisierungszentrum. https://www.deutsche-digi tale-bibliothek.de/item/TIMB7AU7GMWTULQK7SGIUAZ 63N2SMKMY

HOGENDIJK J. P.; Disponível em <http://www.jphogendijk.nl/khwarizmi.html> Acesso em: set. 2018.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d0/USSR_Republics_Numbered_Alphabetically.png (mapa da união soviética)

IBN AL-NADIM. Al Fikhrist. Cairo, 1929, p. 397. (Em árabe)

IBN AL-NADIM. Al Fikhrist. Cairo, 1929, p. 397. (Em árabe)

JEFF MILLER PAGES http://jeff560.tripod.com/images/khowar.jpg.

MUHAMMAD IBN MUSA AL-KHOREZMI. **Livro sobre o cálculo indiano**. Trad. Do latim por Yu. Kh. Kopelevitch e A. P. Yushkiévitch. In: Muhammad Ibn Musa al-Khorezmi – Matematítcheskie Traktaty. Izdátelsvo FAN Uzbekskoy SSR. 1983. (p. 5-19).

STRUIK, D. J.; **A Source Book in Mathematics, 1200-1800**. Princeton, New Jersey, 1986.

YUSHKIÉVITCH, A. P. Sobre o tratado aritmético de al-Khwarizmi (O trudê po arifmétike al-Khorezma). In: **Muhammad ibn Mussa al-Khorezmi - Matematítcheski traktati**. Akademya Naúk Uzbekskoy SSR. 1983.

3

UM ESTUDO DO *EPITOME ARITHMETICAE PRACTICAE* DE CHRISTOPH CLAVIUS (1538-1612): POTENCIALIDADES DE UM TEXTO HISTÓRICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

João Cláudio Brandemberg

Apresentação

Nas leituras sobre História da Matemática o nome de Christoph Clavius (1538-1612), mesmo considerando aspectos importantes de sua obra, como os comentários em sua tradução dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (300 a. C) e da participação na reforma do calendário gregoriano, aparece, inúmeras vezes, ligado às questões relativas a resolução (ou formas de resolução – métodos e algoritmos) de problemas de cunho aritmético ou algébrico, algumas vezes produzidos no formato de manuais, o que nos remete a um Clavius em sua função de professor e divulgador do saber matemático (KNOBLOCH, 1995); (EVES, 2002).

Segundo Knobloch (1995, p. 36), em seus escritos Clavius, *a priori*, não objetivava, como resultado, a originalidade das ideias e a produção de novos conteúdos. Em suma, o que ele buscava era simplificar o conhecimento matemático e obter maior clareza e precisão possíveis. Almejava combinar a teoria, baseada em demonstrações claras, e tão fácil de entender quanto possível, com a prática, através de suas aplicações.

Desta forma, na busca por materiais sobre o desenvolvimento e o ensino de conteúdos de Aritmética, com vistas a discutir aspectos didáticos destes conteúdos, nos parece importante um estudo de sua produção nesta área do conhecimento matemático. Assim, se fez necessária uma busca por maiores informações, referenciadas em bibliografia especializada. Em particular, realizamos um estudo de sua produção tomando como base a síntese apresentada em seu livro *Epitome Arithmeticae Practicae* (1614).

Em nosso estudo do *Epitome*, buscamos apresentar uma descrição macro dos conteúdos presentes no texto, considerando aspectos da influência sociocultural da época de sua produção, atentando para suas características ligadas ao desenvolvimento e ao ensino dos conteúdos de Aritmética, e realizando uma análise mais micro de uma seleção de conteúdos com vistas a discutir suas potencialidades didáticas, como um texto histórico, no Ensino de Matemática.

Desse modo, em nossa composição textual, descrevemos, a seguir, aspectos do momento histórico da vivencia de Christoph Clavius, buscando contextualizar a publicação e a escrita do seu Manual de Aritmética e, a partir de uma apresentação, discussão e análise dos conteúdos do texto.

O Momento Histórico Vivido por Christoph Clavius (1538-1612)

Segundo Schweitzer (2005, p. 1), Enzensberger (1995, p. 228) e Eves (2002, p. 312), Christoph Clavius é originário de Bamberg, cidade de pequeno porte localizada na região da Francônia, no extremo norte do estado da Baviera, de nacionalidade alemã, onde nasceu em 25 de março de 1538, mas passou a maior parte de sua vida na Itália, onde estudou Teologia e trabalhou como professor do Colégio Romano, tendo falecido em Roma no ano de 1612.

Clavius tinha apenas 17 anos ao entrar para a ordem dos jesuítas em 1555, a reconhecida Companhia de Jesus, fundada em 1539 pelo nobre espanhol Inácio de Loyola (1491- 1556). A referida Companhia era uma associação composta por indivíduos especializados e treinados com o objetivo de difundir os ensinamentos da Igreja Católica, promovendo sua expansão e que se constituiu em um império do ensino, chegando a marca de 20 mil membros ao fim do século XVIII.

Os padrões exigidos para a aceitação na ordem dos Jesuítas eram rigorosos, sendo que os primeiros líderes da Companhia provinham de famílias nobres. Outra forma de reconhecimento para acesso à ordem era a formação intelectual, que incluía a Teologia, a Filosofia, a Astronomia e a Matemática, entre as principais, sendo a Teologia a mais importante.

No centro deste sistema educacional de alcance mundial, destaca-se o Colégio Romano, de uma arquitetura imponente, refletindo o poder e o prestígio da ordem. Era a partir do Colégio Romano, nos idos de 1551, que se estabeleciam os currículos em todos os colégios jesuítas ao redor do mundo.

O currículo do Colégio incluía o aprendizado de línguas como o Latim, o Grego e o Hebraico e se desdobrava em campos diversos do conhecimento humano, com o estudo de biologia, ética, política, lógica, física e astronomia.

Desde sua aceitação na ordem, Clavius sempre demonstrou interesse pela Matemática. Para sua formação, estudou Filosofia, na Universidade de Coimbra, sob a tutela do professor Pedro da Fonseca (1528-1599), e provavelmente Matemática com o professor Pedro Nunes (1502-1577). Posteriormente, em 1560 retorna a Itália, vindo a estudar Teologia por quatro anos e sendo ordenado sacerdote em 1564. Mesmo tendo iniciado suas aulas de matemática em 1563, Clavius só se torna professor oficial do Colégio Romano em 1567, quando da oferta de uma vaga. (ENZENSBERGER,1995, p. 234).

Para Schweitzer (2005, p. 2), uma boa descrição de Clavius, que nos permite uma imagem difusa de sua personalidade e erudição, nos é apresentada por seu contemporâneo Bernardino Baldi (1553-1617), quando Clavius tinha cerca de 50 anos:

> Ele é um homem incansável em seus estudos e é de uma constituição tão robusta que pode suportar confortavelmente as longas tardes e esforços de sua erudição. Ele é forte e sua estatura é proporcional. Tem um rosto agradável com um rubor masculino, e seu cabelo é misturado em preto e branco. Fala muito bem o italiano, fala latim elegantemente e entende o grego. Mas tão importante como todas essas coisas, sua disposição é tal que ele é agradável com todos aqueles com quem conversa. No momento desta redação, ele está no 50º ano, e devemos orar para que sua vida se prolongue para que o mundo continue a receber os frutos de seu intelecto, cultivados e férteis, como o que está acostumado a produzir (BALDI apud SCHWEITZER, 2005, p. 2).

Foi graças a seus esforços que na Companhia a Matemática deixa o caráter de auxiliar ao ensino de outras disciplinas e vai para o centro do currículo jesuíta. De fato, no século XVII os jesuítas se tornam os principais estudiosos no campo da Matemática.

> A influência da Companhia de Jesus no renascimento dos estudos em Matemática durante os séculos XVI e XVII é inegável. Desde o inicio os companheiros de Ignacio de Loyola como Jerónimo Nadal (1507-1580) e Baltasar

> Torres (?-1563) (plantearon) a necessidade da Matemática como ciência suporte da filosofia natural. Para os jesuítas, o empirismo aristotélico necessitava de uma base racional que seria proporcionada pela Matemática (SABATÉ, 2011, p. 577).

Em acordo com Sabaté (2011, p. 579), Clavius redigiu documentos em defesa do ensino de Matemática, entre 1586 e 1591, nos quais advoga a necessidade de se estender o estudo em matemática a todos os alunos da ordem, a necessidade de se estudar matemática para os estudos em Filosofia Natural e a necessidade da formação de bons professores de Matemática, para atender as necessidades dos colégios da ordem jesuítica. Seus documentos constituem uma verdadeira apologia ao Ensino de Matemática. De fato, Clavius usa de seu prestígio para influenciar na elaboração da "*Ratio Studiorum*", incluindo o estudo de matemática, inicialmente, no programa básico de estudos.

Em seus estudos, principalmente em Geometria, Clavius não se contenta com a teoria apresentada nos textos clássicos e, com seus comentários, busca ampliar a visão dos conteúdos e enriquece-los com novas reflexões. Seu propósito, embora não seja abertamente expresso, é escrever um livro que sirva de guia para os professores de matemática formados no Colégio Romano e que depois iriam ensinar Matemática em todas as escolas da Ordem. (SABATÉ, 2011, p. 584).

Para Clavius, a criação da Academia de matemáticas no Colégio Romano, mesmo que informal, se estabelece pelo significativo número de professores formados em Matemática, sob o ministério dele, e que foram ensinar matemática em diversos lugares do mundo.

Clavius chega ao detalhe da descrição de como realizar suas aulas, fazendo com que seus alunos assumam uma postura ativa e interrogativa, visando novas demonstrações para as proposições apresentadas e buscando aplicações das mesmas ao cotidiano. Este posicionamento se reflete na urgência em se promover a formação dos professores de forma acadêmica.

Segundo Sabaté (2011, p. 579), o jesuíta, Christoph Clavius, considerava a matemática como a primeira das ciências, exercendo função mediadora entre a física e a metafísica. E demonstrou, em diferentes documentos, as mesmas inquietudes de seus pares eruditos enquanto se criava o sistema educativo jesuítico, principalmente no que concerne ao currículo das matemáticas, em temas como a preeminência da Geometria, a inclusão da Astronomia, o sentido utilitário da Matemática e a necessidade de seu conhecimento para outras disciplinas, principalmente nas Ciências Naturais, pois segundo Clavius os elementos da geometria seriam as partes mais elementares que comporiam as realidades físicas.

Assim, Clavius iniciou um *currículo*, sobre o ensino das disciplinas matemáticas nos colégios da ordem, o qual se dividia nos seguintes nove tópicos: (1) do nome das disciplinas matemáticas e (2) da divisão destas disciplinas; (3) dos criadores destas disciplinas; (4) da nobreza das ciências matemáticas; (5) da utilidade das disciplinas matemáticas; (6) da excelência da geometria euclidiana; (7) da divisão da geometria contida nos Elementos de Euclides; (8) das definições de problema, teorema, proposição e lema para os matemáticos e (9) o que seriam Princípios entre os matemáticos.

Christoph Clavius foi um professor inspirador que escreveu textos de aritmética (1583) e álgebra (1608) dignos de respeito. Além disso, em 1574, publicou uma edição dos *Elementos* de Euclides, especialmente valiosa pelos seus comentários. Também escreveu sobre trigonometria e astronomia e desempenhou um papel importante na reforma do calendário gregoriano (EVES, 2002).

Clavius antecipou uma série de desenvolvimentos matemáticos. Os detalhes de algumas de suas descobertas são surpreendentes. Em seu *Astrolabium* (1593) ele usa um ponto para separar números inteiros de frações decimais, cerca de 20 anos antes que o ponto decimal fosse amplamente aceito. Ele cria uma forma de dividir escalas numéricas para medições precisas. Sua ideia foi adotada por Vernier 42 anos depois.

Como constatamos de Knobloch (1995) e de Schweitzer (2005), ao traduzir e comentar os Elementos de Euclides, Clavius dá especial atenção para os elementos teóricos da Geometria e da Aritmética presentes no texto, tomando como ponto de partida para inferir a necessidade de escrever duas obras especiais sobre a prática destes dois temas importantes.

Entretanto, é nosso objetivo atentarmos para a importância dos trabalhos de Clavius relacionados ao ensino de aritmética, em particular ao *Epitome Arithmeticae Practicae*, em um estudo, que o contextualize e possa apontar suas potencialidades para o ensino de matemática.

Contextualizando a Escrita e a Publicação do *Epitome Arithmeticae Practicae* (1614)

Para Knobloch (1995, p. 35), ao considerar as obras publicadas por Clavius, deve-se enfatizar a especialidade de suas fontes científicas e atentar aos resumos históricos encontrados nestas obras e em particular as suas próprias contribuições para as ciências matemáticas, como os estudos de problemas sobre polígonos regulares convexos, a quadratriz e uma generalização da operação de multiplicação.

Temos, então, dentre seus inúmeros escritos, uma preocupação com a manipulação dos números, suas operações, propriedades, algoritmos e aplicações na resolução de problemas. Assim, inquirimos sobre o que levou Clavius a produção de seu manual de aritmética.

Segundo Knobloch (1995, p. 35), o *Epitome Arithmeticae Practicae* se constitui em um dos manuais produzidos por Clavius.

Uma revisão do texto de aritmética, escrito em 1583 e finalizado em 1606, foi publicada postumamente em 1614. É um texto abrangente, de uma "matemática prática", composto por vinte e nove capítulos. Trata-se de uma Aritmética Prática que pode ser empregada, dentre outras atividades, em questões que envolvem transações comerciais, problemas fiscais e partilhas de bens.

Sua composição inicial nos apresenta aspectos importantes sobre as operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros e fracionários, as quais constituem os temas dos quinze (15) primeiros capítulos do texto.

No prefácio do *Epitome Arithmeticae Practicae*, denominado *Lectoris*, Clavius nos fala de uma Aritmética que o seduz. Um conhecimento matemático tão abrangente e importante que para ele, "sem uma aritmética, nenhuma ciência, ..., em qualquer sociedade humana, é consistente" [*sine arithmetica, vt ego quidem exstimo, nulla scientiae, ..., neque ipsa hominum societa sposit consistere*]. Para Clavius, esta aritmética prática traz dignidade ao povo por sua acessibilidade e aplicabilidade a problemas cotidianos.

De fato, sua aplicação em transações comerciais, na prestação de contas, tanto na esfera pública (cobrança de taxas) quanto na privada (sociedades), a torna uma ferramenta indispensável, por exemplo, para o cálculo de receitas e despesas, reconhecendo possíveis fraudes.

Segundo Clavius (2012, p. 4), as manipulações com os números e suas operações aritméticas deixam o homem pronto para começar a receber outros conhecimentos matemáticos que lhe venham a ser ensinados. Com seu texto Clavius deseja proporcionar aos leitores as vantagens do conhecimento aritmético.

Em acordo com Roque (2012, p. 296-297), para contextualizarmos a escrita do *Epitome Arithmeticae Practicae*, podemos considerar que a prática aritmética era a base para o conhecimento matemático dos comerciantes e artesãos superiores cuja formação se desenvolvia fora do contexto universitário. Principalmente, no século XVI, intensificou-se o interesse pela matemática por parte de artesãos e engenheiros que desejavam resolver problemas de assuntos ligados à vida comum.

Assim, consideramos Michael Stifel (1487-1567), Petrus Ramus (1515-1572) e Christoph Clavius (1538-1612) como os primeiros a discutirem, no contexto científico, a utilidade prática da matemática (aritmética prática). Para Ramus, mais do que métodos e provas, o uso público da matemática deveria ser valorizado.

Observamos a importância do *Arithmetica Integra* de Michael Stifel (1487-1567), publicado em 1544, para a escrita de Clavius. Um texto de maior abrangência que o *Epitome* em termos técnicos do conteúdo apresentado, tratando inclusive de questões de irracionalidade dos números, mas com menos aplicações a problemas práticos. De fato, Stifel (1544) dedica, em um apêndice de seu texto, 10 páginas aos métodos da Falsa Posição (*regula falsi*) e do confinamento (*regula alligationis*), enquanto que, Clavius produz cerca de 60 páginas sobre estas regras, distribuídas em três capítulos. Além dessas regras, Clavius (2012) trata das chamadas regras de três simples e composta, bem como a regra da sociedade, entre outras.

Podemos afirmar que o texto de Clavius (2012) tem maior preocupação com as aplicações destas regras. Como podemos ver com relação a *regula alligationis*, ele parte da resolução de um problema sobre “composição” de vinhos (CLAVIUS, 2012, p. 214), nos moldes do apresentado por Stifel (1544, p. 100), e cuja diferença são os valores apresentados. Em seguida Clavius continua sua apresentação trazendo outros problemas práticos envolvendo mais variáveis (elementos). Clavius (2012, pp. 229-273) faz o mesmo com a regra da Falsa Posição.

Assim, podemos destacar a produção do *Epitome Arithmeticae practicae* como a produção de um manual que vem proporcionar o acesso das populações a um conhecimento aritmético premente as necessidades da época, assim como, propiciar um livro texto para ser trabalhado na formação de professores com vistas a maior projeção e divulgação destes conhecimentos aritméticos e dando a Clavius um papel central na produção da matemática como disciplina a ser tratada com a devida importância em todos os níveis escolares, a partir do século XVII.

> O papel de Christoph Clavius (1538-1612) na história da disciplina matemática do final da Renascença tem sido muitas vezes julgado Central. Este julgamento não deriva do gênio ou caráter inovador de suas contribuições, uma vez que não pode lhe ser atribuído qualquer resultado importante: para fazer uma comparação com um homem de sua geração, suas obras eram muito mais educativas e tradicionais, apresentando menos brilho do que as obras de um Viète. Este julgamento não expressa uma situação de excelência em um único aspecto, mas sim a soma de uma série de evidências relacionadas a vários aspectos do desenvolvimento da matemática como a divulgação dos clássicos da matemática grega em textos confiáveis, com comentários de profundidade; o processo de "manualização" de disciplinas matemáticas (onde Clavius contribuiu com obras de extensão que tem pouco paralelo) e a codificação de um estágio de desenvolvimento das notações e algoritmos (BALDINI e NAPOLITANI, 1992, p. 5).

Segundo Knobloch (1988, pp. 336-337), Clavius se notabiliza quando pensa que o maior mérito está na simplificação do conhecimento matemático. Seu principal objetivo é alcançar a clareza, a exatidão e a aplicação prática com os conteúdos matemáticos trabalhados. Ele insiste, em muitas passagens de seus escritos, sobre essas qualidades.

Para Clavius em consonância aos seus objetivos, muitas vezes, em função da aplicabilidade do conhecimento, se necessário, é preferível dar um passo atrás e tratar de novas descobertas. Isto se torna uma característica em seus manuais, por exemplo, de Astronomia, de Álgebra e do *Epitome Arithmeticae Practicae* (1614).

Uma Análise dos Conteúdos Contidos no Texto

Como vimos frisando anteriormente, os quinze capítulos iniciais são dedicados ao ensino da contagem e operações com números inteiros e racionais, descrevendo seus algoritmos e discutindo propriedades significativas para o uso e aplicação dos mesmos em atividades práticas que são apresentadas na segunda parte do texto, capítulos 16 a 29, como identificados no quadro 1, a seguir.

Cap	**INDEX OMNIVM CAPITVM HVIVS ARITHMETICAE** [ÍNDICE DE TODOS OS CAPÍTULOS DESTA ARITMÉTICA]	Pag
1	**Numeratio integrorum numerorum** [Contagem dos números inteiros]	6
2	**Additio integrorum numerorum** [A Adição de números inteiros]	11
3	**Subtractio integrorum numerorum** [A Subtração de números inteiros]	24
4	**Multiplicatio integrorum numerorum** [A Multiplicação de números inteiros]	35
5	**Divisio integrorum numerorum** [A Divisão de números inteiros]	48
6	**Numeratio fractorum numerorum** [Contagem dos números fracionários]	89
7	**Aestimatio, fiue valor fractorum numerorum** [Avaliando bem o valor de um número fracionário]	92
8	**Fractiones fractorum numerorum** [Frações de números fracionários]	99

24	**Progressiones Arithmeticae** [Progressões Aritméticas]	**273**
25	**Progressiones Geometricae** [Progressões Geométricas]	**280**
26	**Extractio radicis quadrate** [A extração de raízes quadradas]	**312**
27	**Appropinquatio radicum in numeris non quadratis** [Uma abordagem das raízes de números não quadrados]	**324**
28	**Extractio radicis cubice** [A extração de raízes cúbicas]	**331**
29	**Appropinquatio radicum in numeris non cubis** [Uma abordagem das raízes de números não cúbicos]	**338**

Quadro 1. Conteúdo contido no texto elencado em forma de capítulos (sumário).
Fonte: Clavius (2012, p. 341).

Com relação às operações aritméticas, no capítulo dois (**Additio integrorum numerorum**), Clavius nos apresenta e descreve a operação de Adição de Números Inteiros em um algoritmo de quatro parcelas sobrepostas, onde temos a soma e a prova dos nove; uma característica marcante no texto (Figura 1). Para Clavius a prova dos nove se constitui em um bom critério para verificação dos acertos no resultado, permitindo identificar a pratica de fraudes, por pessoas desonestas, ao adicionarem múltiplos de 9 como parcelas ou 'partes' de parcelas de forma explicita (escrita) ou implícita (computada), aumentando ou diminuindo o valor de acordo com seus interesses.

Clavius (2012, p.11-12) descreve a forma como as parcelas devem ser arrumadas, via algoritmo, na realização do cálculo da soma. Em termos de Clavius, temos o seguinte enunciado: junte 0 e 9 fica 9; junte 7 para obter 16 e depois junte 4 que dará 20. Colocamos 0 como o primeiro elemento abaixo. Em seguida, adiciono a 8 a soma de 2 e 8 e obtenho 18; ao adicionar 5 a esta resulta 23. (Figura 1).

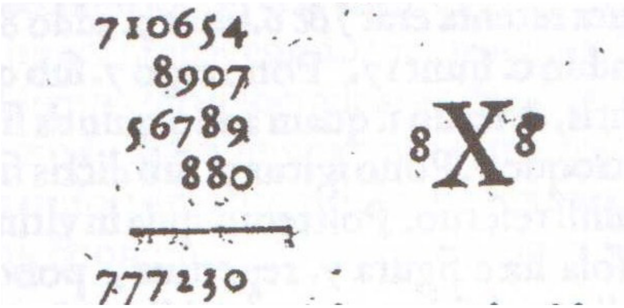


Figura 1. A operação Adição de números inteiros.
Fonte: CLAVIUS (2012, p.11)

Percebemos que o processo é o usual, utilizado em escolas dos anos iniciais, com a diferença que a adição nas colunas é de baixo para cima.

Relacionado à subtração, Clavius nos apresenta um algoritmo, onde aparentemente temos a ação do 'empréstimo' (Figura 2). Além da prova dos nove e de uma verificação adicionando o termo inferior (resultado) com o termo subtraído e nos traz uma prova menos comum utilizando o sete.

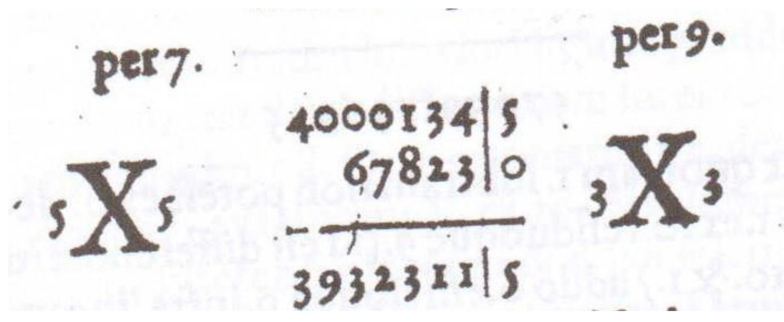


Figura 2. A operação Subtração de números inteiros.
Fonte: CLAVIUS (2012, p. 32)

A operação de Multiplicação de Números Inteiros (capitulo 4 **Multiplicatio Integrorum Numerorum**) descrita, inicialmente, por Clavius (2012, p. 35), nos dirige a que a multiplicação de um número por outro se dá na forma como um é conduzido pelo outro a um resultado (produto). Por exemplo, na multiplicação de 6 por 5 (cinco vezes seis) o resultado nos é apresentado, quando adicionamos cinco parcelas iguais a 6, obtendo 30, e é a esta soma de parcelas (iguais) que chamamos produto.

Na representação algorítmica de Clavius (2012, p. 47), a seguir, apresentamos dois exemplos de multiplicação (Figura 3). Temos, então, casos particulares, onde os multiplicandos 4068 e 3069 são múltiplos de nove e, portanto, o produto de cada multiplicação é um múltiplo de nove. De fato, temos: (i) 4068=9×452 e (ii) 3069=9×341. Logo, os produtos 93564=9×452x23 e 138105=9×341×45 são múltiplos de nove.

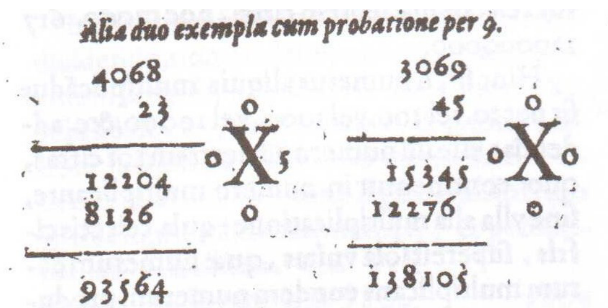


Figura 3. Multiplicação de números inteiros e prova dos nove.
Fonte: CLAVIUS (2012, p.47)

Para Clavius (2012, p. 47), exemplos como estes apontam para os cuidados com os erros (fraudes) a partir da verificação pela prova dos 9 e para as facilidades de se realizar multiplicações com números com o algarismo zero em sua composição [*facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras*].

Relacionado a divisão de números inteiros, capitulo 5, para Clavius (2012, p. 48), dividir é distribuir proporcionalmente um número em partes denominadas quotas (cotas). O número de unidades das quotas é o que chamamos de quociente. Por exemplo, ao dividirmos 36 por 9, efetivamente, distribuímos 36 em nonas partes de 4 unidades.

Em termos de algoritmo na divisão escrevemos o número divisor sobre o número dividendo, colocando o primeiro algarismo de um sob o primeiro algarismo do outro, o segundo sob o segundo, ... e como visto para a Adição, Subtração e Multiplicação, aqui, temos uma ordenação contrária (CLAVIUS, 2012, p. 49).

Uma apresentação melhor desta arrumação algorítmica, Figura 4, nos é dada, quando Clavius (2012, pp. 52-53) descreve a divisão de 76048 por 8, obtendo o quociente 9506. De fato, 8×9506=76048. Destaca-se os seguintes passos:

i. O divisor 8 é colocado sob o segundo algarismo (6) do dividendo 76048, pois é maior que o primeiro algarismo (7) do dividendo. Assim, ele divide 76 por 8. O quociente 9 desta divisão é representado a direita, separado do dividendo por parêntese.
ii. Ao realizar a divisão inteira de 76 por 8 e obter 9, o resto 4 é escrito acima do algarismo 6 do dividendo. Temos então, 4048 dividido por 8 e o algarismo 8 fica sob o algarismo 0 do "novo"dividendo. Na mesma representação, o quociente agora é 95.
iii. Como o resultado nesse ponto é exato e o divisor 8 é maior que o próximo algarismo do dividendo (4), o quociente fica (950).
iv. Ele considera o novo dividendo 48, com o divisor 8 escrito sob o algarismo 8 do dividendo e realiza a divisão, obtendo o quociente (9506).

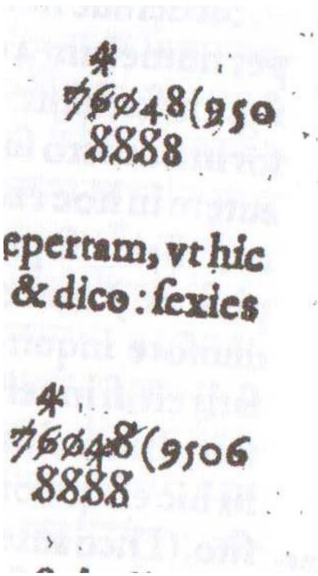

eperram, vt hic
& dico : sexies

Figura 4. Algoritmo da Divisão de números inteiros.
Fonte: CLAVIUS (2012, p.53)

Clavius (2012, pp. 54-60) executa o mesmo processo para realizar a divisão de 1832487 por 469, obtendo o quociente (3907,2217484009) o qual ele representa por (3907 104/469. O que comumente denominamos número misto, ou seja uma parte inteira e outra racional. A partir desta parte alíquota (dada pelo resto da divisão) se origina um número fracionário (*fractus numerus*) ou fração própria (parte da unidade, pedaço).

Para casos particulares, Clavius (2012), no decorrer do capítulo, apresenta e comenta algumas possibilidades para exemplos mais simples, como podemos ver na seguinte compilação.

Se tomarmos a divisão de 1832383 por 469 obtemos o quociente 3907. Ao acrescentarmos 235 ao dividendo temos 1832618 que dividindo por 469 nos dá o quociente 3907 235/469 ou aproximadamente 3907,5.

Quando o divisor é um número par temos tal aproximação como o resultado e a parte fracionária do número no quociente é ½. Desta forma, basta tomar uma divisão inteira e acrescentar ao dividendo valores inteiros que vão de 1 até o valor do divisor menos 1 (as possibilidades de restos).

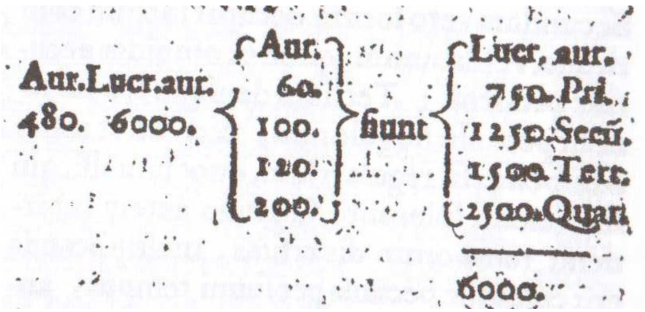
Assim, Clavius (2012) nos clarifica que a partir da divisão inteira (*Divisio integrorum numerorum*) se originam novos números que ele denomina de *Fractorum numerorum* e cujas operações e propriedades nos são apresentadas e discutidas nos 10 capítulos seguintes.

Após a exposição deste tratamento dos números inteiros e fracionários, Clavius (2012) parte para uma discussão de métodos de resolução de problemas, envolvendo grandezas proporcionais, nos moldes que a Divisão de números inteiros e fracionários lhe apresentam.

Na segunda parte do seu Manual de Aritmética, Clavius trata das relações de proporcionalidade de grandezas (capítulos 17 a 19) com vistas a resolução de problemas comerciais (capítulos 20 a 23), além das progressões aritméticas e geométricas e extração de raízes.

Nos capítulos 20 a 23, Clavius (2012) apresenta, respectivamente, os seguintes métodos proporcionais: *Regula Societatum* (regra da sociedade), *Regula Alligationis* (regra do confinamento, ligas, misturas) e *Regula Falsi* (regras da falsa posição), em uma exposição prática, a partir da resolução de problemas como, por exemplo: "quatro mercadores iniciam um consórcio, e ao final tem um lucro total de 6000. O primeiro contribuiu com 60, o segundo com 100, o terceiro com 120 e o quarto com 200. Qual a parte no lucro que cabe a cada sócio" (CLAVIUS, 2012, p 182).

Para a resolução, fazemos a divisão do lucro 6000 pela soma dos valores investidos 480=60+100+120+200 e multiplicamos este quociente 12 240/480 (fator de proporcionalidade) pelo valor que cada um contribuiu ao consórcio. Temos os valores: 750 para o primeiro, 1250 para o segundo, 1500 para o terceiro e 2500 para o quarto (Figura 5).



Aur.Lucr.aur.
480. 6000.
Aur.
60.
100.
120.
200.
funt
Lucr. aur.
750. Pri.
1250. Secũ.
1500. Terc.
2500. Quar.
6000.

Figura 5. Aplicação da *Regula Societatum*.
Fonte: CLAVIUS (2012, p.184).

Após a Regra da Sociedade, vamos falar sobre a importância da Regra de Confinamento, cujo uso exclusivo versa sobre contratos. Serão apresentados seus aspectos a partir de um exemplo que acreditamos, inicialmente, suficiente para descrevê-la em termos elementares. (STIFFEL, 1544, p. 100) (CLAVIUS, 2012, p.214). "Tomemos a mesma medida de dois tipos de vinho. O tipo mais barato de valor seis denários. A outra medida de vinho, mais caro, custando treze denários. Pretende-se obter uma medida ou uma mistura dos vinhos para serem vendidas ao preço de oito denários. "

Agora, a questão é estabelecer uma melhor medida para o outro vinho (ou compor uma mistura). Temos os seguintes números, 6 e 13, para compor o preço da mistura e o valor 8 denários como o preço do novo vinho. Estabelecemos as diferenças 13-8=5 e 8-6=2. Como a soma dessas diferenças é 5+2=7, tomamos 5/7 da medida composta pelo vinho mais barato 6.5/7=30/7 e 2/7 composta pelo vinho mais caro 13.2/7=26/7. O preço desta mistura, de fácil verificação, é dado por 30/7+26/7=56/7=8 denários.

De fato, em seus escritos matemáticos, elaborados, principalmente, para o uso nas escolas jesuítas, Clavius trata de problemas considerados ainda mais elementares, como:

i. Um problema de aritmética básica envolvendo tarifas alfandegárias.

Um mercador comprou 50000 libras de pimenta em Portugal por 10000 escudos, tendo de pagar uma taxa de 500 escudos. O transporte da mercadoria para a Itália custou-lhe 300 escudos e para entrar com ela nesse país recolheu uma taxa de 200 escudos. Para enviá-la a Florença gastou mais 100 escudos de frete e ainda teve de pagar 100 escudos de impostos à cidade. Por último, o governo fez incidir sobre cada mercador um imposto de 1000 escudos. Com isso ele ficou meio confuso para determinar o preço de venda da libra de pimenta, de modo que, após todas as despesas, possa obter um lucro de 1/10 de escudo por libra (EVES, 2002, p. 322). Observemos que, na resolução o preço obtido da divisão do preço de custo, 12200 escudos, pela quantidade de pimenta, 50000 libras. Temos o valor de 0,244 escudos por libra e, portanto, o preço de venda será de 0,344 escudos por libra.

ii. Três problemas de álgebra recreativa, mas envolvendo questões comerciais.

... (a) A fim de incentivar o filho a estudar aritmética, um pai propôs a pagar a ele 8 centavos por problema que o menino acertasse, aplicando, porém, uma multa de 5 centavos por solução errada. Ao fim de 26 problemas o menino nada tem a receber ou a pagar. Quantos problemas ele resolveu acertadamente? (b) Se eu resolvesse dar 7 centavos a cada mendigo à minha porta, me faltariam 24 centavos. E me faltariam 32 centavos se eu resolvesse dar 9 centavos a cada um. Quantos são os mendigos e quanto eu tenho? (c) Combinou-se com um criado o salário de $100 e um casaco, por um ano de trabalho. Após sete meses ele deixa o emprego e recebe o casaco e $20 como pagamento. Qual é o valor do casaco? (EVES, 2002, p. 328). Observemos que, na resolução do problema do casaco (c), temos o uso de uma regra de três simples, onde 12 meses está para 100+C, assim como, 7 meses está para 20+C de onde, temos a igualdade, 700+7C=240+12C e, portanto, o preço do casaco é $72.

São sua apresentação detalhada das operações numéricas e a abordagem de regras clássicas, de resolução de problemas, exemplificada em questões aritméticas do cotidiano, em sua praticidade, que nos remetem a considerar os potenciais didáticos de um texto histórico como o *Epitome Arithmeticae Practicae* para o ensino de matemática.

Discutindo Potenciais Didáticos do Texto para o Ensino de Matemática

Percebemos com o exposto, anteriormente, que os problemas presentes no *Epitome Arithmeticae Practicae* são detentores de potenciais para o ensino de matemática. Assim, o texto nos possibilita propor, a partir de seus extratos, questões-problemas para a efetivação das habilidades exigidas, atualmente, pelo currículo de ensino de matemática.

Desta forma, uma exploração “criativa” dos conteúdos de textos matemáticos históricos, pode nos trazer contribuições pedagógicas para o ensino de matemática. Queremos nesta seção elencar possíveis potenciais didáticos a serem explorados no *Epitome Arithmeticae practicae*. (GUIMARÃES FILHO e BRANDEMBERG, 2017).

Para tal, faz-se necessário delinear o que vem a ser Potencial Didático de um texto histórico de matemática. Entendemos como potencial didático, qualidades ou fatores positivos que viabilizem na prática docente a operacionalização do ensino de conteúdos, ou seja, toda a informação histórica que pode passar por uma transposição didática, efetivando tal ensino dos conteúdos.

Tal transposição didática emerge dos aspectos da constituição do saber escolar ou acadêmico, já que a educação escolar ou acadêmica não se limita apenas em fazer uma seleção dos saberes disponíveis historicamente nas culturas, mas em transformá-los em saberes possíveis de serem ensinados (MENDES E CHAQUIAM, 2016).

Neste sentido, buscamos em Miguel (1997), argumentos favoráveis ou que reforcem as potencialidades do uso de um texto histórico de matemática no ensino.

Em consonância com Miguel (1997), um texto histórico, além de proporcionar elementos motivadores ao estudante, constitui-se em uma fonte de atividades de cunho histórico que podem ser adequadas ao ensino de conteúdos matemáticos e garantindo elementos que permitam a formalização de conceitos. A utilização de um texto histórico se converte em um instrumento de verificação do desenvolvimento epistemológico dos conteúdos matemáticos que deve promover uma aprendizagem matemática mais abrangente e com significado.

Apontamos, então, algumas potencialidades a serem explorados a partir do conteúdo presente nos capítulos do *Epitome Arithmeticae Practicae* (1614):

- Construção de diversas formas de tratar as operações de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de números inteiros ou fracionários, a partir da descrição dos algoritmos e da notação apresentada;
- Produção de atividades envolvendo os métodos de verificação de resultados operatórios (na primeira parte) e envolvendo métodos de resolução de problemas que envolvem proporcionalidade (segunda parte);

- Discutir aspectos da história da humanidade, a partir da investigação da vida e da obra de um matemático: Christoph Clavius;
- Estudar a evolução da linguagem matemática no campo da Aritmética.

Entendemos que as potencialidades elencadas se harmonizam aos argumentos que discutimos, bem como, pertencem ao tipo de argumento histórico-epistemológico, característico da utilização de um texto histórico para o ensino.

Desse modo, o professor terá a oportunidade e os mecanismos necessários para propor situações que possam conduzir os alunos a uma redescoberta do conhecimento através dos problemas históricos investigados, na perspectiva de construir sua aprendizagem por meio da aquisição de conhecimentos e da redescoberta de princípios e métodos (MENDES, 2015).

Dessa maneira, para que a História da Matemática seja considerada como um elemento (recurso) didático para o ensino de conteúdos matemáticos é importante que as abordagens históricas utilizadas em sala de aula estejam vinculadas ao conteúdo a ser estudado, procurando encontrar justificativas, para a importância e a necessidade de ensino dos mesmos, motivando e aguçando a curiosidade dos estudantes.

Nesse direcionamento, nossa investigação histórica do *Epitome Arithmeticae Practicae* pode ser utilizada como um aliado didático-pedagógico no ensino e aprendizagem de conteúdos de aritmética em sala de aula.

Considerações

De nossa discussão a respeito do texto de Clavius, podemos afirmar que se trata de um manual de ensino, ou seja, um texto produzido para ser trabalhado como material de ensino de matemática, nas escolas jesuítas, assim como, para ensinar aritmética para a população, visando proporcionar a estes, uma forma de resolver problemas, principalmente comerciais, em sua prática cotidiana. Assim, seu texto se constitui em um tratado elementar, essencialmente prático e sem nenhuma pretensão cientifica (KNOBLOCH, 1988).

Vemos então, em Clavius (2012), que o papel dos jesuítas se faz fundamental nos desenvolvimentos posteriores das ciências, a partir da recuperação e difusão de textos clássicos em sua vertente original ou na produção de escritos práticos, de grande utilidade para a resolução e discussão de problemas cotidianos, ensejando a produção de tecnologias. A produção de vários textos de divulgação do conhecimento matemático necessário para resolver as dificuldades da época, mesmo que pouco originais, se fazem inovadores em seus efeitos didáticos e propedêuticos de grande alcance.

De fato, Clavius tinha planos de escrever um grande tratado de Aritmética, o que não foi realizado. No entanto, da escrita do seu *Epitome*, podemos inferir as possibilidades de uma argumentação dos conteúdos aritméticos (números, operações, propriedades, algoritmos, aplicações, métodos ou regras na resolução de problemas) que nos permite considerar extratos do conteúdo contido no texto para uma abordagem introdutória destes conteúdos em aulas de matemática.

A elaboração, apresentação, discussão e resolução de atividades de cunho histórico, envolvendo problemas práticos, sejam eles comerciais ou sobre impostos e heranças, deve nos permitir em época de discussão educativa voltada para a postura de um cidadão consciente de sua participação efetiva em termos da administração de suas finanças, uma maior identificação desta problemática.

Desta forma, efetivamos um ensino de conteúdos matemáticos que considere a exploração de aspectos metodológicos, resgatados de fontes históricas, na configuração de atividades de resolução de problemas a serem trabalhadas de forma objetiva com nossos estudantes e que considere o uso de um texto histórico como um elemento no processo de ensino.

Outrossim, uma maior atenção aos problemas aritméticos, considerados elementares, como vimos, podem nos dar, segundo Clavius (2012) uma maior consistência para alcançar conhecimentos mais avançados.

Referências

BALDINI, U. **Christoph Clavius e l'Attività Scientifica dei Gesuiti nell'età di Galileo**. Atti Del Convegno Internazionale (Chieti, 28-30 aprile 1993). Bulzoni Editore, 1995.

BALDINI, U.; NAPOLITANI, P. D. **Christoph Clavius Corripondenza: Introduzione e Strumenti** *(vol. I parti 1-3). Itália: 1992.*

CLAVIUS, C. **Christophori Clavii Epitome Arithmeticae Practicae (1614).** Reprint by Kessinger publishing, USA, 2012.

ENZENSBERGER, H. Societá, Cultura e Religione a Bamberga e in Franconia al tempi di Christoph Clavius. In BALDINI, U. **Christoph Clavius e l'Attività Scientifica dei Gesuiti nell'età di Galileo**. Atti Del Convegno Internazionale (Chieti, 28-30 aprile 1993). Bulzoni Editore, 1995.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática. **Revista de Educação Matemática e Cultura** – REMATEC – n. 26, 2017.

KNOBLOCH, E. Sur La vie et l'ouvre de Christophore Clavius (1538-1612). **Revue d'histoire des sciences 41** (331-356), 1988.

KNOBLOCH, E. Sur Le role dês Clavius dans l'histoire des Mathématiques. In BALDINI, U. **Christoph Clavius e l'Attività Scientifica dei Gesuiti nell'età di Galileo**. Atti Del Convegno Internazionale (Chieti, 28-30 aprile 1993). Bulzoni Editore, 1995.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas Aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p.73-105, jul./dez. 1997.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma visão Critica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SABATÉ, F. Mir. La Teoría de las Paralelas de André Tacquet. Entre Clavius y Saccheri. In: **Cuaderno de Materiales** Nº23, 2011, 575-600 - ISSN:1139-4382

SCHWEITZER, P. A. An overview of the life and work of Christopher Clavius. In **Proceedings of the Symposium on Christoph Clavius (1538–1612).** Edited by Dennis Snow: University of Notre Dame, 2005.

STIFEL, M. **Arithmetica Integra**. Nuremberg,1544.

4

UMA CARACTERIZAÇÃO DOS *ÉLEMENS GENERAUX DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHEMATIQUES*, DE ABBE DEIDIER, DE 1745

Iran Abreu Mendes

Nota Inicial

O estudo de obras matemáticas produzidas e publicadas em séculos anteriores ao século XXI (passado remoto ou recente) tem se caracterizado como objeto de estudos e pesquisas em História da Matemática, tanto no que concerne às investigações epistemológicas, quanto às patrimoniais e às pedagógicas. A esse respeito, desde 1990, acompanho o crescimento quantitativo e qualitativo desses estudos e das produções sobre o tema, principalmente no tocante às pesquisas de Mestrado e Doutorado que apresentam um eixo investigativo focado na História da Matemática, conforme apontam os estudos que venho realizando desde 2008 (MENDES, 2014; 2017), cujos resultados possibilitaram a criação do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMAT), um espaço virtual recém-criado com apoio do CNPq, o qual disponibilizou à comunidade acadêmica e aos professores da Educação Básica o acervo gerado nas produções elaboradas por pesquisadores dessa área de pesquisa e nas produções implementadas pela Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), na forma de livros de minicursos promovidos nos Seminários Nacionais de História da Matemática (SNHM), tendo sua primeira coleção de livros publicada em 2001, quando emergiram os primeiros livros de minicursos. Até 2021 a SBHMat já publicou um total de 121 livros com temáticas variadas, relacionadas à História da Matemática em suas dimensões epistemológicas, patrimoniais e pedagógicas.

Nesse acervo identificamos o quanto os pesquisadores têm investido estudos e esforços para pensar, adaptar e estabelecer métodos e técnicas para operacionalizar suas pesquisas, de modo a atender seus objetivos e oferecer resultados satisfatórios à formação conceitual e didática de professores de Matemática, bem como para a organização patrimonial dos acervos dessas produções. Uma das ações implementadas desde 1990 foram os estudos sobre textos históricos com vistas à exploração conceitual e didática das matemáticas neles presentes como, por exemplo, os estudos sobre livros de Matemática produzidos por matemáticos ou livros de textos matemáticos voltados ao ensino, bem como manuais escolares para o ensino de Matemática na Educação Básica.

A literatura da área apresenta um aumento do número de produções originadas das pesquisas sobre esses livros, publicadas na forma de artigos, livros, capítulos de livros, dissertações e teses. Seguindo essa direção, neste trabalho apresento uma descrição comentada sobre um livro que fez parte do acervo bibliográfico utilizado por matemáticos, astrônomos e cartógrafos participantes da Comissão Demarcadora de Limites Territoriais entre Portugal e Espanha no norte da América do Sul, na segunda metade do século XVIII (1753-1800), no Período Pombalino. Trata-se do livro de Abbé Deidier intitulado *Elémens* généraux des principales parties des mathématiques, nécessaires à l›artillerie et au génie (Elementos gerais das principais partes da matemática necessária para a artilharia e engenharia), publicado em 1745, na forma de um curso completo de Matemática Elementar, destinado à formação de engenheiros e artilheiros (militares).

Após ser utilizado durante 30 anos, em 1775 houve uma nova edição do referido livro, que foi apresentado com mais organização, cujo conteúdo foi reformulado e aperfeiçoado pelo autor. Neste capítulo trato de três questões centrais sobre o referido livro: o que há nesse livro que o fez ser tomado como uma referência para uso dos profissionais que pertenceram à comissão que esteve na Amazônia Brasileira? O que fez o livro permanecer em uso durante muitas décadas na formação desses profissionais da engenharia e da artilharia militar na França do século XVIII? Quais contribuições esse livro poderá trazer para o ensino de Matemática no século XXI, considerando alguns princípios norteadores para a utilização de informações históricas no ensino de Matemática?

Para que se possa avançar na construção de argumentos que respondam às questões anunciadas anteriormente, é necessário primeiramente traçar um perfil característico do livro em seu contexto histórico, social e acadêmico, no sentido de identificá-lo no ambiente científico e escolar de sua época, para que assim se tome parâmetro de reflexão acerca de sua importância e do seu valor formativo na época em que circulou, tal como assevera Salles (1986) quando propõe que um livro só faz sentido se houver circulação e que as primeiras impressões formatadas em pergaminho, com iluminações suntuosas e aplicações de folha de ouro, quando substituídas por papel, bem como as gravuras em madeira por tinta oleosa, transformaram-se em um produto mais adequado para seu deslocamento, manuseio e leitura. Nesse caso, o autor do livro salienta, ainda, que o livro precisava ser admitido como um produto manufaturado como qualquer outro, uma vez que a tarefa do editor não se limitava à publicação de um texto apenas, nem ao seu desenvolvimento material, mas se estendia à sua divulgação, ou seja, à sua promoção e à sua distribuição.

Nessa perspectiva tomei o conceito de circulação com base no que Burke (2003) discute ao tratar de *uma história social do conhecimento*, posto que no período em que o livro foi produzido e publicado (por volta de 1745), a disseminação, distribuição ou exportação do conhecimento acadêmico, na forma impressa, estava em um processo ainda lento devido às barreiras geográficas que não favoreciam o deslocamento dessas produções a partir de seus ambientes originais, tal como aconteceu com o envio de um acervo bibliográfico em 1753 para o Norte do Brasil, com o objetivo de subsidiar o trabalho da comissão que esteve na região para realizar atividades de demarcação territorial, urbanização das cidades e realização de estudos sobre o ambiente natural, geográfico e astronômico local.

Desse modo, a seguir, caracterizarei a edição original da obra com a intenção de explicitar inicialmente como foi organizada em seus dois tomos, subdividida em vários capítulos. O Tomo 1 é composto de aproximadamente 700 páginas, formado por dois livros que tratam diretamente da Aritmética elementar, Álgebra elementar, Geometria, Trigonometria e Seções cônicas. O Tomo 2 está organizado em aproximadamente 400 páginas e corresponde ao terceiro livro, que se trata de uma continuação aos temas tratados no Tomo 1. Assim, os assuntos tratados no Tomo 2 referem-se diretamente às regras da Aritmética infinita e sua aplicação, aprofundamentos de conhecimentos sobre Geometria, introdução aos estudos de Mecânica, Estática, Hidrostática, Aerometria, Hidráulica e um tratado sobre Perspectiva.

Destaco, portanto, que o livro contém uma abordagem teórica e prática dos assuntos, visando preparar profissionais da artilharia e da engenharia. A fim de avançar nessa descrição comentada, considero necessário realizá-la de forma comentada e sucinta sobre o contexto, o autor do livro e sua trajetória profissional, conforme segue.

Síntese (Bio)bibliográfica sobre o Autor

Abbé Deidier nasceu em Marselha em 1698 e faleceu em Paris em 1746. Atuou como professor de artilharia da Escola Militar de La Fère (França). Foi um matemático e professor de Matemática que participou da educação de Louis-Ferdinand Joseph de Croy, o Duque d'Havre, cuidado recompensado diante dos benefícios alcançados pelo príncipe ao desenvolver-se matematicamente e ter despertado para o assunto de modo a entregar-se inteiramente ao seu gosto pela Matemática. Publicou em 1739 seus *Inspectores Aritméticos*, ou *Novos Elementos de Matemática*; *Ciência e Agrimensores* ou a *Teoria e Prática da Geometria*, formando um ciclo completo de matemática elementar. Este trabalho foi estimado pela clareza, precisão, ordem e abundância de assuntos tratados. Em 1740, publicou *La mesure des surfaces et des solides, par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité* (A medição das superfícies e dos sólidos, pela aritmética do infinito e os centros de gravidade), um tratado que, após os dois anteriores, o autor, em forma de síntese, anexa métodos analíticos, para aprender a aplicação da Álgebra à Geometria. Esse passeio leva naturalmente ao conhecimento de cálculos modernos, sujeitos a um volume publicado em conjunto com o anterior, sob o título: *De calcul différentiel et calcul intégral, expliqués et appliqués à la géométrie* (De cálculo diferencial e cálculo integral, explicados e aplicados à geometria). Finalmente, para formar um curso completo de Matemática, publicou o seu *Mecânica Geral*, como uma introdução à Física e à Matemática (1741).

Talvez como consequência de tantos trabalhos publicados no espaço de dois anos, Deidier obteve êxito no pleito para ocupar o cargo de professor de Matemática na escola de artilharia de La Fère. Tão logo havia ocupado o referido cargo, despertou, no exercício da função, para seu projeto de escrever um novo livro, o que o fez elaborar dois volumes de escritos sobre seus cursos, produzindo assim uma nova reorganização com base nas suas produções anteriores e nas experiências docentes para, assim, formar um novo tratado elementar destinado aos cursos militares.

Nesse sentido, juntou-se uma perspectiva clara, de tal modo que, em 1745, foram lançados conjuntamente os dois tomos sob o título de *Elémens généraux des principales parties des mathématiques, nécessaires à l'artillerie et au génie* (Elementos gerais das principais partes da matemática, necessárias à artilharia e à engenharia). Trata-se de uma obra voltada às matemáticas úteis à formação de artilheiros, mas que acabou por se tornar uma referência na formação técnica, não só de artilheiros, mas também de construtores, engenheiros e outros profissionais similares na sua época.

Fruto dessa utilidade do livro foi o seu uso como suporte das ações práticas dos profissionais que atuaram na Comissão Demarcadora dos Limites Territoriais entre Portugal e Espanha no Norte da América do Sul (Amazônia), durante a segunda metade do século XVIII. Com base em um levantamento realizado junto aos arquivos digitais da Biblioteca Nacional da França (BNF), verifiquei o rol de publicações de Abbé Deidier, de modo a identificar sua importância como professor de matemática e as relações de sua matemática com a formação militar e técnica, cuja abordagem dos conteúdos tem como forte característica as relações entre teoria e prática em matemática, sob um enfoque mais pragmático e operacional nos usos do conteúdo em relação à sua aplicabilidade técnica. A relação dos títulos de suas obras registradas nos arquivos da BNF é a seguinte:

- *Projet d'une méchanique générale pour servir d'introduction aux sciences phisico-mathématiques* (S/D).
- *Le Parfait ingénieur françois, ou la Fortification offensive et défensive* (1734).
- *Lettre d'un mathématicien à un abbé* (1737).
- *Lettre d'un mathématicien à un abbé* (1737).
- *L'Arithmétique des géomètres, ou Nouveaux élémens de mathématiques. Suite de l'arithmétique des géomètres, contenant une introduction à l'algèbre et à l'analyse* (1739).
- *La Science des géomètres, ou la Théorie et la pratique de la géométrie* (1739).
- *Le calcul différentiel et le calcul intégral, expliqués et appliqués à la géométrie* (1740).
- *La Mesure des surfaces et des solides, par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité* (1740).
- *Nouvelle réfutation de l'hypothèse des forces vives* (1741).
- *La Méchanique générale, contenant la statique, l'airométrie, l'hydrostatique et l'hydraulique, pour servir d'introduction aux sciences physico-mathématiques.* (1741).
- *Le parfait ingénieur françois, ou la fortification offensive et défensive... nouvelle édition* (1742).
- *Le Parfait ingénieur françois, ou la Fortification offensive et défensive. Nouvelle édition corrigée et augmentée* (1742).
- *Traité de perspective théorique et pratique* (1744).
- *Elémens généraux des principales parties des mathématiques nécessaires à l'artillerie et au génie* (1745).
- *Le parfait ingénieur françois, ou La fortification offensive et défensive* (1757).
- *Réfut des forces vives* (1761).
- *Élémens généraux des principales parties des mathématiques nécessaires à l›artillerie et au génie* (1773).
- *Élémens généraux des principales parties des mathématiques nécessaires à l›artillerie et au génie. Nouvelle édition dirigée, rectifiée* (1773).

O contexto histórico, social, científico e escolar na Europa da primeira metade do século XVIII caracterizou-se pela ampliação das ideias iluministas estabelecidas no século XVII, com a criação de novas academias nobres em Berlim, Londres, dentre outras, formando em torno de sessenta academias que agregaram dissidentes da igreja da Inglaterra, excluídos de Oxford e de Cambridge (BURKE, 2003, p. 48).

Burke (2003) ainda destaca que a imprensa, especialmente aquela relativa aos periódicos, também pode ser considerada uma instituição que incentivou de maneira crescente a vida intelectual no século XVIII, contribuindo para a difusão, coesão e poder da comunidade ligada a essa produção impressa, pois foram aproximadamente 1267 os periódicos franceses criados entre 1600 e 1789. Igualmente, outro aspecto destacado é que o ambiente europeu desse período ganhou muito com a criação de organizações de fomento à pesquisa, como a prática de busca de informações para produção social de conhecimento, que já aparecia na França do século XVII, ampliando-se com a criação de novos círculos em busca das sistematizações profissionais de conhecimentos localizados (informações) para sua utilização na formação das mentalidades intelectuais.

É nessa compreensão que os livros passam a ganhar importância formativa e caráter disseminativo do conhecimento que circularia naquele período e que serviria como fonte para a produção de novos conhecimentos teóricos e práticos na Europa ou a partir de seu deslocamento para outros contextos. Talvez tenha sido esse o contexto que muito influenciou o modo como Abbé Deidier configurou seu livro em dois tomos no estilo de organização dos assuntos, bem como no tratamento dado às informações em cada um dos livros e capítulos, caracterizando assim os estudos históricos sobre livros de Matemática e sua importância.

Dos Estudos Históricos sobre Livros de Matemática e sua Importância Formativa

No que se refere aos modos de tratar os livros de Matemática produzidos em determinados períodos históricos e, considerando suas implicações conceituais e didáticas no ensino de Matemática, os diversos estudos relativos ao uso da história para o ensino da Matemática têm originado debates e apontado encaminhamentos que proporcionam a utilização desses estudos históricos, com vistas a compreender os modos de produção desse tipo de literatura científica e de sua importância para se (re)inventar estratégias de pensamento para a produção de métodos e técnicas de ensino, com base em informações históricas, nomeadamente aquelas que se referem aos conceitos, propriedades e relações matemáticas, bem como acerca de métodos e técnicas materializadas na forma de algoritmos e regras para encontrar soluções de problemas matemáticos em determinadas épocas, que podem ser reeditadas em tempos mais atuais, visando o ensino de matemática em quaisquer níveis de ensino.

A esse respeito, Schubring (2003) questiona sobre por que estudar livros históricos destinados ao uso no ensino, considerando que esses tipos de livros aparecem na cena histórica como objetos legítimos de pesquisa historiográfica, enfatizando modos de pensar a produção de conhecimento em matemática, o que se compreende por matemática e pelo modo como seu ensino é proposto nesses livros. Assim pode-se compreender como estão organizadas em um livro, muitas das histórias sociais das ideias, a institucionalização dos saberes tratados na organização de uma publicação dessa natureza, os métodos adotados para sua escrita e sua organização conceitual, dentre outros aspectos que compõem esse tipo de material didático.

Considero, portanto, que se trata de uma modalidade de pesquisa que possibilita compreender os modos como são institucionalizadas as ideias matemáticas e como são constituídas na forma de uma cultura a ser disseminada por intermédio do ambiente escolar, ou seja, perceber como esses livros foram sofrendo transformações em seus processos históricos de produção, para fazer circular culturas matemáticas, conforme os estilos de pensamento, estabelecidos nos coletivos representados pelas associações científicas, academias de ciência e organizações de grupos independentes que se caracterizaram por coletivos de pensamento, conforme propõe argumentativamente Ludwik Fleck (1935; 2010), ao afirmar que a epistemologia deve levar a efeito as investigações históricas comparativas.

Tal afirmação fez-me imputar que em diversos livros produzidos durante determinados períodos históricos, é possível identificar nitidamente os processos de elaboração adotados por seus autores, para recompor conhecimentos construídos anteriormente, a fim de fazer emergir novas conclusões ou acréscimos complementares ou originais aos conhecimentos historicamente construídos em momentos anteriores à elaboração do livro. A esse respeito, é possivel citar como exemplo algumas as produções de Lagrange como suas *Leçons Élementaires sur les Mathématiques donnés a L'École Normale en 1795*, assim como um livro publicado por Pierre de Fermat intitulado *Notes sur Diophantus*, publicado originalmente com o título em latim *Observationes Domini Petri de Fermat*, em 1670, como obra póstuma[1]. Além desses, há muitos outros trabalhos que tiveram como base de sua elaboração o conhecimento histórico produzido antes das suas produções escritas sobre temas matemáticos ou similares.

É assim, por exemplo, que tomei as ideias estabelecidas por Fleck para admitir a ampliação do contexto da descoberta, quando da elaboração de livros, como os produzidos por Abbé Deidier em sua curta carreira acadêmica, cuja libertação do passado conceitual caracteriza sua investigação para produzir um livro com

---

1 Tive acesso à obra publicada em italiano, sob o título de Osservazioni su Diofanto, publicada em 1959, 2006 e atualizada em 2017, que menciono nas referências.

novas características, sem perder o vínculo com a tradição matemática a qual originou os conceitos utilizados em seu trabalho, de modo a conservá-los, mas ao mesmo tempo transformá-los com aplicações práticas e conexões às diversas situações, tal como discorre Bombassaro (1992) ao tratar da epistemologia Fleckiana.

Foi, então, com esse espírito que tomei a epistemologia de Fleck para refletir sobre os modos de organização do livro de Abbé Deider, a fim de sustentar que sua elaboração foi estruturada sob o domínio de três fatores não metafísicos que participam da produção de conhecimento, segundo Fleck (1935; 2010): o indivíduo, o coletivo e a realidade objetiva (aquilo que é para ser conhecido). Além disso, as aplicações e experiências refletidas no livro podem ser entendidas como um modo de pensar a fazer o ensino e a aprendizagem matemática na perspectiva de uma dialética que mobiliza interativamente sujeito e conhecimento, para envolver o objeto já conhecido e o objeto a conhecer, tal como estão transpostos nos dois tomos que compõem a obra, que comentarei a seguir.

Nesse contexto, um aspecto que identifiquei nos dois tomos diz respeito ao estilo de elaboração editorial adotado por Abbé Deidier para a organização do livro como um todo, dos quais destaco que, tanto no primeiro tomo quanto no segundo, foi estabelecida uma organização para os assuntos em três momentos: 1) enunciação de pontos sintéticos sobre conceitos, princípios e regras de construção aritmética ou geométrica; 2) apresentação de axiomas, postulados e teoremas e 3) proposição de problemas ou desafios a serem solucionados pelos leitores ou estudantes em formação.

Com base nesse estilo editorial, o autor enumera todas as etapas de uma orientação didática para as construções geométricas, de modo que no final de cada um dos tomos do livro, disponibiliza os desenhos correspondentes a cada capítulo e seção dos tomos para que o leitor ou estudante possa compreender suas definições, propriedades, relações conceituais e experimentações práticas sugeridas. Com base nessas observações e identificação foi possível concluir que se trata de um estilo de organização didática bastante vigente nesse período, uma vez que identifiquei esse modelo de organização em quase todos os livros do século XVIII que foram pesquisados por mim para alcançar os objetivos de uma pesquisa realizada entre 2008 e 2020, na qual um dos aspectos investigados focalizou o acervo bibliográfico utilizado pela Comissão Demarcadora de Limites Territoriais entre Portugal e Espanha, no Norte da América do Sul, sendo que um dos livros que fazia parte desse acervo era o de autoria de Abbé Deidier.

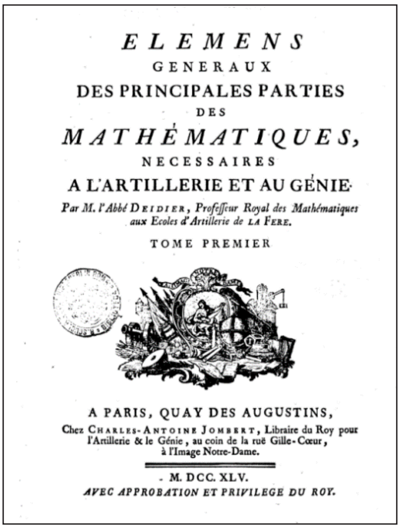
Caracterização do Primeiro Tomo do Livro

O primeiro tomo foi organizado em dois livros, subdivididos em vários capítulos. O livro primeiro é intitulado *Contendo os elementos de aritmética e de álgebra*. Foi organizado em 11 capítulos, dos quais os quatro primeiros tratam assuntos como definições, axiomas e princípios de Aritmética, ideias gerais e divisão de números, explicação das regras de operações aritméticas básicas com números inteiros e frações ordinárias, redução de duas ou mais frações a um mesmo denominador, simplificação de frações, operações aritméticas com diversos tipos de frações e representações decimais, bem como multiplicações e divisões compostas.

O quinto capítulo aborda especificamente a álgebra elementar, desde os sinais, símbolos ou signos básicos para caracterizar a linguagem algébrica, a partir de uma introdução na qual menciona os modos como Diofanto, Viète e Descartes trataram suas álgebras. Em seguida, apresenta as grandezas positivas e negativas, grandezas algébricas simples, denominadas monômios, até as mais complexas (polinômios), positivas e negativas, denominadas posteriormente pelo autor, como grandezas literais.

Prossegue abordando as operações com tais termos algébricos e especialmente com os binômios. Na sequência, aborda modos de operacionalizar a extração de raízes de grandezas literais, a partir da extração de raízes quadradas e cúbicas de grandezas numéricas, tomando a prática de extração das raízes quadradas e cúbicas de grandezas numéricas por aproximação para ampliar a compreensão do leitor sobre a formação do quadrado e do cubo algébrico e suas raízes.

Das partes seguintes em diante o autor aborda o ensino do cálculo de grandezas radicais, ao discorrer sobre as transformações de uma grandeza não radical em uma outra radical cujo expoente pode ser dado, bem como os modos de representar uma grandeza sem o sinal de radical. Segue, ainda, explicando como reduzir a um mesmo sinal duas ou mais grandezas radicais que têm diferentes sinais. Finaliza o capítulo com a apresentação das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação envolvendo radicais.


ELEMENS
GENERAUX
DES PRINCIPALES PARTIES
DES
MATHÉMATIQUES,
NECESSAIRES
A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.
Par M. l'Abbé DEIDIER, Profeſſeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de LA FERE.
TOME PREMIER

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la ruë Gille-Cœur, à l'Image Notre-Dame.
M. DCC. XLV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Figura 1. Folha de rosto do Tomo 1 do livro *Élémens Généraux des principales parties des Mathematiques*, de Abbé Deidier, da edição de 1745.
Fonte: Acervo digital da pesquisa.

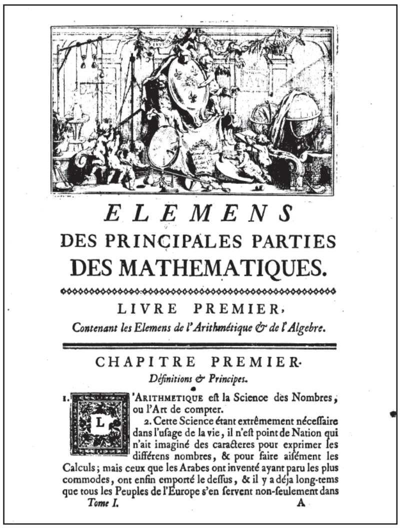
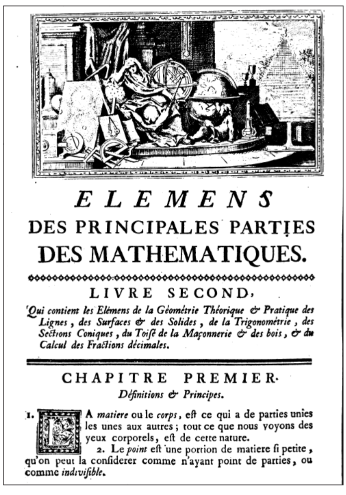

ELEMENS
DES PRINCIPALES PARTIES
DES MATHEMATIQUES.
LIVRE PREMIER,
Contenant les Elemens de l'Arithmétique & de l'Algebre.
CHAPITRE PREMIER.
Définitions & Principes.
1. L'ARITHMETIQUE eſt la Science des Nombres, ou l'Art de compter.
2. Cette Science étant extrêmement néceſſaire dans l'uſage de la vie, il n'eſt point de Nation qui n'ait imaginé des caractéres pour exprimer les différens nombres, & pour faire aiſément les Calculs; mais ceux que les Arabes ont inventé ayant paru les plus commodes, ont enfin emporté le deſſus, & il y a déja long-tems que tous les Peuples de l'Europe s'en ſervent non-ſeulement dans
Tome I. A

Figura 2. Folha de rosto do livro 1 do Tomo Primeiro do livro *Élémens Généraux des principales parties des Mathematiques*, de Abbé Deidier, da da edição de 1745.
Fonte: Acervo digital da pesquisa.

O sexto capítulo trata das noções básicas de análise, no qual o autor inicia com a apresentação de princípios e axiomas, seguindo com a abordagem da natureza dos problemas e de como fazer a análise e a maneira de identificar um termo desconhecido em uma equação, em situações gerais e em determinados problemas. Daí em diante aborda as equações compostas que não contêm somente um termo desconhecido, as resoluções de equações do segundo, terceiro, quarto e quinto graus, e assim por diante, bem como alguns problemas que envolvem essas equações.

Nos quatro últimos capítulos (do 7 ao 11) Deidier trata das razões, das proporções e das progressões aritméticas, abordando ainda, práticas sobre os modos de contagem de pilhas de balas de um canhão. Segue com progressões geométricas, proporção inversa, regra de três direta e indireta, regra de companhia ou de sociedade, regra de liga, e apresenta as razões compostas, abordando outras regras aritméticas denominadas regras de cinco, de sete, de nova, entre outras. Finaliza abordando os incomensuráveis e os logaritmos.



ELEMENS

DES PRINCIPALES PARTIES

DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SECOND,

Qui contient les Elémens de la Géométrie Théorique & Pratique des Lignes, des Surfaces & des Solides, de la Trigonométrie, des Sections Coniques, du Toisé de la Maçonnerie & des bois, & du Calcul des Fractions décimales.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1. LA *matiere* ou le *corps*, est ce qui a de parties unies les unes aux autres; tout ce que nous voyons des yeux corporels, est de cette nature.

2. Le *point* est une portion de matiere si petite, qu'on peut la considerer comme n'ayant point de parties, ou comme *indivisible*.

Figura 3. Folha de rosto do livro 2 do Tomo Primeiro do livro *Élémens Généraux des principales parties des Mathematiques*, de Abbé Deidier, da edição de 1745.

Fonte: Acervo digital da pesquisa.

O livro segundo tem como título: *Que contém elementos da geometria teórica e prática das linhas e superfícies e dos sólidos, da trigonometria, das seções cônicas, da mensuração em alvenaria e madeira e do cálculo das frações decimais, da extensão do comprimento ou das linhas*.

Nessa parte do livro, o autor organiza os assuntos em 11 capítulos, nos quais aborda elementos de geometria, trigonometria e cônicas em seus aspectos teóricos e práticos, bem como a respeito das práticas de medição em alvenaria e madeira e do cálculo de frações decimais. Nos dois primeiros, trata das definições e princípios, origens e propriedades das linhas em geral e especificamente das retas, dos ângulos e seus valores, das retas perpendiculares e paralelas. No terceiro capítulo, explica conceitos, propriedades dos triângulos e das figuras de vários lados, considerados em relação a seus lados e em seus vértices. Das figuras que possuem mais de três lados como quadriláteros e outros polígonos, das relações entre as linhas que os compõem e das razões, proporções e progressões geométricas dessas linhas e suas relações. Segue apresentando a hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer e das linhas diretamente e inversamente proporcionais, as seções de linhas conforme as razões dadas e as seções harmônicas das linhas. O sexto capítulo aborda as propriedades do círculo tratando principalmente de elementos geométricos como cordas, ângulos inscritos, propriedades do círculo, úteis para compreender as seções cônicas, tangentes e secantes. O sétimo capítulo trata da inscrição de polígonos regulares em um círculo e de sua circunscrição em torno do círculo.

O oitavo capítulo refere-se à trigonometria, à longimetria[2] e ao nivelamento. Trata da resolução de triângulos retângulos e triângulos obtusângulos, ou que não são retângulos e dos diversos problemas sobre longimetria, nivelamento. Para tratar

2 No livro, o termo longimetria aparece como uma parte da matemática que se vale de cálculos trigonométricos para medir a distância entre pontos inacessíveis.

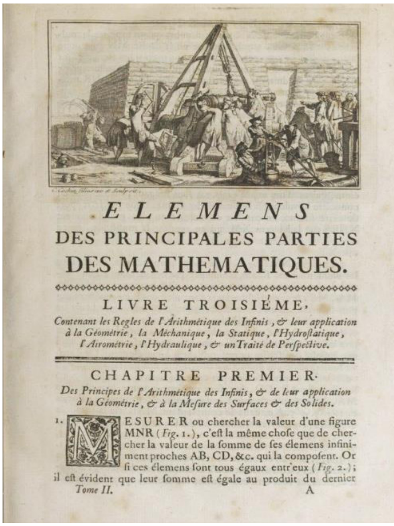
das medidas de comprimento, largura das superfícies, o nono capítulo aborda a planimetria ou medição das superfícies planas e suas relações entre si: figuras similares, figuras iguais. Discute as transformações das figuras em seus processos de ampliação e sua redução (de grande em pequena e vice-versa), bem como sua igualdade (congruência), suas relações comparativas em geral, bem como da geodésia ou divisão das figuras sobre o terreno e das figuras isoperimétricas.

No décimo capítulo, o autor trata das diferentes posições das linhas de planos contrários a outros planos. Nesse aspecto, aborda conteúdos relacionados às medidas de extensão, comprimento, largura e profundidade de um sólido. No capítulo onze trata da estereometria, ou seja, da medida dos sólidos, de suas superfícies e de suas relações, assim como das propriedades características dos prismas, dos cilindros e dos cubos, bem como das pirâmides, dos cones e das esferas. Além disso, trata das relações dos sólidos e de sua transformação, das superfícies dos diferentes sólidos, assim como dos usos do compasso de proporção necessários à compreensão ou ao entendimento do que foi abordado ao longo dos capítulos do livro. O autor finaliza o segundo livro tratando das aplicações práticas da geometria e das medições nas construções de alvenaria e de madeira, bem como das medidas em práticas de carpintaria ou de marcenaria, e ainda nos trabalhos dos fabricantes de rodas (de carroças ou charretes) e as medições em frações decimais.

Caracterização do Segundo Tomo do Livro

O segundo tomo trata exclusivamente do livro terceiro, intitulado *Contendo as regras de aritmética infinita e sua aplicação em geometria, mecânica, estática, hidrostática, aerometria, hidráulica e um tratado sobre perspectiva*, que está organizado em dois capítulos. No primeiro capítulo Deidier aborda os princípios da

Aritmética dos infinitos e de sua aplicação à Geometria e à medição das superfícies dos sólidos. A esse respeito, o autor discute suas observações concernentes aos números infinitos tendo em vista apontar possibilidades de aplicação desses princípios às atividades relacionadas aos conteúdos de Geometria.



ELEMENS

DES PRINCIPALES PARTIES

DES MATHEMATIQUES.

LIVRE TROISIÉME,

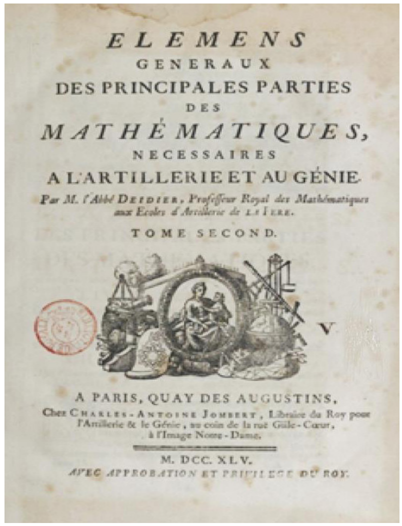
Contenant les Regles de l'Arithmétique des Infinis, & leur application à la Géométrie, la Méchanique, la Statique, l'Hydroſtatique, l'Airométrie, l'Hydraulique, & un Traité de Perſpective.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes de l'Arithmétique des Infinis, & de leur application à la Géométrie, & à la Meſure des Surfaces & des Solides.

1. MESURER ou chercher la valeur d'une figure MNR (*Fig.* 1.), c'eſt la même choſe que de chercher la valeur de la ſomme de ſes élemens infiniment proches AB, CD, &c. qui la compoſent. Or ſi ces élemens ſont tous égaux entr'eux (*Fig.* 2.); il eſt évident que leur ſomme eſt égale au produit du dernier

Tome II. A



ELEMENS

GENERAUX

DES PRINCIPALES PARTIES

DES

MATHÉMATIQUES,

NECESSAIRES

A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.

Par M. l'Abbé DEIDIER, *Profeſſeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de* LA FERE.

TOME SECOND.

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gîle-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Figura 4. Capa do Tomo segundo e Folha de rosto do livro 3 do livro *Élémens Généraux des principales parties des Mathematiques*, de Abbé Deidier, da edição de 1745.
Fonte: Acervo digital da pesquisa.

No segundo capítulo, o autor trata da Mecânica, iniciando com a enunciação de diversos axiomas relacionados ao assunto e, em seguida, discorre sobre as leis do movimento uniforme e das leis do movimento uniformemente acelerado, considerando que o Movimento é composto de duas ou mais forças uniformes, um composto de uma força uniforme e outro de uma força uniformemente acelerada, momento em que trata do movimento de projeção dos corpos e do lançamento de bombas.

Em seguida discorre sobre as leis do choque dos corpos, do choque corporal oblíquo e das bombas de choque contra os corpos que encontram e sua depressão no terreno (no solo). Propõe, ainda, uma abordagem acerca da Estática, no que concerne aos estudos sobre o centro de gravidade dos corpos sólidos e à aplicação dos princípios precedentes à Geometria. Ademais, aborda aspectos relativos à queda dos corpos, que envolvem também, os movimentos e as trajetórias de corpos em um plano inclinado. Nas sequências de temas relativos à Estática, o autor apresenta uma abordagem prática para discutir sobre as potências do levantamento de pesos com cordas, bem como acerca desses processos com apoio das alavancas e do movimento das rodas em torno do seu eixo, assim como das rodas dentadas e, especificamente, sobre as polias, espirais e parafusos.

Ainda nessa sequência, no segundo capítulo do terceiro livro, Abbé Deidier desenvolveu uma proposta de abordagem conceitual e didática sobre as noções teóricas acerca das situações contextuais relacionadas à Hidrostática. Para tanto, inicia com estudos e exemplificações práticas sobre o equilíbrio dos líquidos e de um corpo imerso em fluidos com gravidade menos específica que esses corpos; corpos imersos em fluidos com gravidade mais específica do que eles e sobre aerometria ou medição do volume de ar.

Nessa mesma direção de temas e suas abordagens teórico-práticas, trata dos usos do barômetro, do manômetro ou manoscópio, do termômetro, do higrômetro, da hidráulica e do sifão, da fonte de Heron de Alexandria, da bomba de aspiração e da bomba de redobragem, bem como do choque dos fluidos contra os corpos sólidos. Nessa parte do livro, identifiquei que o autor se propõe a preparar os leitores e estudantes para outros exercícios formativos relacionados à construção, ao manuseio e à interpretação de resultados obtidos com o uso dos instrumentos descritos por ele, levando em conta princípios físico-matemáticos que compõem esses objetos-instrumentos mencionados neste parágrafo.

No segundo capítulo do terceiro livro, Deidier discorre sobre seu Tratado de Perspectiva, no qual aborda aspectos relacionados à perspectiva ordinária e as propriedades da luz (luminosidade), com suas implicações do estabelecimento de um olhar para se tratar da perspectiva e, assim, poder compreender como é realizado esse processo de concretizar a visão. Nessa direção, enuncia princípios necessários às práticas da perspectiva, propõe desafios para a realização de prática da perspectiva levando em conta uma aprendizagem necessária para se representar figuras que estão sobre o plano do terreno, para também se exercitar a representação das linhas e das figuras elevadas sobre o plano do terreno. Igualmente, aborda modos como se colocar a linha principal sobre um plano durante o exercício da perspectiva, tomando a linha horizontal, o ponto de vista e os pontos de distância sobre uma mesa. Finaliza essa parte apontando alguns erros de algumas pessoas acerca da perspectiva.

Seguindo na mesma direção de abordagem relativa às aplicações da Matemática, principalmente Aritmética e Geometria, em atividades profissionais, esclarece como um escultor deve proceder para fazer uma estátua a ser colocada no topo de uma torre muito alta, para que aqueles que a vejam por baixo a enxerguem igual à altura natural de um homem. Trata-se de um exercício prático relacionado, também, aos estudos sobre perspectiva. Nesse intuito, aborda estudos sobre as sombras, algumas regras para compreender os movimentos originados pelas sombras solares e pelas sombras de tochas de fogo, quando se pretende projetar objetos em diferentes perspectivas. Por fim, discorre sobre as perspectivas imaginadas com o olhar de um pássaro parado ou em movimento e aponta a direção dos estudos sobre a perspectiva militar, objeto da formação principal proposta para o livro.

Comentários Gerais sobre o Primeiro e Segundo Tomos do Livro

De acordo com expressões do próprio Abbé Deidier, ao escrever o livro sua intenção inicial foi produzir informações que contribuíssem para dar instruções ao público em geral, em relação às profissões com as quais as Ciências Matemáticas pudessem ser úteis de alguma maneira, pois para o autor é por meio desses cálculos comuns que envolvem Aritmética, Álgebra ou Geometria e Trigonometria que, na época, melhor se fazia uso da Matemática nas outras ciências e técnicas como nos nivelamentos de terrenos, na medição de superfícies planas, de suas relações entre eles, suas mudanças, sua divisão, medição, áreas de superfícies e volumes de sólidos, de peças de madeira, seções cônicas, nas ciências dos movimentos, na mecânica, no conhecimento sobre as máquinas, nas propriedades de fluidos e entre outras do ar e da água.

Trata-se de um livro apropriado para ser utilizado na realização de um tipo de curso que visava introduzir nas escolas o mesmo modelo de ensino que já vinha sendo ministrado aos oficiais da artilharia, de modo que o estudante pudesse ser educado e assim progredisse nas partes relativas às matemáticas que atendessem às suas condições, sem, no entanto, abordar os assuntos por meio de um material cheio de demonstrações mais claras e mais precisas. Assim, o autor considerou que seria inútil elaborar um livro sobrecarregado apenas de teoremas e demonstrações, uma vez que suas consequências não contribuiriam efetivamente para uma aprendizagem com oportunidade de aplicação sobre muitos assuntos úteis e interessantes à vida dos estudantes na prática, pois considerava que a maioria das pessoas não presta atenção suficiente ao que estudam em Matemática e, muitas vezes, nem mesmo às ações dos mestres que os ensinam.

Assim, em seu prefácio à primeira edição, o autor considerou que não adiantaria repetir de cor todas as propostas de Euclides, ou os princípios e práticas de Arquimedes, ou ainda resolver os problemas de Pappus e Apolônio, ou Pitágoras. O que admitiu como mais importante em seu trabalho era lançar mão de outros traços não históricos a partir dos quais determinou o que e como poderia escrever e colocar em uma ordem natural diferente da que estava posta por outros autores, o que adicionou à obra, dividindo-a em três livros: o primeiro tratando dos Elementos de Aritmética, Álgebra, Análise, Razões, Proporções e Progressões aritméticas e geométricas com um pequeno tratado sobre Logaritmos; o segundo contendo os Elementos de Geometria, Trigonometria, Nivelamento, Planimetria, Estereometria, Seções Cônicas, as medidas em alvenarias e madeira.

O método mais conveniente adotado pelo autor para a organização dos conteúdos do livro foi o seguinte: demonstrava da maneira mais simples possível as principais regras e teoremas, e daí fazia surgir os enunciados sobre as operações de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão simples e compostas, cálculo de frações, extração de raízes quadrado e o da raiz cúbica. A esse respeito, logo no prefácio do livro, o próprio Abbé Deidier (1745) estabelece o seguinte:

> (...) aqueles que terão aprendido estas regras da maneira como as tratei, entenderão mais facilmente o restante deste trabalho, por causa do método. Álgebra não é senão ciência que aprende a fazer operações aritméticas, usando as letras do alfabeto em vez de números comuns, o que é feito pelo alguns dos sinais que escolhemos para marcar a adição, a subtração, etc. Eu explico as operações, eu faço para ver o motivo que levou a inventar esse cálculo, o uso deve fazer para resolver os problemas propostos; o que é esse problema determinado e problema indeterminado; o como encontrar a solução; como sabemos se uma equação é do primeiro grau, do segundo, do terceiro, etc. e o método geral de encontrar as raízes (PREFÁCIO).

No estudo realizado, foi possível, portanto, identificar que a base da abordagem didática adotada para a álgebra no livro foi estruturada nas regras de Aritmética e em princípios mais simples da Matemática, como, por exemplo, dizer que se dois números ou duas quantidades iguais ou adicionamos quantidades iguais; se multiplicarmos ou se dividirmos por essas quantidades iguais, as somas, os restos, os produtos e quocientes ainda serão iguais, então esses números trazem entre si sua demonstração, quando não aplicada. Nesse sentido, o autor afirmava que seu estudo seria muito útil aos estudantes para acostumar suas mentes a prestar atenção em seus esforços, assim como para simplificá-los.

Nessa parte do livro, Deidier esclarece o porquê e como entendia que os geômetras tomavam como significado para a palavra “razão”, a comparação que se fazia da medida de dois tamanhos de dois objetos similares representadas por dois números correspondentes a essas medidas. De acordo com o autor, tal comparação poderia ser feita, ou examinando a diferença encontrada entre os dois tamanhos, o que era por ele denominada de *Razão Aritmética*, ou observando com que frequência um dos dois continham o outro em termos de medida e, por meio dessa compreensão, denominava *Razão Geométrica*.

Do mesmo modo, depois de comparar dois tamanhos, o autor chega a comparar outros dois, esclarecendo que as duas comparações são semelhantes. Com base nessa conclusão, assevera que nesse caso há uma relação de proporcionalidade entre essas quatro magnitudes (medidas), e que tal proporção identificada pode ser representada nas formas aritméticas ou geométricas, dependendo se os parâmetros comparativos tomados para operar a comparação e para representá-la são de ordem aritmética ou geométrica.

Para finalizar suas ponderações sobre esse aspecto, Deidier considera que nessa dinâmica meditivo-comparativa emerge um processo de progressão aritmética ou geométrica, de acordo com os modos como a comparação é operacionalizada e representada.

Assim, o autor esclarece que quando vários tamanhos variarem e, entre eles, resultarem na mesma diferença, ou que eles são contidos um no outro da mesma maneira, tais progressões se tornam evidentes, por meio das relações de proporcionalidade estabelecidas entre as magnitudes medidas. Igualmente, o autor reitera que os ensinamentos sobre esse assunto são a essência não apenas da Aritmética, mas ainda, de todas as ciências matemáticas, uma vez que, isoladas, as palavras *Número* ou *Grandeza* não apresentam nada mais do que apenas ideias abstratas e, se quisermos saber ou explicitar para ser algo mais, só poderemos representar se for apoio dos meios que relatem situações nas quais números ou magnitudes (medidas) estejam em relações entre si, e em uma medida comum.

A maneira como Deidier trata das relações de proporcionalidade entre medidas e os valores numéricos que representam essas proporções ficam marcadamente destacadas na aplicação que faz para abordar os casos relativos às *Regras de Três direta e indireta, simples e composta*, assim como à *Regra de Sociedade*, dentre outros assuntos correlatos presentes no Tomo 1. As perguntas numéricas que o autor adicionou ao final dessa parte do livro parecem ter sido propostas com a finalidade de estimular um exercício desafiador na mente dos estudantes que quiserem avançar nas suas habilidades de abstração e no aumento da sua clareza em busca de certezas matemáticas sobre os temas tratados.

Um aspecto que chamou bastante a atenção, foi o fato de o autor destacar no livro que, nas matemáticas das quantidades, podem ser encontrados os chamados *números surdos, irracionais ou incomensuráveis*, cujas denominações se justificavam porque, naquele momento, não se tinha como expressar, em número, a relação que esses números tinham com quantidades conhecidas, ou seja, os sinais usados para marcar essas magnitudes eram denominados *Sinais Radicais*, e a maneira pela qual as operações aritméticas realizadas com os incomensuráveis eram denominadas por ele como *Cálculo de Radicais*. Embora tal assunto não fosse de uso muito frequente naquela altura do século XVIII, o autor não omitiu o assunto, mas sim procurou abordá-lo de modo a esclarecer como se deveria ou se poderia proceder em ocasiões que pudessem surgir. Pelo mesma razão, o autor também tratou de explicar sobre o *Cálculo de exposições*, cujo procedimento operacional ensinava a dispensar sinais radicais, especialmente porque as regras desse tipo de cálculo eram as mesmas que as dos logaritmos, cujo uso reduzia bastante o trabalho no cálculo trigonométrico.

Sobre esse cálculo de exposições, o autor estabelece que se trata da maneira de multiplicar uma potência de uma magnitude por outra potência da mesma magnitude, de dividir uma pela outra, de elevar uma potência de alguma magnitude para outra potência, ou da maneira de extrair a raiz usando apenas os expoentes.

Conforme foi mencionado anteriormente, é possível concluir minha reflexão sobre o primeiro tomo enfatizando que o autor deixa bem claro o que há de essencial para saber sobre aritmética e álgebra, no livro, está associado a muitas perguntas úteis e necessárias à formação matemática relativa à Artilharia. A esse respeito apresenta, por exemplo, por meio do enunciado simples, um modo como se poderia facilmente formar tabelas para encontrar o número de bolas em um empilhamento delas, seja qual for a figura que fosse usada para tal empilhamento. O mesmo raciocínio o autor toma como diretriz para discorrer sobre os modos como podemos descobrir a mesma coisa independentemente das tabelas, por meio de algumas fórmulas algébricas muito simples e facilmente construídas e que podemos tratar os Elementos de Geometria de uma maneira diferente do modo como foi tratado por Euclides. Foi, portanto, nesse sentido que o autor pensou em organizar suas propostas didáticas para que os leitores pudessem usar evidências para refletir sobre conceitos, propriedades e relações sobre os temas abordados no livro.

Como já mencionei anteriormente, o segundo tomo aborda exclusivamente o terceiro livro, que trata dos elementos da

Aritmética do infinito e sua aplicação à Geometria e à Mecânica como uma ciência do movimento e suas ramificações: estática, hidrostática, aerometria, hidráulica e um capítulo dedicado a um pequeno tratado de perspectiva.

O mesmo não ocorre com cálculos comuns, relativos às medições em Geometria, Trigonometria, bem como do uso feito dessas práticas de cálculos e medições no que se refere ao solo, nivelamento, medição de superfícies planas, de suas relações entre si, suas mudanças, divisão, medição de superfícies sólidas em alvenaria e madeira, seções cônicas, ciência do movimento, mecânica, conhecimento das máquinas, propriedades de fluidos e, entre outras, de ar e água.

O autor explica os princípios dos cálculos aritméticos infinitos esclarecendo que não se tratam de cálculos comuns, e sim de operações que envolvem Geometria e Trigonometria, ou seja, trata-se de um conhecimento aritmético (ele denomina ciência) no qual se aprende a operar numericamente as relações envolvem as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo; logo se trata dos conhecimentos que podem ser ampliados na prática a partir desses elementos. Mostra, ainda, como essas ideias se estabelecem nas práticas de medição de terrenos, no nivelamento de planos e mapas e na medição de distâncias acessíveis ou inacessíveis.

A investigação dos conteúdos abordados nos dois tomos fez-me identificar que a maioria dos assuntos é tratada de maneira muito sintética e curta demais, aparentemente transparecendo que não há uma ideia dos usos a que podem servir, e que existem muitos outros que exigiriam demonstrações mais claras com mais precisão. Mesmo assim, percebe-se que no segundo tomo o autor enfatiza que é com base nos estudos matemáticos da forma como está proposta no livro primeiro e segundo, e com o primeiro capítulo do terceiro livro, que se torna possível analisar e comprovar a utilidade desses conhecimentos para a arte da guerra.

Conforme já mencionei no final da terceira seção deste capítulo, o modelo didático estabelecido pelo autor, para a elaboração do livro, está caracterizado da seguinte maneira: ele enuncia conceitos, princípios e regras por meio das quais pretende ensinar os leitores e estudantes a medir superfícies planas, compreender suas relações entre medidas, tanto geométrica quanto aritmeticamente, de modo a poder explorar essas relações numérico-geométricas entre as medidas. Adota o mesmo método para as figuras sólidas e suas superfícies (faces das formas sólidas), que incluem também superfícies curvas (o caso da esfera), pois o autor argumenta que não pretende se limitar ao estudo de prismas, cilindros, pirâmides e cones.

Ele considera, portanto, que é relevante tratar toda essa Geometria de forma intercalada com a proposição de um número satisfatório de problemas que possam garantir uma relação entre a teoria e a prática de forma conectada, pois afirma serem escassos esses métodos de ensino. Justifica seus métodos a partir dos estudos realizados com a Geometria das seções cônicas de Apolônio e com a maioria dos matemáticos antigos. Esclarece que os geômetras aprofundaram extremamente os estudos sobre essas curvas (cônicas) e, por esse motivo, não quis deixar nada a desejar em seus escritos atualizados sobre o assunto.

Talvez seja com esse objetivo que procurou aprofundar mais as ideias da Álgebra no primeiro tomo, considerando que seria necessário um bom estudo sobre esse assunto para poder incrementar os estudos algébrico-geométrico das curvas posteriormente, considerando as dificuldades de se estabelecer conexões entre essas duas formas de explicação para as formas geométricas, de modo a explorar menos as construções geométricas com régua e compasso, mas sim interpretar essas construções com auxílio da linguagem algébrica como um novo modo de descrever genericamente operações aritméticas, denominadas por ele de aritméticas dos infinitos, por remeter à noção de termo desconhecido (incógnita).

Sobre as geometrias das cônicas, menciona que Desargues foi o primeiro a notar que as seções cônicas formadas pelas diferentes maneiras com que cortamos um cone, que é baseado em um círculo, deveria participar das propriedades dessas figuras. A esse respeito, menciona o livro de Desargues que trata do assunto relacionado às interseções de um cone com um plano, possibilitando a elaboração de um novo método geométrico para abordar as seções cônicas. Dessa forma, Abbé Deidier argumenta que o estudo abstrato das seções cônicas seria transformado em uma espécie de diversão agradável para dar a conhecer a admirável fertilidade que nasce da aplicação dos princípios e a sequência natural encontrado entre as diferentes partes da matemática, como foi o caso das conexões entre Aritmética e Álgebra, assim como entre Álgebra e Geometria.

A respeito da Aritmética dos infinitos, tratada na parte inicial do começo do terceiro livro, no segundo tomo, percebe-se que se trata de discussão sobre uma extensão do método dos indivisíveis de Cavalieri, e deu origem às discussões relativas ao *Cálculo Diferencial e Integral*. Trata-se de uma abordagem do assunto por meio de processos de medição de superfícies e exploração das relações entre Aritmética e Álgebra para explicitar relações geométricas concernentes à medição.

O autor trata da mecânica em geral como a ciência do movimento, que contém as regras para compreensão dos diferentes movimentos, para a estática ou para o equilíbrio de corpos sólidos, bem como a hidrostática ou o equilíbrio de corpos sólidos imersos em fluidos, aerometria ou conhecimento das diferentes mudanças que vêm ao ar, hidráulica ou as regras do movimento de fluidos, conforme já mencionei anteriormente na quinta seção deste capítulo.

Da Importância da Investigação do Livro

A partir da pesquisa realizada sobre as fontes bibliográficas presentes no acervo da comissão, compreendi o quanto a equipe estava atualizada em relação ao que vinha sendo produzido pelos cientistas da Europa nos séculos XVII e XVIII. Em minha leitura e reflexão sobre o assunto identifiquei, também, que os autores e os temas abordados nos livros estavam conectados entre si, com informações diretamente relacionadas com as pesquisas experimentais necessárias ao desenvolvimento da ciência e da técnica necessárias à sociedade do século XVIII.

Assim, compreendi porque o livro de Abbé Deidier foi selecionado como uma das obras que comporiam o acervo da comissão, possivelmente por transparecer aspectos didáticos de abordagem dos assuntos em função das exigências acadêmicas da época para a formação técnica desejada e, ainda, pela importância que o mesmo tinha para se fazer uma preparação matemática bem prática voltada aos profissionais e a outros trabalhadores locais que poderiam participar do trabalho a ser realizado na região, dentre as atividades que incluiriam construções arquitetônicas, mapeamentos, e outros estudos na região Amazônica, com vistas a verificar a confirmação ou não dos estudos já estabelecidos pela equipe de Charles-Marie de La Condamine em suas viagens à Amazônia Peruana.

Mesmo que neste capítulo não tenha sido possível descrever e comentar todas as informações sobre o livro de Deidier, é importante mencionar que seu trabalho pode ser considerado relevante para se retomar muitas discussões sobre as informações referentes à Matemática e à Física-matemática por ele abordada, tendo em vista sua importância para os estudos cartográficos e sobre astronomia na região amazônica no período em que foi utilizado pelos profissionais que lá estiveram. Minha ponderação leva em consideração que as informações produzidas pela expedição gerariam algumas publicações fundamentadas nas matemáticas tratadas por Deidier no livro comentado neste capítulo.

Quanto às contribuições da investigação do livro para o uso de suas informações no ensino de Matemática no século XXI, é possível apontar indicativos que, para sua concretização em sala de aula, certamente precisarão de um planejamento de ação para que seja incorporado às estratégias didáticas a serem materializadas na escola. Entretanto, com base nas informações identificadas e na caracterização estabelecida acerca dos modos como o livro foi elaborado e como os assuntos são tratados por Deidier, considero que o primeiro aspecto a ser pensado refere-se à tradução do material em parte ou na sua totalidade, uma vez que o livro contém importantes informações acerca de grandes temas matemáticos.

Assim sendo, compreendo que se trata de um material que possui um potencial de conteúdo que pode ser explorado pedagogicamente para o desenvolvimento de um ensino de matemática centrado na integração de saberes, a partir de princípios interdisciplinares, tanto para seu uso na Educação Básica, como para a formação inicial e continuada de professores de matemática. Neste sentido, encaminho a seguir algumas possibilidades de abordagens para que o livro seja utilizado nas aulas de Matemática como:

1. Abordagens para conceitos, propriedades e relações sobre o desenvolvimento de saberes aritméticos, de modo a possibilitar a elaboração de estratégias didáticas para o ensino desse assunto;
2. Abordagens para o desenvolvimento de conceitos, propriedades e relações sobre álgebra como extensão de conceitos, propriedades e relações aritméticas, tal como propõe o autor, no livro, seguindo de outra expansão conceitual para o ensino de geometria analítica;
3. Abordagens para o desenvolvimento de conceitos relativos a situações identificadas em construções geométricas e suas interpretações algébricas, como um processo de ensino com vistas a aprendizagem de geometria analítica pelos estudantes;

4. Abordagens para conceitos, propriedades e relações geométricas, trigonométricas e suas implicações no ensino de física sob um enfoque teórico e prático;
5. Abordagens para conceitos, propriedades e relações entre geometria plana e espacial;
6. Exploração de seu potencial para a elaboração de atividades didáticas para o ensino desses grandes temas matemáticos em uma perspectiva interdisciplinar;
7. Elaboração de Unidades Básicas de Problematização (UBP), conforme propõem Miguel e Mendes (2010) e Mendes (2014; 2015), no sentido de conectar temas correlatos que são tratados no livro, principalmente relacionados a temas de geometria, ou de física;
8. Desenvolvimento de investigações temáticas a partir do livro, de acordo com o que propõe Mendes (2015) ao sugerir que o professor encaminhe problematizações e experimentações a serem desenvolvidas pelos estudantes de licenciatura em Matemática;
9. Elaboração de atividades para o ensino de Matemática com base no uso de computadores, a partir dos conteúdos do livro;
10. Elaboração de blocos de atividades estruturadas com base em princípios investigativos, de acordo com temas específicos a serem abordados em cada ano escolar do ensino Fundamental e Médio, para serem desenvolvidas com estudantes da Educação Básica.

Bibliografia Consultada

BOMBASSARO, Luiz Carlos. **As fronteiras da epistemologia**. Como se produz conhecimento. Petrópolis, RJ: Vozes, 1992.

BURKE, Peter. **O que é história do conhecimento**. Tradução Claudia Freire. São Paulo: editora da UNESP, 2016.

BURKE, Peter. **Uma história social do conhecimento**: de Gutenberg a Diderot. Tradução Plínio Dentzien. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2003.

BURKE, Peter. **Uma história social do conhecimento II**: da Enciclopédia à Wikipédia. Tradução Denise Bottmann. Rio de Janeiro: editora Zahar, 2012.

DEIDIER, Abbé Élémens Généraux des principales parties des Mathematiques, necessaires a L'artillerie et Au génie. 1745.

FERMAT, Pierre de. **Osservazioni su Diofanto**. Tradução Mario Michetti. Torino: Bolatti Boringhieri, 2017.

FLECK, Ludwik. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico**. Tradução George Otte e Mariana Camilo de Oliveira. Belo Horizonte: Fabrefactum Editora, 2010 (1935).

GENETTE, Gérard. **Paratextos editoriais**. Tradução Álvaro Faleiros. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2009 (Série Arte do Livro, 7).

LAGRANGE, Joseph Louis. **Lições sobre matemáticas elementares**. Ministradas por Joseph Louis Lagrange na Escola Normal Francesa em 1795. Tradução Iran Abreu Mendes e Jefferson Ramos de Oliveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

MENDES, Iran Abreu. Práticas socioculturais históricas no ensino de Matemática. In: MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir (Org.). **Práticas Socioculturais e Educação Matemática**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014 (Col. Contextos da ciência), p. 117-139.

MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir (Org.). **Práticas Socioculturais e Educação Matemática**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014 (Col. Contextos da ciência).

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

MENDES, Iran Abreu. **Ciência, Arquitetura e Matemática na Amazônia do século XVIII a partir da demarcação das fronteiras da região**. Relatório de Pesquisa de Pós-doutorado. Rio Claro: UNESP, 2009.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education**, *42*, 381–392, 2010. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0255-8

SALLES, René. **5000 ans d'histoire du livre**. Paris: Editions Ouest-France, 1986.

SCHUBRING, Gert. **Análise histórica de livros de Matemática**. Notas de aula. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

5

TRÊS LIVROS-TEXTO HISTÓRICOS DE ÁLGEBRA: UMA COMPARAÇÃO DE WALLIS, EULER E DE MORGAN

John A. Fossa

No presente trabalho faremos uma investigação comparativa do conteúdo e dos recursos pedagógicos contidos em três livros-textos históricos de álgebra, escritos por Wallis, Euler e De Morgan. Também faremos algumas observações sobre a importância dessa investigação para a Educação Matemática. Antes de proceder, porém, para a referida investigação, será interessante fazer um pequeno esboço dos autores dos textos, situando-os dentro dos seus contextos históricos. Ao fazer isso agora, também faremos uma primeira descrição dos referidos textos, tanto historicamente, quanto bibliograficamente.

Os Protagonistas

Embora fosse Catedrático da Universidade de Oxford, onde detinha a Savilian Chair de Geometria, e considerado um dos maiores matemáticos ingleses da sua época, **John Wallis**

(1616-1703) só teve um primeiro contato com a matemática por volta de quinze anos, quando seu irmão lhe instruiu nos rudimentos da aritmética.[1] Não teve, no entanto, condições de continuar a estudar a matemática (então considerada uma matéria inferior) e, em consequência, optou para estudar as humanidades e a medicina na Universidade de Cambridge. Seu professor nessa instituição, Francis Glisson (1599-1677), apoiava as ideias revolucionárias de William Harvey (1578-1657) sobre a circulação do sangue e, assim, Wallis também acabou sendo um dos primeiros defensores da referida tese de Harvey. Ao final do curso de mestrado, em 1640, foi ordenado ministro da Igreja da Inglaterra.

Foi somente em 1647 que Wallis voltou sua atenção de novo para a matemática. Estava participando nas reuniões de vários cientistas eminentes que viriam a fundar a Sociedade Real e leu, na data indicada, a *Clavis mathematicae*[2] de William Oughtred (1574-1660). Dominou o referido livro em uma questão de semanas e logo passou a fazer suas próprias pesquisas matemáticas. Paralelamente, durante a guerra civil inglesa entre os partidários do Parlamento e os do rei (1642-1651), Wallis, que fazia cálculos mentais prodigiosos com uma habilidade extraordinária, serviu, como criptógrafo, à causa rebelde sob o comando de Oliver Cromwell (1599-1658), decodificando as mensagens secretas dos realistas. Através da influência do seu chefe guerreiro, obteve a já mencionada Savilian Chair em Oxford.

Entre os trabalhos científicos de Wallis, o mais notável é a *Arithmetica infinitorum* (1656), um tratado sobre o Cálculo. Nela, não somente obteve alguns resultados muito interessantes, mas também inventou algumas técnicas que seriam desenvolvidas mais tarde por, entre outros, Isaac Newton (1643-1727). Seu *Treatise of Algebra* foi publicado em 1685. Embora criticado por

1 Para mais dados sobre a biografia de Wallis ver O'Connor e Robertson (2002).

2 *A Chave da matemática*, publicado em 1631.

seu estilo pouco inspirado, o referido livro foi de suma importância para a matemática inglesa do século XVIII. Na época, ainda teve muita controvérsia[3] sobre a existência de números negativos e imaginários – e, de fato, sobre a conveniência da própria álgebra – e, nesse sentido, o *Tratado* de Wallis foi um grande passo para a aceitação desses números devido à desenvoltura e à clareza com que expôs o ponto de vista algébrica. Na verdade, segundo Helena M. Pycior (1997, p. 103), Wallis superou os algebristas predecessores (Oughtred e Harriot)

> … because of his stubborn commitment to arithmetic as the foundation of algebra and hence to "pure algebra" – his own term, which proclaimed an algebra that was independent of and perhaps superior to geometry.

É interessante observar que o *Tratado* pode ser visto como um desenvolvimento de forma mais clara e mais organizada dos trabalhos (inéditos) de Thomas Harriot (1560-1621). De fato, o próprio Wallis, nas observações históricas contidas no referido *Tratado*, sugere, talvez por um excesso de chauvinismo, que tudo de que o matemático francês René Descartes (1596-1650) sabia de álgebra foi retirado diretamente de Harriot.

Para o presente trabalho, consultei a edição original de 1685[4], que foi impresso por John Playford para o livreiro da Universidade de Oxford, Richard Davis.[5] Uma tradução do título inteiro do livro, na sua esplendida extensão (como foi praxe da época), é *Um Tratado de Álgebra, tanto histórico quanto prático, mostrando a origem, o progresso e o desenvolvimento do mesmo de tempos em tempos, e*

---

3 Para mais detalhes, ver, por exemplo, Anjos (2012).

4 Wallis nos informa, no prefácio, que a obra foi completada em 1676, mas houve delongas no processo de publicação.

5 Citações dessa obra terão a forma (W, p. *n*).

pelos quais passos ela tem alcançado sua atual altura[6]. É dividido em cem capítulos e um prefácio e ainda é encadernado com quatro tratados adicionais, os quais, porém, não serão objetos do nosso estudo.

Nosso segundo protagonista, o matemático suíço, **Leonhard Euler** (1707-1783), é conhecido como o matemático mais prolífico de todos os tempos, apesar de haver perdido a visão por grande parte da sua carreira.[7] Nasceu em Basileia e estudou na Universidade dessa cidade sob a orientação de Johann Bernoulli (1667-1748). Logo depois de concluir seus estudos, recebeu um convite de ingressar na recém-criada Academia de São Petersburgo, onde ficou de 1727 a 1741. A situação política russa, bem como alguns motivos pessoais, o levarou a aceitar o convite de Frederico, o Grande, (1712-1786) para fazer parte da Academia de Berlim. Eventualmente, porém, voltaria para a Academia de São Petersburgo à insistência de Catarina, a Grande (1729-1796). Permaneceria em São Petersburgo de 1766 ao seu falecimento em 1783.

Além de ser prolífico, Euler foi um grande inovador em várias áreas da matemática, especialmente na Teoria dos Números, no Cálculo das Variações, na Análise Infinitesimal e na aplicação de métodos matemáticas às ciências. Suas *Cartas a uma Princesa de Alemanha* são uma bem-conhecida exposição de assuntos matemáticos e físicos para leigos. Também escreveu uma introdução à aritmética e, é claro, a *Vollständige Anleitung zur Algebra* (*Instrução completa em álgebra*). Segundo o índice feito por Gustav Eneström (1852-1923), o manuscrito da referida obra foi completado antes de 1768, pois uma tradução russa foi publicada nesse ano. A versão original, em alemão, saiu em dois volumes, segundo Eneström, em 1770, mas o texto que usamos traz a data

6 Isto é, *Heighth*, ao pé de letra "altura". Aqui deve ser compreendido algo como "nível de desenvolvimento".

7 Para mais sobre o referido matemático suíço, ver Fossa (a aparecer).

de 1771. Uma tradução francesa, feita por Johann III Bernoulli (1744-1807, neto de Johann I Bernoulli (1667-1748), o professor de Euler), com "notas e suplementos", apareceu em 1771 com o título *Élémens d'algébre* (*Elementos de álgebra*). Tivemos acesso a uma edição datada "Terceiro Ano da Era Republicano", ou seja, 1795. A versão francesa foi traduzida para o inglês, pelo teólogo inglês John Hewlett (1762-1844), como *Elements of Algebra* em 1797. Para facilitar a comparação com as álgebras de Wallis e De Morgan, usamos a versão inglesa. Tivemos acesso à terceira edição,[8] publicada no ano de 1822 em Londres por Longman, Hurst, Rees e Orme[9]. Os dois volumes do original são incluídos num só volume, composto de uma primeira parte, subdivida em quatro seções de 23, 13, 13 e 16 capítulos, e uma segunda parte de 13 capítulos. Inclui também uma tradução das notas do tradutor francês (Bernoulli) e do suplemento de La Grange (**Joseph-Louis Lagrange**, 1736-1813, um dos mais importantes matemáticos franceses do seu tempo); ainda inclui uma pequena biografia de Euler escrita pelo político escocês Francis Horner (1778-1817).

É interessante observar que Horner foi aluno particular de Hewlett. Foi sob a direção do seu mestre que Horner, aos 17 anos, fez uma primeira tradução de grande parte do texto de Euler, sendo a mesma conferida e corrigida por Hewlett. Quando o que foi inicialmente concebido como um exercício estudantil virou um projeto de publicação, Hewlett teve de assumir o projeto de finalizar a tradução e editar o texto, assistido nesta tarefa pelo matemático inglês Peter Barlow (1776-1862), quem contribuiu também com algumas notas. Ao pedido de Hewlett, Horner produziu o já mencionado ensaio biográfico sobre Euler.

---

8 Citações dessa obra terão a forma (E, p. *n*).

9 A editora foi fundada como The Longman Company em 1724 por Thomas Longman (1699-1755). Mudou de nome várias vezes, sendo conhecida hoje como Longman ou Pearson Longman. É atualmente uma divisão de Pearson Education.

Nosso terceiro e último protagonista é **Augustus De Morgan** (1806-1871). Filho de um oficial do exército inglês, nasceu em Madura, na Índia, onde seu pai estava servindo.[10] Curiosamente, teve, como Euler, problemas com a visão, perdendo o uso do olho direito enquanto ainda criança. Mesmo assim, se distinguiu nos estudos com o algebrista George Peacock (1791-1858) na Universidade de Cambridge e foi escolhido, aos 21 anos, o primeiro professor de matemática na recém-fundada University College London. Apesar da sua grande habilidade, teve uma carreira conturbada devido à inflexibilidade com que mantinha seus princípios. Foi impedido, por exemplo, de obter um MA de Cambridge porque recusou a se submeter a um teste religioso da Igreja de Inglaterra, mesmo sendo membro da referida Igreja. Ainda se demitiu da sua cadeira na University College duas vezes, ambas devido a conflitos com seus princípios (a primeira vez foi em 1831, mas foi recontratado em 1836, e se demitiu de novo em 1866). Mas, houve sucessos também. De fato, foi, por exemplo, o primeiro presidente da Sociedade Matemática de Londres, sendo eleito ao posto em 1865.

Era interessado, junto com o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), na tentativa de desenvolver uma álgebra de três dimensões (isto é, com elementos da forma $a+bi+cj$) e manteve uma correspondência com Hamilton sobre isto, bem como outros assuntos científicos. Em 1849, deu uma interpretação geométrica aos números complexos numa obra intitulada *Trigonometry and Double Algebra* (*Trigonometria e álgebra dupla*). Foi um colaborador assíduo à Sociedade para a Difusão de Conhecimento Útil e escreveu sobre vários tópicos relacionados ao Cálculo. No entanto, a sua contribuição maior à matemática foi suas investigações sobre a lógica.[11] Seus *Elements of Algebra* (*Elementos de álgebra*) foram publicados em 1835. Para o presente

10 Para mais detalhes sobre a vida de De Morgan, ver O'Connor e Robertson (1996).

11 Para mais detalhes, ver Sousa (2012).

trabalho, utilizamos a segunda edição, publicada em 1837 por Taylor e Walton,[12] a editora da Universidade de Londres. A tradução do título por extenso dessa obra é *Elementos de álgebra, preliminares ao Cálculo Diferencial e aptos para classes avançadas de escolas em que são ensinados os princípios da Aritmética*. Contém um prefácio, uma introdução substancial e 13 capítulos, cada um dos quais é muito maior do que os capítulos nas obras correspondentes de Wallis e Euler.

Os Propósitos

Ao comparar os três livros que propusemos para a nossa análise, estaremos observando as diferentes escolhas e abordagens de cada autor. Isto só fará sentido, porém, se tivermos uma clara ideia dos propósitos deles. De certa forma, podemos afirmar que todos os três livros são livros-textos de álgebra. No entanto, livros-textos podem ter diferentes clientelas e/ou diferentes metas pedagógicas, bem como diferentes conceitos sobre a natureza e os métodos da álgebra. Assim, será importante tentar esclarecer, na medida do possível, essas questões em relação aos referidos textos.

O mais problemático dos três textos é o de Wallis. Segundo Stedall (2002, p. 17):

> Neglect of 'Accommodations', or applications, was one of the few restrictions Wallis maintained; in every other respect he followed wherever his subject led him, so that his text is a mixture of historical survey, mathematical demonstration, textual criticism, commentary and polemic. This has led to its readers interpreting it according to their own circumstances or prejudices: as a textbook on algebra, as a repository

12 Citações dessa obra terão a forma (DM, p. *n*).

> of interesting mathematics, or as history, good or bad.

Não obstante, tanto o título, quanto o prefácio, do referido texto indicam que o próprio Wallis considerou sua álgebra como um livro-texto. Assim, precisamos indagar porque ele escolheu organizar seu texto segundo a história do desenvolvimento da álgebra. Stedall (2001) e Stedall (2002)[13] detalham os motivos pessoais e as condições que ele teve para fazer pesquisa sobre a História da Matemática na Bodleian Library (Biblioteca Bodleiana da Universidade de Oxford). Mas, tais razões não fornecem uma resposta satisfatória à nossa pergunta. Devemos lembrar, porém, que a Inglaterra dos tempos de Wallis foi o palco de uma grande controvérsia sobre a validade e a conveniência da própria álgebra. Assim, ao apresentar a álgebra como a marcha história de resultados obtidos pelos maiores matemáticos do passado, ele conseguiria angariar prestígio para a álgebra como uma disciplina matemática válida. Mais ainda, seu retrato do desenvolvimento da álgebra no então passado recente e entre os seus contemporâneos como sendo largamente um empreendimento inglês certamente predisporia os seus leitores a aceita-la por razões de orgulho patriótico. Somando tudo isso às suas próprias predileções sobre a história e a oportunidade que lhe daria a polemizar contra seus inimigos, temos uma explicação plausível das suas escolhas.[14]

Visto que os primeiros capítulos da álgebra de Wallis rezam sobre assuntos aritméticos, podemos dizer que o propósito do texto é levar um aluno que haja somente conhecimentos rudimentares sobre a aritmética a uma compreensão dos métodos e

13 As duas referências também fazem uma apreciação esmiuçadora de Wallis como um historiador da matemática.

14 Seria, portanto, um erro caracterizar Wallis como precursor da tendência atual na Educação Matemática de usar a história como estratégia pedagógica, pois seus pressupostos parecem bastante distintos dos dos proponentes dessa tendência.

resultados da álgebra do seu tempo por apreciar o surgimento desses resultados no seu contexto histórico.

Quando voltarmos a nossa atenção para o texto de Euler, vemos que o prefácio à primeira edição (alemã), escrito pelos editores do livro, atribui ao Euler o propósito explicito de levar o aluno que tenha apenas poucos conhecimentos aritméticos à compreensão da álgebra contemporânea. Conta-se que Euler, que mal havia perdido sua visão, concebeu o projeto de esclarecer um jovem sobre a referida ciência. Tratou-se de um aprendiz de alfaiate cujo domínio da aritmética era considerado francamente ordinário. Como resultado da instrução do mestre, dominou completamente o assunto ao ponto de se tornar amanuense de Euler e redigir o próprio texto euleriano. Seja a história verdadeira, seja falsa,[15] é uma bela metáfora da grandeza do espírito humano.

Escrito quase 100 anos depois do texto de Wallis, o de Euler não mostra preocupação alguma com a validade da álgebra, e pouca inquietação sobre a utilidade e justificação dos números negativos. Assim, enquanto Euler ainda faz menção de certos fatos históricos, a história não faz o papel estrutural que havia feito no texto de Wallis.

No texto de De Morgan, a história é relegada a um lugar ainda menos importante. Embora escrito apenas uns 70 anos depois do texto de Euler, há nele duas mudanças em relação aos textos anteriores que o dá uma feição mais moderna. A primeira é que, como o título atesta, é direcionado aos alunos que querem se preparar para o estudo do Cálculo. Isto influencia a escolha dos tópicos abordados. Há, por exemplo, um capítulo dedicado a limites e

15 A história é repetida por vários autores, por exemplo, Fellmann (2007), o biógrafo de Euler, sem qualquer dúvida sobre sua veracidade. É provável, porém, que a fonte de todos esses autores seja o prefácio mencionado no texto. Podemos concluir que os dados básicos são verídicos, porém, não podemos avaliar se, ou até qual ponto, esses dados foram enfeitados.

uma maior ênfase na noção de função. A segunda mudança é que o livro supõe um conhecimento da aritmética e faz pouco esforço para suprir deficiências aritméticas.

De Morgan é ainda mais exigente em relação aos conhecimentos aritméticos do que pode parecer da descrição feita no parágrafo anterior. De fato, o pré-requisito proposto por ele é que o aluno tem dominado "os princípios da aritmética". Esse quer dizer que o aluno deve saber não somente como efetuar as operações com os números, mas também que deve entender as operações e suas propriedades expressas em termos literais, como $a+b = b+a$. Seus *Elements of Arithmetic* (*Elementos de Aritmética*), publicados originalmente em 1830, foram elaborados em exatamente essa maneira. Visto que era provavelmente a única aritmética inglesa com a referida abordagem, De Morgan fez uma introdução substancial para resumir esse material. Em efeito, a introdução é uma primeira apresentação ao simbolismo algébrico, onde, no entanto, as letras são vistas como representando números e todas as leis da aritmética devem ser respeitadas. Em especial, $b-a$ é considerado bem definido somente quando $b \geq a$. Quando, por exemplo, essa lei não é respeitada, problemas podem ser formulados que não têm soluções. Considere o seguinte exemplo: Achar x tal que

$$11 > 2x > \frac{1}{2}x > 3$$

$$\text{e} \qquad 11 - 2x = \frac{1}{2}x - 3.$$

Segundo De Morgan, a melhor maneira de entender a situação é reconhecer que as duas condições são incompatíveis. Mesmo assim, indica, enigmaticamente, que em contraste à aritmética, a álgebra nos proporcionará alguns resultados surpreendentes.

A Natureza da Álgebra

Segundo Wallis, a álgebra foi conhecida pelos gregos e por eles chamada **análise.** Concebe esta palavra como algo mais geral do que a distinção entre análise e síntese na geometria grega, opondo-a à **composição**. Esta é a produção de um todo a partir de partes distintas, enquanto aquela é a separação do todo nas suas partes. Exemplos elementares, na aritmética, de composição são as operações de adição e multiplicação, enquanto as operações de subtração e divisão são exemplos de análise. A própria álgebra é, para Wallis, a resolução de composições perplexas (*perplex*, isto é, composições nas quais as partes não são facilmente percebidas) através de métodos habilidosos (*artificial*, isto é, aqui, "produzido pela destreza ou arte"). Ainda lança mão a etimologia da palavra 'álgebra' que vem do árabe *Al-gjábr W'al-mokábala*, significando "restauração" (especialmente de um osso fraturado) e "oposição" ou "comparação". Disso, conclui[16] (W, p. 2):

> One main work of it (though not the only) is this: A quantity, as yet unknown, (which they commonly call a *Root*) is ſuppoſed (by ſuch Additions, Subductions, Multiplications, Diviſions, and other like Operations as is propoſed,) to be ſo changed as at length to become equal to a known Quantity, compared with it, or ſet over againſt: which comparing, is commonly called an *Equation*: And by reſolving ſuch Equation, the Root (so changed, transformed, or luxated) is (as it were) put in joynt again, and its true value made known: Which I take to be the true import of that *Arabic* name given to this Art.

16 A palavra *luxated*, na citação, indica uma articulação deslocada. Assim, a raiz, quando escondida na equação é como uma articulação deslocada que é colocada no lugar correto (*put in joynt again*) quando a equação é resolvida.

Dessa forma, é claro que Wallis identifica, basicamente, a álgebra com a resolução de equações.

É interessante observar que Wallis pensou que a álgebra existia na antiguidade, mas que o simbolismo algébrico (*Specious Arithmetik*) só teve início com François Viète (1540-1603). Isto é um corretivo para os que identificam a álgebra com o seu simbolismo.[17]

Em contraste ao Wallis, que dá uma definição clara, embora limitada (mas consoante com o desenvolvimento da álgebra da sua época), Euler faz algumas observações problemáticas. Começa por definir "magnitude" ou "quantidade" como qualquer coisa que pode aumentar ou diminuir. A matemática, para ele, é então a ciência da quantidade. Em particular, Euler continua (E, p. 2):

> a number is nothing but the proportion of one magnitude to another arbitrarily assumed as the unit.

Isto poderia gerar um problema filosófico, pois parece indicar que a entidade fundamental da matemática é uma entidade empírica. Prescindiremos de tais considerações aqui, pois Euler atenua a situação logo em seguida por alegar que a álgebra considera números em si, abstraindo dos tipos diferentes de quantidades. Finalmente, define a álgebra como o ramo mais abstrato da matemática (E, p. 2):

> Algebra, on the contrary, comprehends in general all the cases that can exist in the doctrine and calculation of numbers.

Abstraímos da questão da verdade ou falsidade dessa afirmação, para perguntar sobre o que poderia *significar*, especialmente

---

17 Para uma compreensão moderna dessa visão da álgebra, dentro do contexto da Educação Matemática, ver Sá e Fossa (2008) ou Sá e Fossa (2012).

para o leigo em álgebra. O aluno ao ler a referida definição simplesmente não poderia compreendê-la com qualquer nível significante de entendimento e ela certamente não o prepararia para o que vier no texto. No entanto, como veremos, o que vem é, basicamente, instrução no uso do simbolismo algébrico e na resolução de equações e, nesse sentido, a álgebra de Euler é parecida com a de Wallis. Essa conclusão é verificada mais adiante no texto, quando ele cita no parágrafo 563 (E. p, 186, itálico no original) a seguinte definição da álgebra:

> *The Science which teaches how to determine unknown quantities by means of those that are known.*

Segundo o próprio Euler (E, p. 186), a referida definição é completamente consoante com o conteúdo do seu texto.

É interessante observar que De Morgan ecoa a afirmação de Euler de que a álgebra raciocina sobre número de forma geral, mas reconhece logo em seguida que a definição proposta não diz muito para o principiante (DM, p. *iii-iv*):

> so in algebra we reason upon numbers in general, and draw conclusions which are equally true of all numbers. This, at least, is one great branch of algebra, and exhibits it in a view most proper for a beginner.
>
> But this is a definition in a few words, and can only be understood by those who have already studied the subject. No science can be defined in a few words to one who is ignorant of it.

Mesmo se tivesse razão sobre isto, porém, não seria muito difícil dar ao leitor uma ideia concreta do que seja a álgebra tratada no texto. De fato, vimos que Wallis fez isto com facilidade.

Os Capítulos Aritméticos: Wallis

Todos os três autores sobre discussão fazem uma revisão dos principais fatos da aritmética e aproveitam da discussão para fazer a apresentação do simbolismo algébrico, embora façam isso de formas diferentes. Wallis faz a referida discussão dentro do contexto de uma longa dissertação sobre a história da álgebra. A história recontada, porém, não visa, e certamente não favorece, a aprendizagem do material revisado, pois não aborda a história em termos cognitivos, mas, em vez disso, se concentra em interesses antiquários. Ainda mais os exemplos de operações mostrados, que são poucos, não são apropriados para iniciantes. De fato, há uma discussão extensiva do seguinte problema: dada a fração $\frac{2684769}{8376571}$, achar duas outras, a próxima maior e a próxima menor, cujos denominadores não ultrapassam 999. Para tanto, explica um método por ele mesmo desenvolvido, baseado nas inequações

$$\frac{n}{d} < \frac{3n}{2d} \text{ e } \frac{n}{d} > \frac{2n}{3d}.$$

Suas respostas são $\frac{25}{78}$ e $\frac{308}{961}$. O mais importante, porém, é observar como ele aborda as variáveis n e d. São apresentadas, implicitamente, como *placeholders*, ou seja, no sentido de "qualquer que seja n e qualquer que seja d".

Na sua discussão histórica, há, no entanto, certa atenção dada ao conceito de notação posicional, incluindo o sistema de numeração concebido por Arquimedes (287 a. C. - 212 a. C.) no seu tratado *Arenarius*[18] e o sistema sexagesimal dos babilônios. Isto é em preparação à sua discussão de frações decimais,

18 Wallis usa o título latino. Em grego é *Psammites* e, em português, é geralmente chamado *O Contador de Areia*.

em que aborda com certo cuidado a localização da vírgula (*decimal point*)[19] no resultado das operações de multiplicação e divisão. De fato, Wallis considera o desenvolvimento de frações decimais como uma das duas maiores contribuições "modernas" à álgebra. A outra é a invenção de logaritmos, os quais ele aborda através da comparação de progressões geométricas e aritméticas.

Ao chegar ao capítulo sobre Francis Vieta[20] (Capítulo XIV) e sua *Specious Arithmetick* (Aritmética Simbólica), Wallis de repente apresenta o seguinte sistema linear (W, p. 65):

$$1A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = 14$$

$$1B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C = 8$$

$$1C + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B = 8.$$

Resolve o sistema por eliminar primeiro a variável A e, depois, a variável B. Em seguida, faz alguns esclarecimentos sobre o simbolismo usado por William Oughtred.

Em Capítulos XVI e XVII, Wallis põe de lado as considerações históricas, que têm sido predominantes até esse ponto, para voltar a sua atenção à parte prática da álgebra, fazendo uma explanação cuidadosa do seu[21] simbolismo para essa ciência e das operações com os símbolos. Interessantemente[22], o primeiro dos

19 Observe que os ingleses usam um ponto para separar os inteiros das frações decimais, onde se usa, no Brasil, uma vírgula.

20 Isto é, François Viète (1540-1603).

21 Nesse ponto na história da matemática, o simbolismo algébrico, como o próprio relato de Wallis faz bem claro, não tem alcançado um padrão aceito por todos os autores. Wallis, em termos gerais, segue o sistema de Oughtred.

22 De fato, é muito interessante para o presente autor, pois ele argumentou, em Fossa (1992; ver também Fossa 2012), que haja necessidade para ensino explícito da sintaxe da álgebra.

referidos capítulos aborda a sintaxe do simbolismo, enquanto o segundo trata da sua semântica. Diz, com efeito, que uma letra prefixada por um numeral e um sinal (+ ou –) é uma fórmula bem formada. Quando não há sinal, + é pressuposto. Define a operação de adição como (W, p. 69, itálico no original):

> *Specious Addition,* [sic] *conjoins the Magnitudes propoſed preſerving the Signs.*

Assim, por exemplo, ao somar 3A com A, obtemos 3A+A, ou seja, 4A; ao somar 5A com –3A, obtemos 2A; e ao somar 3A com –5A, obtemos –2A. As outras operações são tratadas de forma semelhante, embora para multiplicação e divisão deve-se observar a seguinte regra (W, p. 70, itálico no original):

> *And if the ſigns* +, – *be Like, then the Product is* +; *if they be Unlike, it is* –.

O quadrado de A é dado como AA ou Aq (q para "Quadrate") e o cubo por AAA ou Ac (c para "Cube"). Potencias maiores são expressas por combinações de q e c; assim, AAAAA é Aqc. Expoentes numéricos são também mencionados.

A parte semântica da álgebra é, de forma geral, tomada da aritmética. Assim, como 3 vacas mais 2 vacas são 5 vacas, também 3A mais 2A são 5A. Da mesma forma, como não podemos somar 3 vacas com 2 ovelhas, 3A+2E não pode ser reduzido mais. Wallis ainda observa que podemos dizer que 3 vacas com 2 ovelhas são 5 feras. Desta forma, 3A+2E = 5B. Mas, isso só é verdadeiro se conhecemos (ou podemos supor) de antemão a proporcionalidade entre as letras envolvidas. Assim, se A = B e 2E = B, teremos que 3A+2E = 4B. Subtrair uma quantidade negativa é explicado como retirar um déficit, ou seja, suprir o que se faltava. Em consequência, visto que multiplicação é adição iterada, menos vezes menos é mais.

Continua da mesma forma a discutir, de um ponto de vista algébrico, frações, proporções, potências e raízes. Em relação a proporção, faz as seguintes considerações (W, p. 80, itálico no original):

> Hence follows what is commonly called *The Golden Rule*, or Rule of Proportion; (of four Proportionals, three being given to find a Fourth.) For if ; and therefore Ba =Ab; then is (dividing both by A,) .

Assim, resolve uma equação de grau um, em uma incógnita, sem qualquer comentário sobre o método de solução, implicitamente recorrendo ao bom senso e a analogia com a aritmética. Também dá-se o trabalho de mostrar como a abordagem algébrica simplifica a discussão de proporções e potenciação, enquanto, em relação a esta, afirma que a notação algébrica nos permite a superar a ideia geométrica de que uma expressão matemática pode ter, no máximo, três dimensões.

Os Capítulos Aritméticos: Euler

Euler inicia por explicar os sinais + e – como sinais representando operações, primeiro entre numerais e depois entre letras. Logo em seguida, porém, apresenta os inteiros, explanando-os em termos de crédito e débito. O caso problemático da regra dos sinais para a multiplicação é estabelecido através de um argumento lógico. O produto $-a\times-b$ só pode ser ab ou $-ab$. Mas, tem de ser diferente de $-a\times b$, que já é $-ab$. Logo, tem de ser ab.

Define ainda o conceito de números primos e ilustra como números compostos podem ser reduzidos a produtos de números primos. Para tanto, implicitamente trata apenas dos naturais e não aborda a questão da unicidade da referida redução. Apresenta alguns conceitos sobre a Teoria dos Números, usando, em especial, a representação $b = aq+r$ para abordar os números fracionários.[23] Apresenta ainda os irracionais e raízes de números negativos (os imaginários) e até logaritmos de números negativos. Com relação aos números imaginários, por exemplo, Euler afirma (E, p. 43):

> But notwithstanding this, these numbers present themselves to the mind; they exist in our imagination, and we still have a sufficient idea of them; since we know that by $\sqrt{-4}$ is meant a number which, multiplied by itself, produces -4; for this reason also, nothing prevents us from making use of these imaginary numbers, and employing them in calculation.

Como no caso da regra de sinais já discutida, de novo vemos aparecer aqui a atitude básica de Euler referente à matemática: a última justificação da matemática é a lógica e, uma vez que algo é justificado pela lógica, é matematicamente legítimo. Junto a isso, porém, se adjunta um bom quinhão de pragmatismo, pois Euler estava altamente comprometido com o projeto iluminista da matematização da ciência.

Há, no texto de Euler, certa preocupação com a apresentação da sintaxe, embora não da forma tão sistemática quanto a de Wallis; a semântica geralmente vem dos exemplos. De fato, durante a sua apresentação de todo esse material, ele começa com exemplos usando (ao contrário de Wallis) números pequenos, frequentemente organizados em tabelas, passa em seguida a representações simbólicas e finalmente chega ainda a outras

23 O texto original em alemão (impresso, por sinal, como a maioria dos textos alemães mais velhos, na fonte *Fraktur*) usa a palavra *gebrochen*, que é análogo à nossa palavra fração, que vem do verbo latino *frango*, *frangere*, *fregi*, *fractum*, "quebrar (em pedacinhos)". Escritores ingleses mais antigos às vezes usam o termo *broken numbers*.

generalizações[24]. Não se trata apenas de um princípio pedagógico, porém, pois seus textos referentes à pesquisa matemática são organizados da mesma forma.

Como Wallis, soluciona equações lineares simples de uma variável por analogia com procedimentos aritméticos, mas ao contrário do seu colega inglês, apresenta logaritmos como expoentes de uma base, sem mencionar progressões.

Observamos, finalmente, que o texto tem várias listas de exercícios (*Questions for Practice*). Vários dos exercícios são, na verdade, inapropriados no local em que estão inseridos, pois não combinam com o grau de sofisticação do leitor pressuposto pelo texto. Os exercícios, porém, não são da autoria de Euler e, aparentemente[25], originam com a primeira edição da edição inglesa.

Os Capítulos Aritméticos: De Morgan

Já indicamos que De Morgan aborda a aritmética em termos abstratos em um capítulo introdutório, que deve ser visto como um resumo da sua obra sobre a aritmética. Explica que uma letra denota (*i.*) um número qualquer, (*ii.*) uma incógnita ou (*iii.*) uma constante fixa (como, por exemplo, π).

Expressões e equações são apresentadas como generalizações de expressões e equações aritméticas. As operações aritméticas, usando letras em vez de números são explicadas e resultados, como, por exemplo, produtos notáveis, são registrados por equações, mas as equações não são manipuladas. Em particular,

---

24 Isto é, dada uma forma matemática, apresenta novas formas por extensão.

25 Os exercícios não aparecem no texto original em alemão. Também não aparecem na tradução francesa de 1798. Foram incluídos na primeira edição do texto inglês (que não vi), retirados da segunda edição e colocados de novo na terceira edição.

nenhuma equação é resolvida, como vimos acontecer nos capítulos aritméticos dos textos de Wallis e Euler.

De Morgan finaliza o seu capítulo introdutório por intimar que a álgebra é uma ciência distinta da aritmética, contendo novos objetos e novos métodos que nos permitirão esclarecer certos problemas, como os envolvendo números negativos, engendrados pela aritmética. Tais esclarecimentos, ele promete, aparecerão mais tarde no texto, na medida em que os princípios da álgebra são estabelecidos.

Simbolismo Algébrico e Equações: Wallis e Euler

Já vimos como De Morgan apresentou o simbolismo algébrico e sua aplicação a equações no capítulo introdutório ao seu trabalho. Embora tanto (especialmente) Wallis, quanto Euler, têm feito várias antecipações desses assuntos, cada um dedica uma parte dos seus respectivos livros à mencionada matéria.

No caso de Wallis, trata-se do Capítulo XXVI, em que apresenta o sistema de Oughtred através de um grande número de exemplos. De fato, ele se limita a transcrever os exemplos com pouca ou nenhuma explicação, confiando que o leitor entenderá tudo ao trabalhar os exemplos por si mesmo. Nisso, sua atitude é decididamente mais "histórica" do que "prática". Ilustramos com um dos seus exemplos mais claros (W, p. 72, itálico no original):

> *If a Line biſected be augmented, the Square of the Biſegment, together with a Rectangle of the whole augmented and of the Augment is equal to the Square of the Biſegment ſo augmented.*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \tfrac12 Z+O \\ & & & & \times\ \underline{\tfrac12 Z+O} \\ \tfrac12 Z & & Z+O & & \tfrac14 Zq+\tfrac12 ZO \\ \underline{\times\ \tfrac12 Z} & & \underline{\times O} & & \underline{\qquad\qquad \tfrac12 ZO+Oq} \\ \tfrac14 Zq & :+: & ZO+Oq & := & \tfrac14 Zq+ZO+Oq. \end{array}$$

“Zq” quer dizer “Z quadrado”. Observamos como Wallis não identifica as variáveis e assim dificulta a compreensão, especialmente para o iniciante.

Euler dedica muito mais espaço para o referido material. De fato, destina a isso duas seções (Seção II, de 13 capítulos, e Seção III, de mais 13 capítulos). Na primeira dessas seções trata das operações aritméticas com expressões algébricas (mas não de equações) e a simplificação dos resultados. É especialmente cuidadoso com a divisão, pois, ele explica, essa operação envolve maiores dificuldades, várias das quais são relacionadas com o fato que a divisão nem sempre é exata, resultando, assim, em um quociente e um resto. Na maior parte, a discussão procede baseada no senso comum e a analogia com a aritmética.

Ao aplicar a divisão de polinômios a aritmética, porém, Euler obtém resultados paradoxais referentes a séries infinitas. Assim, a partir do resultado

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a},$$

Euler afirma que podemos continuar a divisão até a infinidade, em qual caso o resto, ou seja o termo do erro, desaparece. Colocando, então, $a = 1$, obtemos

$$\frac{1}{0} = 1+1+1+1+1+\ldots$$

O resultado é perfeito, para Euler, pois $\frac{1}{0}$ considera como um número infinito. Seu raciocínio, no entanto, fica ainda mais opaco para o caso $a = 2$. Nesse caso, temos

$$-1 = 1+2+4+8+16+32+64+\ldots$$

Observa que se paramos a divisão em qualquer etapa finita e levamos em conta o termo de erro, sempre obtemos a inócua equação $-1 = -1$ e isso mostra, segundo Euler, que a série infinita também é exata. A confusão, como sabemos hoje, devia-se ao fato que não se apreciava, na época, as diferenças entre séries convergentes e divergentes.

A segunda das duas referidas seções, Seção III, trata de razão e proporção e é aqui que Euler aborda, de modo extensivo, equações lineares em uma variável. De fato, vemos que todos os autores mais antigas dão uma atenção especial ao assunto de razão e proporção. Isso é porque, antes do advento de funções como um conceito fundamental da matemática, costumava-se a elaborar equações precisamente nesse contexto. Acontece mesmo com Euler (ver, por exemplo, seu tratamento de um corpo caindo num campo gravitacional (E, p. 162)), embora ele fosse grande defensor do conceito de função.

Observe inicialmente que dois termos, a e b, em "razão aritmética" têm a diferença d e, portanto, $a = b+d$. Em consequência, se quaisquer dois desses valores são conhecidos, o terceiro pode ser calculado. Também observa que $a+c$ e $b+c$ terão a mesma diferença. As referidas consequências são justificadas por considerar a equação como tendo uma incógnita e resolvendo para o mesmo usando as propriedades da igualdade. Situações mais complexas são introduzidas, usando a relação fundamental de proporção aritmética, que a soma dos termos médios é igual à soma dos termos extremos, e a relação fundamental de proporção geométrica, que o produto dos termos médios é igual à produto dos termos extremos. Finalmente, considera progressões aritméticas e progressões geométricas, suas somas e o n-ésimo termo das mesmas, sempre manipulando algebricamente as relevantes equações.

As propriedades da igualdade são explicitadas retoricamente, baseadas no entendimento intuitivo da definição de igualdade e a analogia com a aritmética. Embora sua formulação retórica lembra as "Noções Comuns" de Euclides nos seus *Elementos*, o mesmo não parece ser um elemento pedagógico da sua apresentação, pois seu suposto leitor, representado pelo seu ex-alfaiate, não pode ser considerado um estudante, mesmo ocasional, de Euclides. Enquanto a discussão tende a fluir de forma bastante natural na maior parte da discussão sobre as referidas equações, há certos momentos em que variáveis são substituídas, não por números, mas por expressões algébricas complexas. Isso é feito sem qualquer explicação maior e, assim, poderá causar entraves para o iniciante.

A possibilidade de "questões absurdas", ou seja, problemas mal formulados, é reconhecida ligeiramente por Euler no contexto do cálculo do número de termos em uma progressão aritmética finita. No caso, o resultado precisa ser um número inteiro positivo. Assim, se fosse, por exemplo, uma fração, isso indicaria algo errado na formulação do problema.

Aproveitamos o presente contexto para abordar mais dois assuntos que não se limitam a ele. Ao abordá-los aqui, no entanto, dispensaremos de maiores comentários sobre esses assuntos em outros lugares do texto. O primeiro desses assuntos é a questão de erros. Os textos de Euler frequentemente apresentam pequenos erros de composição gráfica, especialmente em relação de fórmulas ou contas. Isto provavelmente se deve à falta de "provas" que poderiam ser corrigidas pelo próprio Euler.[26] Escolhemos três erros ao acaso e comparamos o texto inglês com vários outros textos. O resultado foi surpreendente. Em parágrafo 262 (E, p. 78), achamos a seguinte soma de expressões algébricas:

$$\begin{array}{c} 4a^2 - 3b + 2c \\ \underline{3a^2 + 2b - 12c} \\ 7a^2 - b + 10c \end{array}$$

A edição de São Petersburgo de 1771 simplesmente não contém a referida soma. O mesmo acontece no texto francês e na

26 O presente autor pode atestar da sua própria experiência que a correção de provas nem sempre garante a eliminação dos erros corrigidos!

reedição do texto original na *Opera omnia* de 1911. O mesmo acontece com outro exemplo dado no texto inglês. Concluímos que esses dois exemplos provavelmente fossem acrescentados no texto inglês.

O segundo erro que analisaremos se encontra no parágrafo 277 (E, p. 82), onde temos o seguinte exemplo de multiplicação:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + 2b^2 \\ \underline{a^2 - 2ab + 2b^2} \\ a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 \\ \qquad -2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^4 + b^4 \end{array}$$

O resultado correto, $a^4 + 4b^4$, é dado em todos os outros três textos verificados, no entanto o texto francês tem ab^4 por $4b^4$ na penúltima linha.

Finalmente, no parágrafo 393 (E, p. 129), encontra-se "12–7 = 2–4", enquanto todos os outros três textos têm a equação correto "12–7 = 9–4". Assim, nos casos investigados é Euler que teve razão, sendo os erros inseridos no texto inglês e, num só caso, no texto francês. Talvez uma investigação sistemática de todos os erros encontrados nos vários textos seria interessante, contudo, isso não é consoante com os propósitos do presente trabalho e, portanto, não será feita aqui.

O segundo assunto que queremos abordar no presente contexto é o tratamento de espécies de moeda usadas nos problemas. No parágrafo 419 (E, p. 136-137), por exemplo, Euler calcula o preço de um cavalo, dado que o referido preço é determinado por uma certa progressão aritmética. O preço é dado como 1648 *pence*, ou seja, 6*l*. 17*s*. 4*d*. O que chama a atenção é que se usa a moeda inglês aqui num texto escrito em alemão e publicado na

Rússia. Em qualquer caso, temos que *l.* é a abreviação de *libra*, originalmente uma medida de peso entre os romanos; *s.* é a abreviação de *shilling*, que provém de um termo antigo inglês/nórdico significando "divisão"; *d.* é a abreviação de *denarius*, uma subdivisão da libra romana. Embora usam a abreviação *d.* para o termo latino, é falado em tradução *penny* (basicamente "centavo") com as formas plurais equivalentes *pennies* ou *pense*. Houve, na época, 20 *shillings* em uma libra e 12 *pense* em um *shilling*. Assim, 1648 *pence* é, de fato, 6*l.* 17*s.* 4*d.*

Nos dois textos alemães, o preço do cavalo é dado como 1648 copeques (*Copeten*), ou seja, 16 rubros e 48 copeques. Vale mencionar que foi Pedro, o Grande, que havia feito, de então faz pouco tempo, uma reforma monetária padronizando o conteúdo de prata do rubro e de cobre do copeque e, o que é mais importante para nós, fazendo que um rubro contivesse 100 copeques.

No texto francês, o preço do cavalo é 1648 *sous*, ou 82 *livres* e 8 *sous*. O sistema monetário francês é parecido como o da Inglaterra – de fato, aquele era o modelo para este –, sendo que houve 12 *deniers* em um *sou* (ou *sol*) 20 *sous* em uma *livre*. Interessantemente, então, no texto francês o preço do cavalo é dado em que corresponde ao *shillings* no texto inglês. Isto levanta uma questão econômica interessante: o cavalo custava mais caro em São Petersburgo (em 1771), Lyon (em 1795) ou Londres (em 1822)? Deixamos a resposta aos cuidados do leitor. Observamos apenas que é o número 1648 que é central em todas as versões do problema, pois é ele que é a soma da dada progressão aritmética.

Outro problema, no parágrafo 439 (E, p. 145), calcula o preço de uma casa como sendo 23970 coroas (*crowns*). De novo, os dois textos alemães usam rubros, mas o texto francês usa *écus*. Uma coroa é equivalente a 5 libras, enquanto um *écu* valia, na referida época, 6 *livres*. Assim, nesse caso, os dois textos usam unidades correspondentes dos dois sistemas. De novo, deixaremos as questões econômicas sobre os valores relativos dos vários preços ao cargo do leitor, observando somente que, do ponto de vista matemático, o número 23970 foi determinado como sendo o décimo segundo número 365-gonal.

Talvez o aspecto mais importante de toda essa discussão não é tanto as engrenagens econômicas das equivalências (ou não equivalências) entre os vários sistemas monetários usados, mas os esforços dos tradutores a produzir textos significativos para os seus leitores.

Equações Lineares

Como já vimos, todos os três autores têm abordado equações lineares de maneira informal, mas tanto Euler, quanto De Morgan, também destinam determinadas seções das suas respectivas obras a uma discussão mais cuidadosa de, primeiro, equações lineares com uma variável e, segundo, sistemas de equações lineares com n variáveis e n equações. Começamos com a abordagem de Euler, a qual é nitidamente mais simples do que a de De Morgan.

Euler começa com alguns exemplos de situações problemas e como podem ser modeladas por uma equação linear. A equação é depois resolvida por fazer certas transformações (*transformations*, *Verwandlungen*), todas das quais dependam dos seguintes princípios (E, p. 188-189):

> That two equal quantities remain equal, whether we add to them, or subtract from them, equal quantities; whether we multiply them, or divide them, by the same number; whether we raise them both to the same power, or extract their roots of the same degree; or lastly, whether we take the logarithms of those quantities…

Em seguida, ele considera vários exemplos de equações lineares e as suas resoluções, sendo alguns numéricas como $x+9 = 16$, e outros contendo constantes literais, como $x+a = b$, em que as transformações utilizadas são claramente especificadas. Estritamente falando, precisaria formular as leis de associatividade, comutatividade e, especialmente, distribuição, mas ele simplesmente usa as mesmas sem comentário.

Finalmente, propõe e resolve 21 situações problemas, sempre tendo o cuidado de explicar claramente a identificação do desconhecido, a modelação por uma equação e a resolução algébrica da referida equação. Embora nenhum desses problemas são matematicamente inapropriados, alguns parecem requer uma certa maturidade de pensamento geral.

Ao abordar pares de equações lineares em duas variáveis, Euler procede, de início, de forma inteiramente literal. Afirma (E, p. 206) que a maneira mais natural a determinar a solução é resolver cada equação separadamente para uma das variáveis, igualar os resultados e resolver para a outra variável; o valor achado é então substituído em uma das equações originais para determinar o valor da variável que havia sido eliminada. Simbolicamente, temos

$$ax+by = c$$

$$fx+gy = h,$$

onde, a, b, c, f, g e h são conhecidos. Logo,

$$x = \frac{c-by}{a} \qquad (*)$$

$$x = \frac{h-gy}{f}$$

e, em consequência,

$$\frac{c-by}{a} = \frac{h-gy}{f}.$$

Esse resultado, no entanto, é uma equação linear em uma só variável e, portanto, pode ser resolvida usando os métodos já explanadas. Obtemos, assim,

$$y = \frac{ah - fc}{ag - bf}.$$

Ao substituir esse valor de y em, por exemplo, (*), obtemos

$$x = \frac{cg - bh}{ag - bf}.$$

O processo é então ilustrado com alguns exemplos numéricos e situações problemas. Entre esses, exemplifica o caso de três equações em três variáveis e alguns artifícios que podem simplificar os cálculos, sendo o principal a introdução de uma nova variável (quase sempre a soma de todos os desconhecidos).

Observamos que não aborda o gráfico das equações, nem no caso em que a solução de duas equações em duas variáveis é a interseção de retas no plano.

Ao voltar a nossa atenção para De Morgan, vemos que ele começa com as seguintes quatro "verdades evidentes" (*evident truths*): a quantidades iguais, podemos (*i.*) somar, (*ii.*) subtrair, (*iii.*) multiplicar por e (*iv.*) dividir por quantidades iguais e os resultados serão iguais. Como Euler, apenas pressupõe, sem explicitar, a associatividade, a comutatividade e a distribuição. Usa também uma notação perspicácia para registrar a aplicação de uma dessas regras à uma dada equação: prefixa ao resultado $(+)a$, por exemplo, para indicar que a foi somada aos dois lados da equação anterior. As outras operações são tratadas de modo análogo.

Como consequências das verdades evidentes, deduz duas regras práticas: (*i.*) eliminar frações por multiplicar pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores e (*ii.*) transpor qualquer termo para o outro lado da equação mediante uma mudança de sinal. Na discussão de exemplos, ele tem o cuidado de identificar e discutir alguns erros comuns feitos por principiantes, como $-(a+b) = -a+b$, em vez de $-(a+b) = -a-b$.

É no contexto da resolução de situações problemas que De Morgan aborda a questão de números negativos. Considere o seguinte problema: Em 1830, A tinha 50 anos de idade, enquanto B tinha 35. Assim, em qual ano será a idade de A duas vezes a de B? Seja $1830+x$ a data procurada. Na referida data, A terá $50+x$ e B terá $35+x$. Desta forma, pelas condições do problema, teremos

$$50+x = 2(35+x),$$

ou seja,

$$x = 50-70.$$

O resultado, 50–70, é, contudo, uma “subtração impossível” e, portanto, o problema não pode ser resolvido.

De Morgan então sugere que subtrações impossíveis são frequentemente indicações de que o problema foi formulado de maneira errada. Essa é uma venerável manobra da turma que negava os números negativos. No caso em aprecio, De Morgan sugere que a formulação correta do problema seria algo como o seguinte: Em 1830, A tinha 50 anos de idade, enquanto B tinha 35. Assim, em qual ano é a idade de A duas vezes a de B? Para resolver esse problema, devemos, sempre segundo De Morgan, considerar dois casos, sendo o primeiro que a data procurada seja depois de 1830 e o segundo que a referida data seja antes de 1830. No primeiro caso, a tentativa de resolução é a do parágrafo anterior, que resulta em uma subtração impossível. No segundo caso, o em que a situação procurada aconteceu antes de 1830, teremos que o ano procurado é $1830-x$. No referido ano, A tinha $50-x$ e B tinha $35-x$. Desta forma, pelas condições do problema, teremos

$$50-x = 2(35-x),$$

ou seja,

$$x = 70-50 = 20.$$

Substituindo esse valor nas expressões para as idades de A e B, descobrimos que, em 1810, A tinha 30 anos de idade, enquanto B tinha 15. Desta forma, o problema se resolve.

De Morgan é ciente do fato de que, ao limitar o domínio das variáveis (e constantes) aos reais non-negativos, é necessário proceder com a resolução do problema utilizando, em cada passo, não apenas as regras de álgebra, mas também as da análise lógica. Aqui, o caso da divisão é instrutivo. Se tivermos, por exemplo, a equação

$$ax = ay,$$

teremos uma regra simples para a sua resolução: ou $a = 0$, ou podemos dividir por a. Assim, a equação é satisfeita quando $a = 0$ e x e y são arbitrários e quando a é arbitrário (incluindo quando $a = 0$) e $x = y$. Analogamente, devemos procurar regras simples para a subtração que nos permitiriam proceder com a resolução da equação apenas algebricamente, deixando a interpretação da solução para o fim. Embora De Morgan não o explicite, seu raciocínio parece ser este: ao expandir o domínio para os reais, o formalismo algébrico simplificaria o procedimento. No problema considerado, por exemplo, teríamos $x = 50–70 = –20$. Assim, em $1830+x = 1830+(–20) = 1810$, A tinha $50+x = 50+(–20) = 30$ anos e B tinha $35+x = 35+(–20) = 15$. De Morgan dedica o segundo capítulo da sua álgebra a essa tarefa e, assim, começa a esclarecer a sua já mencionada observação enigmática (do seu capítulo introdutório) sobre resultados surpreendentes referentes ao contraste entre a aritmética e a álgebra.

Para tanto, De Morgan propõe escrever, por exemplo, o resultado de 3–7 como . Alerta-nos que ainda não sabemos o que esse símbolo representa e, especificamente, não devemos interpretá-lo (ainda) como –4, mas nos convida a raciocinar sobre o mesmo, utilizando, em contextos algébricos, as regras aritméticas.[27] Considere, então, a seguinte equação:

$$x+(p+a)-p+(q+b) = q \qquad (*)$$

onde a, b, p e q são números positivos. Podemos resolver (*) da seguinte forma:

$$x = p-(p+a)+q-(q+b) = \bar{a} + \bar{b},$$

onde as barras provêm do fato de que $p+a$ é claramente maior que p e $q+b$ é claramente maior que q, o que implica que se trata de subtrações impossíveis. Mas, na aritmética, é indiferente subtrair duas parcelas sequencialmente de um terceiro número ou somar as duas parcelas e subtrair o resultado do referido terceiro número (isto é, por exemplo, (8–3)–2 = 8–(3+2)). Podemos, portanto, resolver (*) desta maneira alternativa:

$$x = p+q-(p+q+a+b) = \overline{a + b},$$

onde, de novo, temos uma subtração impossível, visto que $p+q+a+b$ é menor que $p+q$. Agora, igualando os dois resultados, ambos os quais são iguais a x, obtemos[28]

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}\ .$$

Através de raciocínios análogos, De Morgan chega a outros resultados, como

27 Sua atitude é semelhante à do seu amigo George Peacock (1791-1858) na sua axiomatização da álgebra, *Treatise on Algebra* (1830), um dos princípios do qual é o chamado "princípio da permanência de formas equivalentes".

28 Observamos que estes resultados são estruturalmente parecidos com as "Leis de De Morgan" na lógica.

$$\bar{\bar{a}} = a,$$

$$\bar{a}\bar{b} = ab$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{b}.$$

A partir desses resultados, propõe uma extensão do significado de certos símbolos matemáticos, visto que isso será conveniente, na mesma maneira em que os biólogos, por exemplo, acham conveniente chamar gatos domésticos, leões, tigres, *etc.*, todos "gatos". Assim, enquanto na aritmética uma quantidade é sempre não-negativa, em álgebra uma quantidade, isto é, uma quantidade algébrica, é ou positiva ou negativa. Agora, ao identificar as quantidades negativas com as quantidades barradas ($-a = \bar{a}$), as leis dos sinais são explicadas. Dessa forma, De Morgan tem separado, efetivamente, os dois usos ambíguos, o de símbolo de operação e o de símbolo de quantidade, do sinal –. O propósito é a explicação claro dos números relativos e as operações com esses números. Observamos, porém, que é duvidoso se o propósito fosse alcançado devido ao fato de a explicação ser comprida e abstrusa para o iniciante.

Para completar a sua explicação, De Morgan (DM, p. 64) propõe o seguinte problema emaranhado:

> A has £60, and is to receive the absolute balance that appears in B's books, whether for or against B; but C, who has £200, is to take B's property and pay his debts. After doing this it is found that C's property is 3 times that of A. What is the absolute balance for or against B?

O primeiro problema, por assim dizer, com o problema é que as duas cláusulas parecem incompatíveis. Suponha, por exemplo, que B tem um crédito de £3. Pela primeira cláusula A recebe esses £3 e não há qualquer restante para dar para C e, portanto, a segunda cláusula não pode ser satisfeita. Para evitar essa confusão, mesmo que isto fera as implicações conversacionais[29] do problema, suporemos que A receberá de uma outra fonte uma quantidade equivalente ao que nós chamaríamos o valor absoluto do referido balanço. A suposição nos permite a seguir a resolução feita por De Morgan.

Seja, então, x o mencionado balanço, sendo que + indica crédito e – débito. No fim da transição A terá $60 \pm x$. Observa que isso é correto segundo a nossa interpretação, pois A terá $60+|x|$, o que é $60+x$ para $x \geq 0$ e $60-x$ para $x < 0$. Também, C terá $200+x$. Pela condição do problema, teremos a equação

$$3(60 \pm x) = 200+x,$$

ou seja,

$$\pm 3x = 20+x.$$

Aqui, porém, De Morgan faz algo estranho, pois quadra os dois lados para obter a equação quadrática

$$xx-5x-50 = 0.$$

Mas, visto que ainda não tem abordado equações quadráticas, não pode mostrar a resolução e é forçado a apenas afirmar, misteriosamente, a solução (10 e –5). Um procedimento mais simples e mais claro seria resolver as duas equações lineares $3x = 20+x$ e $-3x = 20+x$. A primeira resulta em um crédito de £10 e a segunda um débito de £5.

29 Essas não são implicações formais do que é falado, mas proposições que tacitamente aceitamos para facilitar a conversa. Ver, por exemplo, Grice (1975). Podemos observar que muitas piadas (bem como muitas mentiras) alcançam seus efeitos devido à manipulação consciente de uma ou outra implicação conversacional por um dos interlocutores.

Ao tratar de equações lineares simultâneas, De Morgan mostra primeiramente, por um exemplo, que a equação linear com duas variáveis é indeterminada (tem um número infinita de soluções). Isso contraste com a abordagem de Euler, pois o matemático suíço deixa a consideração de equações indeterminadas para a última seção do seu livro. Em seguida, De Morgan mostra que se houver uma segunda equação nas mesmas variáveis, a solução será única. Explica três métodos que podem ser utilizados para a resolução desse tipo de equações:

1. Obter, de uma das equações, uma expressão para uma das variáveis em termos da outra e substituir o valor achado na outra equação.
2. Multiplicar as equações por valores de tal modo que um dos termos contendo uma variável na primeira equação é igual, ou igual ao simétrico, do termo contendo a mesma variável na segunda equação e, então, subtrair, ou somar, as duas equações resultantes.
3. Resolver as duas equações para a mesma variável e igualar os resultados.

Todos os três métodos, é claro, reduz o problema ao caso anteriormente tratado da equação linear com uma só variável. O terceiro método é o que é prezado por Euler, mas, nos exemplos, De Morgan parece dar preferência ao segundo. Não exemplifica com situações problemas, mas faz algumas aplicações à geometria, nas quais insiste a utilizar, desnecessariamente, seus números barrados ao raciocinar com números negativos.

Ao finalizar sua discussão do caso de duas equações do referido tipo, mostra que a solução será determinada somente no caso em que as duas equações são "independentes", ou seja, que são, de fato, duas equações diferentes e não apenas uma só equação escrita em duas formas diferentes. Também dá exemplos de equações inconsistentes, as para as quais não há solução simultânea alguma.

Considera extensões para o caso de n equações em n variáveis apenas por um exemplo numérico em que $n = 3$. Na exemplificação usa o segundo método e, em efeito, mostra que a estratégia é reduzir o caso de n para o caso de $n-1$.

Equações Quadráticas

Wallis começa a sua discussão das equações quadráticas por observar que, se tivermos simplesmente a potência da incógnita igual a um número, a solução será a raiz do número. Explica ainda que equações contendo outras potências, isto é, para a quadrática, termos na própria incógnita, são chamadas "equações afetadas" (*Affected Equations*) e essas são mais difíceis de resolver. Seguindo Oughtred, divide as quadráticas em três espécies (*Species*) e faz a resolução de acordo com princípios geométricos (embora nenhum desenho geométrico é apresentado). Ainda mostra como algumas equações de graus superiores podem ser reduzidas à quadráticas através de uma mudança de variável.

Ao voltar a sua atenção para Harriot, Wallis observa várias das suas contribuições. Em vez de usar A, Aq, Ac, *etc.*, por exemplo, Harriot usa *a*, *aa*, *aaa*, *etc.* Talvez mais importante, Harriot abandona a analogia com a geometria na interpretação de multiplicação. Aq, por exemplo, é interpretado como um plano, mas Aq×Aq é um "monstro", visto que o espaço só tem três dimensões. Para Harriot, em contraste, *aaaa* é simplesmente um número multiplicado por si mesmo várias vezes, em que, segundo Wallis (W, p. 127), "there is nothing of impoſſibility or of Difficulty to apprehend". Também observa que Harriot aceita números negativos como verdadeiros números e, como já mencionamos, alega que toda a álgebra de Descartes é oriunda da de Harriot.

Em relação às equações quadráticas, Harriot distingue entre as que tem solução, isto é, as que tem dois raízes reais, e as que são impossíveis, isto é, as contendo raízes imaginárias. Quando a equação tem dois raízes reais, é o resultado da multiplicação de dois fatores lineares e há três casos a considerar, dependendo dos sinais das raízes: ambos positivos, um positivo e um negativo, ou ambos negativos. Os três tipos de equação tomam formas diferentes com respeito a z e x, respectivamente a soma e diferença das raízes. Conhecendo uma dessas variáveis e o tipo da equação, o valor da outra pode ser calculado e isto permite o cálculo das próprias raízes.

Exemplificaremos com o primeiro caso, o em que b e c são raízes positivos. Assim, os fatores são $a-b = 0$ e $a-c = 0$ e, portanto, a equação toma a forma

$$aa-za+bc = 0.$$

Para determinar x, resolvemos

$$\frac{1}{4}zz - \frac{1}{4}xx = bc.$$

Considere, por exemplo,

$$aa-5a+6 = 0,$$

onde, então, $z = 5$. Fazemos

$$\frac{25}{4} - \frac{xx}{4} = 6,$$

ou seja, $x = 1$ e, portanto,

$$z = b+c = 5$$
$$\text{e } x = b-c = 1.$$

Ao resolver as equações lineares em b e c, descobrimos que $b = 3$ e $c = 2$.

Os outros dois tipos são tratados de forma semelhante.

Euler usa uma terminologia um pouco diferente. Para a potência de uma incógnita igual a um número ele usa o termo "equação pura" (*pure*, *reinen*), enquanto os termos "completas" (*complete*, *vollständige*) ou "mistas" (*mixt*, *vermischen*) são usados para equações contendo todos os termos. No caso das equações quadráticas, somente as mistas apresentam um pouco de dificuldade, pois as puras são resolvidas por achar a raiz do número (dividido pelo coeficiente do termo quadrático) e as que faltam o termo numérico são reduzidas a equações lineares. Afirma ainda que todos os tipos de equações quadráticas têm exatamente duas soluções, embora possam ser iguais.

No caso das equações mistas, Euler dá dois métodos de resolução. O primeiro procede por "completar o quadrado". A equação é colocada na forma

$$x^2 + px = q$$

onde p, q são números conhecidos. Procuramos um quadrado perfeito de um binômio no lado esquerdo da equação. Mas, visto que o quadrado de um binômio, digamos $x+n$, é um trinômio, $x^2 + 2nx + n^2$, somamos à equação o que falta para fazer o primeiro membro um quadrado perfeito, donde obtemos:

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q.$$

Assim, o primeiro membro é $(x + \frac{1}{2}p)^2$. Ao achar a raiz e resolver para x, obtemos a formula geral usada hoje em dia (embora a, o coeficiente do termo quadrático, é a unidade e, portanto, não expressa na fórmula).

Mas, Euler ainda faz uma simplificação, especialmente do ponto de vista de calcular as raízes. Para tanto, coloca a equação na forma

$$x^2 = -px + q. \qquad (*)$$

Então, a solução se reduz a

$$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 + q}.$$

Para mostrar a simplicidade da solução, consideremos um exemplo dado pelo próprio Euler: $x^2 = 6x + 7$. Aplicando a regra, $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$. Assim, as duas soluções são $x = 7$ e $x = -1$. Obviamente, essa solução é equivalente à fórmula usada hoje em dia, mas a simplicidade no cálculo das raízes provém da forma (*) em que a equação quadrática é disposta.

O segundo método que Euler usa para resolver equações quadráticas é reduzi-las a equações quadráticas puras por uma mudança de variável. Assim, primeira coloca a equação na forma (*) e faz a substituição $x = y + \frac{1}{2}p$. O resultado se reduz a equação pura $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$. Desta forma, acha-se y por extrair a raiz, donde x é achado imediatamente. O resultado final é a mesma fórmula obtida pelo primeiro método.

Uma aplicação interessante da resolução de equações quadráticas é a de achar o lado de qualquer dado número poligonal, visto que esses números são dados por expressões quadráticas. Seja, por exemplo, a um número triangular. Então, temos $\frac{x^2 + x}{2} = a$, ou seja, $x^2 = -x + 2a$. Pela regra, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2a}$ (a raiz negativa não é aplicável nesse caso), o que é equivalente a $x = \frac{-1 + \sqrt{8a+1}}{2}$. Visto que um número triangular é sempre um inteiro (positivo), para a ser triangular $8a+1$ tem de ser um quadrado perfeito. Os outros números poligonais são tratados de forma semelhante.

Euler ainda observa que, visto que toda equação quadrática tem exatamente dois raízes, ela pode ser escrita como o produto de fatores lineares, $(x-p)(x-q) = 0$. Ao desenvolver essa expressão, descobrimos que o coeficiente do termo linear é $-(p+q)$, o simétrico da soma das raízes, enquanto o termo numérico é pq, o produto das raízes. Finalmente, Euler observa rapidamente que é possível que as raízes sejam imaginárias, o que acontece sempre que $x^2 = ax - b$ e $b > \frac{1}{4}a^2$, ou, de maneira equivalente, $4b > a^2$.

Antes de proceder para a equação do segundo grau, De Morgan faz um capítulo preparativo, em que apresenta cuidadosamente a potenciação e as regras de manipulação algébrica dessas entidades. Aborda até expoentes negativas e fracionárias, mas indica que os surdos não existem e que os imaginários são números impossíveis, embora ambos podem ser manipulados algebricamente para alcançar resultados significativos. Os surdos são tratados por aproximação. Assim, embora $\sqrt{10}$, por exemplo, não exista, sempre podemos achar números cujos quadrados se aproximam tanto quanto queremos ao 10. Os imaginários são tratados como os negativos: sempre que aparecem indicam que há um erro na formulação do problema.

A sua resolução da equação quadrática é basicamente a de completar o quadrado, no entanto, a sua apresentação é complicada por uma preocupação excessiva com o rigor e pelos seus escrúpulos referentes aos negativos e imaginários. Para analisar uma equação quadrática, segundo De Morgan, há duas tarefas básicas. É necessário determinar (*i.*) as raízes da equação e (*ii.*) os argumentos para os quais a equação tem valores positivos e negativos.

De Morgan inicia a solução por demonstrar que duas equações quadráticas são identicamente iguais se, e somente se, seus coeficientes correspondentes são iguais. Em seguida, mostrar como transformar uma expressão quadrática em outra que seja um quadrado perfeito. Mas, para resolver a equação, é necessário, segundo De Morgan, distinguir três casos (usando a notação padrão):

1. $b^2 > 4ac$

Então, existe algum e^2, tal que $b^2 = 4ac + e^2$. Assim, teremos

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4}(2ax + b + e)(2ax + b - e).$$

2. $b^2 = 4ac$.

Então, a expressão quadrática é um quadrado perfeito e teremos

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax + b)^2}{4a}$$

3. $b^2 < 4ac$.

Então, $b^2 = 4ac - e^2$ e teremos

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax + b)^2 + e^2}{4a}$$

Para o primeiro caso, De Morgan faz uma análise sistemática dos valores positivos e negativos da equação em termos dos sinais dos coeficientes. No segundo caso, a equação tem duas raízes iguais e seus valores são sempre não negativos. No terceiro caso, não há raiz porque o membro do lado direito da equação é maior do que zero para todo valor de x. Os valores da equação, portanto, são sempre positivos e, ele afirma, é sempre interessante determinar o menor valor da equação. Observamos que a conclusão referente aos valores da equação nos segundo e terceiro casos supõe que a seja positivo. Finalmente, De Morgan admite que é possível calcular, no terceiro caso, raízes puramente simbólicas. Assim, chega à conclusão de que as raízes são dadas, em todos os casos, pela expressão $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Observa rapidamente que certas equações do quarto grau podem ser reduzidas a equações quadráticas por uma mudança de variável.

Equações Cúbicas

Wallis inicia a sua discussão de equações cúbicas por enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra e o atribuir a Harriot, indicando que Descartes havia o roubado de Harriot.[30] O referido teorema implica que qualquer equação de grau n é composta de n equações lineares determinadas pelas raízes da equação original. Observa que, se pudermos determinar uma raiz, divisão da equação original pela equação linear correspondente à dada raiz resultaria numa equação de grau n–1. Em seguida, faz uma análise das formas das equações em termos das raízes, mostrando, dessa forma, a composição dos coeficientes em termos das raízes. Com efeito, para uma equação de grau n, o coeficiente do segundo termo (o de grau n–1), será menos a soma das raízes, o do terceiro termo será a soma de todos os produtos dois a dois das raízes, e assim por diante. Ainda analisa, para equações cúbicas e biquadráticas, como certas relações entre as raízes resultam em equações em que uma ou outra dos termos desaparece. Finalmente, considera o número de raízes positivas e negativas, tendo cuidado com a possibilidade de raízes imaginárias, e como a equação é modificada por multiplicar uma raiz por um número (para eliminar surdos) ou por somar um número a uma raiz (para eliminar o segundo termo da equação).

Depois desses preliminares, Wallis volta a sua atenção para a resolução de equações. Em primeiro lugar, considera mais uma vez a equação quadrática que resolve agora, seguindo Harriot, por eliminar o segundo termo. Aborda quatro casos. O primeiro é

30 A obra de Harriot ficou inédita por muito tempo e tudo indica que Descartes não a conheceu. A primeira demonstração mais rigorosa do teorema, embora não completamente rigorosa pelos padrões modernos, foi dada por Gauss em 1799. Em 1816, Gauss deu uma nova demonstração, considerada rigorosa.

$$aa-2ba = cc,$$

onde a incógnita é a. Pondo $a = e+b$, a equação se reduz a $ee = bb+cc$ e, portanto, substituindo por e,

$$a = b \pm \sqrt{bb + cc}\,.$$

.Nesse caso, uma das raízes será positiva e a outra negativa. Os outros três casos são variantes deste, dependendo dos sinais do segundo termo e o termo independente. Nos dois casos em que o termo independente é negativo, observa Wallis, as raízes podem ser imaginárias.

A mesma técnica é agora aplicada à resolução da equação cúbica. Considera apenas o caso em que o segundo termo está ausente e procede por eliminar o terceiro termo. Assim, seja[31]

$$a^3 + 3b^2a = 2c^3$$

uma equação cúbica na incógnita a. Então, põe[32]

$$a = \frac{e^2 - b^2}{e}$$

A substituição resulta em $e^6 - 2c^3e^3 = b^6$. Isto pode ser resolvido como um quadrática em e^3 e, portanto,

$$e = \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{b^6 + c^6}}\,..$$

Recordando que $a = e - \frac{b^2}{e}$, Wallis, sempre seguindo Harriot, observa que, visto que e^3, b^3, $\frac{b^6}{e^3}$ são em proporção continuada, o

31 Wallis não usa expoentes e utiliza $\sqrt{C.\ x}$ para a raiz cúbica de x. Para simplificar a exposição, usaremos a notação moderna.

32 Observamos que há alguns erros de impressão na discussão desse caso, incluindo a afirmação de que a substituição fosse $a = \frac{e^2 + b^2}{e}$. O texto subsequente, porém, mostra que isso não foi a intenção de Wallis.

mesmo acontece com e, b, $\frac{b^2}{e}$, o que, depois de algumas manipulações algébricas, resulta na solução

$$a = \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{b^6 + c^6}} - \sqrt[3]{-c^3 + \sqrt{b^6 + c^6}},$$

que ele identifica como sendo uma formula de Cardano. Para finalizar o presente caso, lista vários exemplos, incluindo o seguinte: $a3 + 9a = 26$, cuja solução é dada como sendo $a = \sqrt[3]{13 + \sqrt{196}} - \sqrt[3]{-13 + \sqrt{196}} = 2$. Para ver isto, basta colocar a equação na forma geral tratado no presente caso: $a^3 + 3(\sqrt{3})^2\, a = 2(\sqrt{13})^3$. As outras duas raízes são achadas por reduzir a equação cúbica a uma quadrática, dividindo-a pela equação linear correspondendo à raiz achada.

Wallis ainda mostra outro método para a resolução de equações cúbicas. Afirma que é da sua própria invenção, feita em 1647 ou 1648, portanto, quando ele teve 31 ou 32 anos e estava no início do seu estudo de álgebra. O método procede por considerar a soma (ou diferença) e o produto das raízes, elaborar uma equação de grau seis e resolver a mesma como uma quadrática.

Euler aborda a equação cúbica em três momentos: resolução da cúbica pura, resolução por fatoração e resolução pela fórmula de Cardano.

Uma equação cúbica pura é uma da forma $x^3 = a$. A solução é achada por achar a raiz de cada lado. Havendo $x^3 = 8$, por exemplo, $x = 2$. Mas, uma equação cúbica deve ter três raízes. Para achar as outras duas, divide $x^3 - 8$ por $x - 2$, obtendo $x^2 + 2x + 4$. Esse quociente é posto igual a zero e a equação quadrática resultante é resolvida pelos métodos já conhecidos, dando as raízes imaginárias $-1 \pm \sqrt{-3}$. Generalizando, Euler põe a por 8 no exemplo dado e calcula as raízes como sendo

1. $\sqrt[3]{a}$

2. $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{a}$

3. $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{a}$

Para fatorar uma equação cúbica completa[33] (uma em que nenhum termo está ausente), Euler observa que o termo independente será o produto das três raízes. Dado, por exemplo, $x^3 - x - 6 = 0$, qualquer raiz "racional" terá de ser um divisor de 6, sendo estes 1, 2, 3 e 6. Desses valores, somente 2 anula a equação e, consequentemente, 2 é raiz. Em seguida, a equação é reduzida a uma quadrática para achar as outras duas raízes, $-1 \pm \sqrt{-2}$ Para usar o método, o coeficiente do termo cúbico deve ser 1 e as partes numéricas dos outros termos devem ser inteiros. Quando isto não acontecer, a equação poderá, em muitos casos, ser transformada na forma apropriada. Assim, dado $x^3 - 3x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$, pomos $x = \frac{y}{2}$, o que resulta em $\frac{y^3}{2} - \frac{3y^2}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$. Ao multiplicar a equação por 8, obtemos $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$. Essa equação é facilmente fatorada em $(y-1)(y-2)(y-3) = 0$ e, portanto, tem raízes 1, 2, 3. Logo, visto que $x = \frac{y}{2}$, as raízes da equação original são $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$.

Finalmente, Euler apresenta a fórmula de Cardano de maneira essencialmente igual à maneira "inventada" por Wallis, embora de forma muito mais lúcida. Suponha, diz Euler, que a raiz é um binômio $x = a+b$. Então, $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, o que pode ser colocada na forma $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b) = x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$. Ora, pondo e $a^3 = p$ e $b^3 = q$, a equação toma a forma mais perspícua

33 Como o exemplo mostra, o método funciona também no caso em que há termos ausentes.

$$x^3 = 3\sqrt{pq}x + p + q. \qquad (*)$$

Por construção, então, qualquer equação tendo a forma (*) terá como raiz $x = a + b = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Recomeçando, seja dada a equação $x^3 = fx + g$. Se a mesma puder ser posta na forma (*), uma das suas raízes será evidente pelas considerações do parágrafo anterior. Isto pode ser feito por resolver as seguintes equações nas incógnitas p, q:

$$3\sqrt[3]{pq} = f$$

$$p + q = g$$

onde, é claro, f e g são dados. Com algumas poucas manipulações algébricas, chegamos a regra de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}}.$$

Ambos Wallis e Euler fazem uma pequena discussão sobre como a referida fórmula de Cardano poderá desembocar em raízes que parecem ser imaginárias, mas que podem ser simplificadas a raízes reais.

Euler ainda observa que, dada uma equação cúbica completa, $x^3 + ax2 + bx + \mathrm{c} = 0$, o termo quadrático pode ser eliminado pela substituição $y = x + \frac{1}{3}a$. Ao fazer isso, a equação pode ser colocada na forma (*).

De Morgan não aborda equações cúbicas.

Equações Biquadráticas

Além das observações já feitas sobre a equação biquadrática, ambos Wallis e Euler dedicam à mesma mais algumas investigações. Como sempre, a investigação de Euler é mais clara e mais sistemática do que a de Wallis. Este inicia por mostrar como o segundo termo (o termo cúbico) pode ser eliminado através de uma troca de variável. Finalmente, mostra como a equação biquadrática pode ser decomposta em duas equações quadráticas. Segundo Wallis é o único procedimento algébrico explicado por Descartes que não foi explanado antes por Harriot. Não obstante, observa que o referido procedimento já tem sido usado tanto por Bombelli[34], quanto por Viète.

A discussão de Euler segue a mesma estrutura que ele havia usada para discutir a equação cúbica. Assim, começa com a biquadrática pura, tal como $x^4 = 2401$. Extraindo a quarta raiz diretamente, obtém-se apenas uma raiz, $x = 7$. Desta forma, Euler sugere extrair primeiro a raiz quadrática, tendo o cuidado de achar os dois valores, positivo e negativo. Assim, temos $x^2 = \pm 49$. A operação é repetida com os dois valores resultando nas quatro raízes ± 7 e $\pm 7\sqrt{-1}$.

Como para a equação cúbica, as raízes racionais podem ser achadas por fatoração. Quando a equação é posta em forma apropriada, o último termo é o produto das quatro raízes e, portanto, cada divisor (positivo e/ou negativo, dependendo da forma da equação) pode ser testado diretamente na equação. O processo poderá ser tedioso se houver muitos divisores, mas é um processo finito e decisivo. Se, porém, houver raízes irracionais ou imaginárias, outros métodos precisam ser usados.

Euler então apresenta uma maneira de decompor a biquadrática em duas quadráticas que é mais simples do que a que Wallis atribui a Descartes. A equação é posta na forma $x^4 + max^3 + na^2x^2 + ma^3x + a^4 = 0$ e queremos achar o produto

$$(x^2 + pax + a^2)\,(x^2 + qax + a^2) = 0.$$

34 Rafael Bombelli (1526-1572).

As incógnitas p, q, são determinadas por resolver as equações simultâneas

$$p + q = m,$$
$$pq+2 = n.$$

Em seguida, Euler apresenta o método de Bombelli que depende da resolução de uma equação cúbica. A equação é posta na forma (*) $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$. Ao simplificar e comparar o resultado com a equação original, acha-se três equações nas três incógnitas p, q, r, em que q e r são dadas em termos de p. Um pouco de álgebra nos permite isolar p das outras incógnitas na seguinte equação cúbica: $8p^3 - 4bp^2(2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0$. Visto que a, b, c, d são os coeficientes da equação original e, portanto, conhecidos, os três valores de p são calculáveis pelos métodos de resolução de equações cúbicas. Assim, podemos determinar q e r. Colocando esses valores na equação (*), obtemos uma equação determinada que se reduz a uma quadrática, de que (tomando as raízes quadráticas positiva e negativa) achamos as quatro raízes para x.

Finalmente, Euler apresenta um método da sua própria invenção. Colocamos uma das raízes de uma equação biquadrática sem o segundo termo (que sempre pode ser eliminado por uma troca de variável) na forma $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, onde p, q, r, são incógnitas. As incógnitas p, q, r podem ser consideradas como raízes de uma equação cúbica $x^3 - fx^2 + gx - h = 0$, onde $f = p+q+r$, $g = pq+pr+qr$ e $h = pqr$. Ao quadrar o valor de x duas vezes e fazendo as substituições cabíveis, obtemos a equação biquadrática $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$, que tem raiz $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, onde p, q, r são as raízes da equação $x^3 = fx^2 + gx - h = 0$.

Desta forma, dado, por exemplo, a biquadrática $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, em que, é claro, a, b, c são valores conhecidos, a mesma é comparada com a biquadrática na última sentença do parágrafo anterior, o que nos permite calcular f, g, h em termos de a, b, c.

Isto, por sua vez, faz a cúbica do parágrafo anterior uma equação determinada que pode ser resolvida pelos métodos conhecidos, resultando nos valores para p, q, r e, portanto, para x. Euler ainda mostra como é possível determinar as outras três raízes da biquadrática por mudar os sinais de $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$.

Equações Indeterminadas: Wallis

Depois de algumas considerações gerais sobre as diferenças entre equações determinadas e indeterminadas, Wallis usa os métodos de John Pell (1611-1685) para resolver o seguinte problema[35]: achar três números tais que, quando cada um, por sua vez, é subtraído do cubo da soma dos três, o resto é um cubo. Considera também lugares geométricos do ponto de vista algébrico.

Os problemas considerados levam Wallis a reconsiderar números negativos e raízes de números negativos. Afirma que, embora não é possível haver uma quantidade menor que zero – e, portanto, tais quantidades, não podem fazer parte de uma aritmética rigorosa –, o conceito do mesmo não é absurdo, nem inútil, nas aplicações da aritmética. No caso dos racionais negativos, exemplifica sua interpretação com distâncias e áreas. Uma distância negativa representa um retrocesso em vez de um avanço, enquanto uma área negativa representa uma perda de território em relação, por exemplo, do movimento do mar. Explicadas assim as quantidades negativas, explica as suas raízes quadráticas como sendo a média geométrica de uma quantidade positiva e uma quantidade negativa.

---

35 Como Wallis observa, o problema é retirado da *Aritmética* de Diofanto.

Equações Indeterminadas: Euler

Em contraste à abordagem de Wallis, a de Euler é sistemática, extensiva e pedagógica. De fato, dedica a segunda parte do seu texto – quinze capítulos – à análise indeterminada. Começa com a resolução de equações lineares com duas incógnitas, que é subdividida nas seguintes dois casos:

$$ax + by = c$$
$$ax - by = c$$

onde tanto as constantes, quanto as variáveis, são inteiros positivos (ocasionalmente zero e menciona a possibilidade de serem racionais positivos).

No primeiro caso, em inteiros positivos, a solução é um número finito de valores. Euler resolve a equação por sucessivas trocas de variáveis, dependendo de considerações de divisibilidade. Considera, por exemplo, a questão de dividir 25 em duas partes, uma divisível por 2 e a outra divisível por 3, ou seja, procura resolver a equação

$$2x + 3y = 25.$$

Para tanto, transforma a equação em

$$x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}.$$

Visto que x é inteiro, $1-y$ deve ser divisível por 2 e, portanto, faz $y - 1 = 2z$. Com isso, temos que

$$x = 11 - 3z.$$

Mas, das condições iniciais, $3y < 25$; assim, $3 < 8$, e $z < 4$. Dessa forma, $z = 0, 1, 2, 3$, o que faz $y = 1, 3, 5, 7$ e $x = 11, 8, 5,$

2. Usando esses valores para x e y, as partições de 25 procuradas são 22+3, 16+9, 10+15 e 4+21.

Todos os problemas desse tipo considerados por Euler são resolvidos da mesma maneira, embora às vezes seja necessário fazer várias trocas de variável. O mesmo método de solução é usado no segundo caso, o de $ax - by = c$, mas aqui tem, em geral, um número infinito de soluções. Também mostra como resolver a equação usando o algoritmo de Euclides para achar o m.d.c. entre a e b e ainda observa que a equação só terá solução se o referido m.d.c. divide a constante c.

Equações simultâneas lineares indeterminadas são reduzidas a uma só equação indeterminada ou pelo método de substituição ou pelo método de eliminação. No caso em que se trata de valores inteiros positivos, a equação resultante é resolvida pelo método já exposto.

Equações em duas variáveis, sendo uma delas (digamos y) do primeiro grau, são resolvidas, em números inteiros positivos, por separar y e fazer considerações sobre a divisibilidade semelhantes às utilizadas dos casos anteriores. Para ilustrar mais detalhadamente o tipo de considerações que Euler faz, mostramos a sua resolução da equação $5xy = 2x+3y+18$. Isolando y, temos

$$y = \frac{2x + 18}{5x - 3}.$$

Em seguida, elimina x do numerador, efetuando a divisão; antes, contudo, multiplica a equação por 5 para eliminar a fração da primeira parte do quociente. No exemplo, obtemos:

$$5y = 2 + \frac{96}{5x - 3}.$$

Mas, y é suposto inteiro e, assim, $5x$–3 divide 96. Desta forma, procura-se, entre os divisores de 96, os que são múltiplos de 5 quando somados a 3. Os divisores de 96 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 e 96. Desses, só 2, 12 e 32 satisfazem a condição de ser divisíveis por 5 quando aumentado por 3. Assim, temos três soluções. A primeira corresponde ao caso em que $5x-3 = 2$, ou seja, $x = 5$. Então, $5y = 2 + \frac{96}{5x-3} = 2 + \frac{96}{2} = 50$ e, portanto, $y = 10$. A segunda corresponde ao caso em que $5x-3 = 12$, ou seja, $x = 3$. e $y = 2$. Finalmente, a terceira corresponde ao caso em que $5x-3 = 32$, ou seja, $x = 7$. e $y = 1$.

Para potências maiores de x, embora os cálculos possam ser mais envolvidos, não há maiores entraves. Para potências maiores de y, em contraste, a presença de radicais na expressão para y dificulta a obtenção de soluções racionais. Assim, Euler aborda os casos em que $a + bx + cx^2$ é um quadrado perfeito. Depois de abordar os casos especiais em que $c = 0$ ou $a = 0$, ele destaca os seguintes quatro casos: (1) c é um número quadrado, (2) a é um número quadrado, (3) $a + bx + cx^2$ é o produto de dois fatores e (4) $a + bx + cx^2$ é uma soma de um quadrado e o produto de dois fatores. Em todos os casos, ele obtém a transformação da equação original em uma expressão para um quadrado perfeito através de manipulações algébricas e substituições apropriadas. No terceiro caso, a redução da expressão original a dois fatores acontece quando $b^2 - 4ac$ é um quadrado perfeito e, nesse caso, ele obtém a fórmula usual para as raízes de uma equação quadrática. Observamos que, embora o procedimento de Euler não seja especialmente difícil e sua exposição, como sempre, seja magistral, provavelmente requereria do aluno um certo nível de maturidade.

Visto que a expressão $a + bx + cx^2$ pode ser um quadrado perfeito em alguns casos e em outros casos não, Euler propõe investigar quando isto acontece. Para tanto, elimina o termo linear (fazendo $x = \frac{y-b}{2c}$) e considera a seguinte questão: quando é que expressões da forma $a + cx^2$ são quadrados perfeitos. Na sua investigação, aborda vários resultantes interessantes da Teoria dos Números, inclusive a equação de Pell.

Para fazer a expressão $a + bx + cx^2 + dx^3$ um quadrado perfeito, Euler considera o caso em que a é um número quadrado. Nesse caso, ele supõe que o quadrado tem um lado da forma $\sqrt{a} + px$. Isto resulta numa equação, da qual os primeiros dois termos da expressão original são eliminados. Assim, ao dividir por x^2 obtém-se uma equação linear para x.

Para ilustrar melhor o procedimento, reproduzimos um exemplo. Seja $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3$ a expressão que queremos fazer um quadrado. Se o lado do referido quadrado tem a forma, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 4 + 6x - 5x^2 + 3x^3 &= 2 + px \\ &= 4 + 4px + p^2x^2 \end{aligned}$$

Para eliminar o termo linear, pomos $4p = 6$, ou seja, $p = \frac{3}{2}$. Dessa forma, a equação se reduz a

$$-5x^2 + 3x^3 = \frac{9}{4}x^2.$$

Ao dividir por x^2, temos $3x = 5 + \frac{9}{4}$, ou seja, $x = \frac{29}{12}$. Em muitos casos, como o presente, a solução é um número racional não inteiro.

Um método alternativo consiste em supor que o lado do quadrado tem a forma $\sqrt{a} + px + qx^2$ e determinar p e q de tal forma que os primeiros três termos da expressão original são eliminados. Os dois métodos podem dar resultados diferentes. Em alguns casos, soluções conhecidas podem ser usadas para gerar novas soluções, mas, quando isto é possível, as novas soluções tendem a ter denominadores muito grandes.

O segundo método também pode ser usado para achar soluções do problema de fazer $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ um quadrado perfeito, onde a é um número quadrado. Um método semelhante é usado quando e é um número quadrado. Ele também observa que, tanto no caso da expressão do terceiro grau, quanto no do quarto, poderá ser útil tentar fatorar a expressão. Isto é feito por igualar a expressão a zero e procurar as raízes da equação.

A transformação da expressão $a + bx + cx^2 + dx^3$ em cubo perfeito não traz novidades. Temos os seguintes três casos: (1) a é um número cúbico, (2) d é um número cúbico ou (3) ambos a e d são números cúbicos. No primeiro caso, por exemplo, supomos que o lado do cubo é $\sqrt[3]{a} + px$. Ao igualar seu cubo à expressão original, o primeiro termo é eliminado e só resta determinar p de tal forma a eliminar o segundo termo. Isto feito, basta dividir por para obter uma equação linear em x. Quando nenhum dos três casos se obtém, mas conhecemos um valor de x que satisfaz a condição do problema, o dado valor pode ser usado para reduzir o problema ao primeiro caso. Isto é feito pondo $x = h+y$, onde h é o referido valor.

Também não há novidade em fazer com que $a + bx + cx^2$ seja um biquadrado. Basta transformá-la primeiro em quadrado e depois transformar a raiz desse quadrado em quadrado.

Visto que a fatoração pode ser importante para a resolução desse tipo de problema, Euler considera a fatoração da expressão $ax^2 + bxy + cy^2$, onde x e y são supostos inteiros. De novo, tem três casos: (1) a expressão é o produto de dois fatores racionais, (2) os dois fatores do caso anterior são iguais e (3) a expressão tem fatores irracionais. O terceiro caso é o mais interessante, pois se divide em dois subcasos: (a) os fatores são "simplesmente irracionais", ou seja, $b^2 - 4ac$ é positivo e (b) os fatores são "imaginários", ou seja, $b^2 - 4ac$ é negativo.

Para abordar o terceiro caso mais facilmente, Euler põe $x = \dfrac{z - by}{2a}$ e, assim, a expressão original se reduz a uma expressão da forma $ax^2 + cy^2 - 4ac$. Assim, investiga primeiro o caso em que

$a = c = 1$, ou seja, $x^2 + y^2$. Suponha, então, que a expressão tem dois fatores imaginários, de tal forma que temos

$$x^2 + y^2 = (x + y\sqrt{-1}) \times (x - y\sqrt{-1}).$$

Quaisquer fatores racionais de $x^2 + y^2$, em consequência, serão fatores desses fatores irracionais. Assim, põe

$$(x + y\sqrt{-1}) = (p + q\sqrt{-1}) \times (r + s\sqrt{-1}) \quad \text{e}$$
$$(x - y\sqrt{-1}) = (p - q\sqrt{-1}) \times (r - s\sqrt{-1}).$$

Ao fazer o produto dessas equações, obtemos

$$x^2 + y^2 = (p^2 + q^2) \times (r^2 + s^2),$$

onde

$$x = pr - qs \text{ e}$$
$$y = ps + qr.$$

As expressões para x e y vêm da resolução simultânea das equações para os fatores.

Depois de olhar a alguns exemplos numéricos, Euler conclui, mas não demonstra, que todo número primo da forma $4n+1$ é a soma de dois quadrados e que todo primo da forma $4n-1$ não é a soma de dois quadrados.

O mesmo método é usado para investigar os casos especiais de $x^2 + 2y^2$ e $x^2 + cy^2$. Finalmente, o caso geral, $ax^2 + cy^2$, é reduzido ao caso anterior por uma substituição apropriada e feito um quadrado por usar a fatoração

$$x^2 + cy^2 = (x + y\sqrt{-c}) \times (x - y\sqrt{-c}).$$

Ao fatorar os dois fatores, obtém $x = mp^2 - mcq^2$ e $y = 2mpq$, o que resulta em:

$$x^2 + cy^2 = m^2(p^2 + cq^2)^2.$$

Quando x e y são primos entre si, $m = 1$. Métodos semelhantes são usados para fazer com que $x^2 + cy^2$ seja um cubo, biquadrado e potência de cinco.

Euler então usa alguns dos resultados sobre somas de quadrados para demonstrar que, para certos valores de a e b, $ax^4 + by^4$ não pode ser um quadrado perfeito. Considera primeiro o caso em que $a = b = 1$, descontando os dois casos triviais em que uma das variáveis é nulo ou em que os dois são iguais. Assim, demonstra que, se x e y são primos entre si, $x^4 + y^4$ não é um quadrado perfeito. A demonstração é pelo método da descida infinita. Isto é, mostra que a suposição que haja alguns números m e n que fazem $x^4 + y^4$ um quadrado nos leva a concluir que há outros números menores, g e h, que também $x^4 + y^4$ fazem um quadrado. Visto que o argumento é replicável *ad nauseam*, obtemos uma série infinita decrescente (a partir do par original), o que é impossível nos inteiros positivos. Os outros casos considerados são tratados de forma semelhante ou reduzidos a casos anteriores.

Nos últimos dois capítulos da parte sobre a análise indeterminada, Euler resolve 17 questões (na edição alemã há uma falha na enumeração) sobre quadrados e quatro questões sobre cubos a fim de esclarecer mais os métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores. As questões são bastante conhecidas, remontando, em muitos casos à *Aritmética* de Diofanto. Mas, também demonstra alguns teoremas, incluindo o caso especial do Último Teorema de Fermat para $n = 3$.

No final do último capítulo há uma lista de 14 questões propostas (com respostas), que, aliás, não consta na edição alemã.

Podemos observar que, nessa parte do seu livro, Euler deu grande ênfase a soluções em números inteiros positivos. Isto se deu pelos seguintes fatos: (1) permitem respostas fechadas, (2) são aplicáveis a muitas situações problemas, (3) promovem excelente treino de raciocínio (Euler afirma isto explicitamente). Além dessas razões, contudo, devemos acrescentar a de o próprio Euler ser apaixonado pela Teoria dos Números.

Já vimos que De Morgan trata de equações lineares em duas variáveis e é, de fato, o único caso de equação indeterminado que ele aborda. Mesmo assim, dá mais ênfase a sistemas de equações simultâneas do que à equação indeterminada per se.

Logaritmos: De Morgan

Wallis e Euler abordaram logaritmos de forma mais aritmética do que algébrica. Como já mencionamos, Wallis explicou os logaritmos através de uma comparação de progressões geométricas e aritméticas, enquanto Euler apresenta logaritmos como sendo expoentes de uma base, sem mencionar progressões. De Morgan, em contraste, faz uma abordagem a partir das propriedades da função exponencial. Ao fazer isto, aborda vários conceitos de forma rápida, aparentemente só em preparação da sua explicação de logaritmos.

Assim, começa com o conceito de limite que define como uma quantidade fixa à qual podemos fazer uma quantidade variável aproximar tanto quanto queremos (a definição dada por Cauchy (1789-1857)). Sempre usando esse conceito, mostra vários teoremas incluindo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.\ \textit{ad infinitum}\ \text{e}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \&c.\ \textit{ad infinitum}.$$

Em seguida, define *função de x* como qualquer expressão contendo *x*, deixando, contudo, *expressão* sem caracterização. Classifica as funções da seguinte maneira:

Funções				
Álgebrica comum				Transcendental
Racional		Irracional		Exponencial
Integral	Fracionária	Integral	Fracionária	Logarítmica
Monômio		Monômio		Circular
Binômio		Binômio		Circular Inversa
Trinômio		Trinômio		& c.
Quadrinômio		Quadrinômio		
& c.		& c.		

Ainda observa que uma função (e notamos que uma função, para De Morgan, não é necessariamente dada por uma equação) como $1 - x + x^2 - x^3 +$ &*c. ad. infinitum*, por exemplo, não pode ser classificada até reconhecemos que é igual, no caso, a $\frac{1}{1 + x}$. Em qualquer evento, dá muita ênfase a divisão de polinómios.

Independentemente, porém, de como uma expressão como $1 - x + x^2 - x^3 +$ &*c.* seja classificada como uma função, é uma série infinita. De Morgan tem o cuidado de explicitar o fato de que, se uma série infinita não for dada por uma regra, não será possível continuá-la com certeza só a partir dos seus termos iniciais. Considere, por exemplo, a seguinte série:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

Poderá parecer óbvia que se trata do acréscimo repetido da unidade. No entanto, outra maneira de continuar a série seria

$$\ldots 1 + 2 + 3 + 4 + \&c.$$

(onde recomeçamos com o décimo termo). Isto seria consoante com a regra que estipula que o (n+1)-ésimo termo é o n-ésimo termo mais o número no lugar das dezenas na n-ésima soma parcial. Assim, é importante dar uma série, quando possível, por seu termo geral.

Uma série poderá aproximar-se de um limite com a soma sucessiva dos seus termos. Quando isto acontece, o limite é chamado a soma da série e a própria série é dita convergente. Senão, é dita divergente. De Morgan não aborda a aritmética de séries, mas dá alguns critérios para séries convergentes e divergentes, incluindo o teste da razão. Ainda exibe a série

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\ \&c.,$$

calculando várias somas parciais para obter

$$2.71828182845 < e < 2.71828182846.$$

É interessante notar que, apesar da sua avaliação dessa série como sendo de muita importância na álgebra, desconsidera sua própria regra, pois não dá o seu termo geral. Finalmente, aborda o desenvolvimento de funções racionais fracionárias como séries de potências.

Aborda rapidamente a composição de funções e, através disto, equações funcionais. Em especial, mostra que há uma função φ, tal que

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$$

e, reciprocamente, que qualquer função que satisfaz essa equação será uma função exponencial. Aproveita o assunto para apresentar o teorema binomial.

Finalmente, define logaritmos de forma semelhante à explicação de Euler, e observe certas propriedades deles derivadas da função exponencial. Logo em seguida, porém, desenvolve as suas propriedades através de considerar séries infinitos e chega, assim, ao conceito do logaritmo natural (neperiano), desenvolvendo vários resultados através da manipulação de séries infinitas. Para explicar a tabela de logaritmos e seu uso para facilitar os cálculos complexos, contudo, volta aos logaritmos de base 10.

Wallis e os Infinitésimos

A última quarta parte do livro de Wallis trata da análise de séries infinitas usando o conceito de infinitesimais. Começa por considerar o método de exaustão de Euclides e o método de quadratura de Cavalieri e aborda várias aplicações de interesse algébrico, incluindo as seções cônicas, a retificação de curvas e aproximações de raízes. Sua exposição é frequentemente retórica ou aritmética, em vez de algébrica. Em qualquer caso, o referido recurso parece ser além do que é geralmente considerado como álgebra elementar e, de fato, não corresponde a qualquer abordagem nos textos de Euler e De Morgan. Desta forma, não entraremos nos detalhes dessa parte do texto aqui.

O Novo Protagonista

Como já mencionamos, o matemático francês (ou melhor, ítalo-francês), Joseph-Louis Lagrange (escrito, às vezes, La Grange) fez uns acréscimos substanciais ao texto de Euler. Lagrange nasceu Giuseppe Lodovico Lagrangia em 1736 na cidade de Turim, na Itália. Seu bisavô havia ligações com a França e Lagrange prezava essa ligação ao ponto de adotar a versão francesa do seu nome. Em qualquer caso, estudou em Turim e, como jovem professor nessa cidade, alcançou fama com suas contribuições à nascente área do cálculo de variações. Como consequência desse trabalho, foi eleito membro da academia de Berlim em 1756, sendo proposto por Euler, e logo depois ajudou a fundar a Academia Real das Ciências de Turim[36].

Depois de ter recusado várias vezes a oferta da Academia de Berlim, ele finalmente aceitou ser membro dessa instituição em 1766. Ficou em Berlim até o falecimento do Rei Federico II (1712-1786), trabalhando em astronomia, mecânica, probabilidade, os fundamentos do Cálculo, a Teoria dos Números e álgebra. Tanto ele, quanto a mulher dele, Vittoria Conti, tiveram problemas de saúde em Berlim, onde de fato, ela acabou falecendo em 1783.

Em 1787, aceitou um posto na Academia das Ciências em Paris. Lá publicou sua *Mécanique analytique*, trabalhou na teoria de equações diferenciais e fez parte da comissão de pesos e medidas que criou o sistema métrica. Em 1792, casou-se com a filha do astrônomo Pierre Lemonnier (ou Le Monnier, 1715-1799) e já em 1793 começou a lidar com o Reino de Terror provocado pela Revolução Francesa. Com a ajuda do químico Antoine Lavoisier (1743-1794), conseguiu driblar uma lei contra estrangeiros, embora o próprio Lavoisier foi posteriormente condenado e executado por outras razões. Permaneceu em Paris até o seu falecimento em 1813.

Os Acréscimos de Lagrange

De certa forma, os acréscimos de Lagrange ao texto de Euler não são muito apropriados, pois não fazem parte da matéria essencial para o aprendiz, nem são apresentados de forma didática. São centrados, no entanto, sobre as frações continuadas e as suas aplicações à análise indeterminada e, desse ponto de vista, sua inclusão é justificável. Assim, faremos apenas uma revisão

36 As informações biográficas de Lagrange foram retiradas de O´Connor e Robertson (1999).

rápida deles, mais focada em exemplos do que em uma exposição da teoria algébrica que Lagrange desenvolve.

Lagrange apresenta frações continuadas como expressões da forma

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \&c.,}}}$$

onde *b*, *c*, *d* &c. e α, β, γ, δ, &c. são todos números inteiros (positivos ou negativos). Surgem como uma maneira natural de expressar números que não são inteiros. Seja *a* um tal número. Seja α o inteiro mais próximo a *a*. Então, $a - \alpha$ é uma fração menor do que a unidade. Seja $b = \frac{1}{a - \alpha}$, uma fração maior que a unidade, e repetir o procedimento, achando $b - \beta$ e $c = \frac{1}{b - \beta}$. Continuando assim encontramos que *a* é igual à fração continuada dado no início do presente parágrafo. O processo pode terminar ou continuar infinitamente, mas a cada passo obtemos uma aproximação sempre melhor para *a*.

O processo (que relembra o algoritmo de Euclides) é muito fácil quando *a* já é uma fração, pois basta dividir o numerador pelo denominador, o denominador pelo resto, o resto pelo novo resto, …, obtendo respectivamente, α, β, γ, … Poderá, no entanto, chegar mais perto, às vezes, aproximando por excesso, o que dá restos e, portanto, quocientes negativos. A razão da circunferência para seu diâmetro (π), por exemplo, é aproximadamente 3.1415926535. Assim,

31415926535÷10000000000 = 3 mais o resto 1415926535
10000000000÷1415926535 = 7 mais o resto 88514255
1415926535÷88514255 = 16 mais o resto –301545
88514255÷–301545 = –294 mais o resto –139975
&c.

Observe que no terceiro passo poderíamos ter feito 1415926535÷88514255 = 15 mais o resto 88212710, mas multiplicando por 16 obtemos uma aproximação (por excesso) muito mais próximo ao dividendo. Dessa forma, temos

Fazendo a soma de cada passo, obtemos a seguinte sequência de aproximações fracionais para π:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{104392}{33229}, \text{\&c.}$$

Lagrange ainda mostra como essa sequência pode ser otimizada.

Em seguida, considera várias aplicações. Seja proposta, por exemplo, achar os valores de p e q, inteiros, que minimizam a quantidade $49p^2 - 238pq + 290q^2$. Assim, $b^2 - 4ac = -196$ e $\frac{-b}{2a} = \frac{17}{7}$. Dessa fração, obtemos a seguinte fração continuada (finita):

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{0}{1.}}}$$

A fração continuada é obtida a partir das equações

17÷7 = 2 com resto 3
7÷3 = 2 com resto 1
3÷1 = 3 com resto 0.

Os quocientes 2, 2, 3 são dispostos e as seguintes frações calculados: a primeira fração (sem contar) é o primeiro quociente sobre a unidade; o segundo numerador é o segundo quociente vezes o primeiro numerador mais a unidade; o segundo denominador é o segundo quociente; o terceiro numerador é o terceiro quociente vezes o segundo numerador mais o primeiro numerador; e o terceiro denominador é o terceiro quociente vezes o segundo denominador mais o primeiro denominador. Isto dá a seguinte configuração:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}. \end{array}$$

Das frações, tiramos os possíveis valores para p e q, ou seja, p pode ser 1, 2, 5 e 17, enquanto q pode ser correspondentemente 0, 1, 2 e 7. Para cada par de valores, calculamos o valor da expressão original:

p	q	$49p^2 - 238pq + 290q^2$
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49.

Assim sendo, o valor mínimo de $49p^2 - 238pq + 290q^2$ é 5, o que ocorre quando $p = 5$ e $q = 2$.

Lagrange usa métodos análogos, juntos com métodos análogos aos de Euler para investigar questões sobre equações indeterminadas. A maioria dos casos considerados são do segundo grau.

Conclusão

Segundo a tripartição da álgebra nos estágios retórico, sincopado e simbólico, feito por Georg Nesselmann (1811-1881), todos os três textos considerados no presente trabalho recaem no estágio simbólico. De fato, o simbolismo usado por Euler e De Morgan não ocasionará qualquer problema para o leitor moderno. O de Wallis, em contraste, é um pouco mais problemático, o que é ainda acentuado pelo fato de que tende a adotar o simbolismo do autor fonte que aborda nas várias seções do seu texto; isto resulta em mudanças de simbolismo no decurso do texto, em vez da adoção de um simbolismo uniforme.

Uma outra característica do texto de Wallis que poderá causar dificuldades para o leitor moderno é o fato de que é escrito num inglês um tanto arcaico (do século XVII). Isto suscitará menos problemas para o leitor que já tem experiência, por exemplo, com as terminações do verbo usadas nesse período. Mas, ainda permanece o problema de palavras cujo sentido tem mudado com o tempo, como é o caso da palavra *artificial*, citada acima, no sentido “habilidoso”, em vez da acepção moderna de (1) “não natural” ou (2) “dissimulado”.

Segundo Victor Katz (2007), também podemos considerar a história da álgebra como composto das seguintes quatro estágios: geométrico, da resolução de equações, da função dinâmica, estrutural. Todos os três textos se enquadram no estágio da resolução de equações, isto é, sua maior preocupação é com a determinação de quais números satisfazem certas relações (dadas simbolicamente). Isto parece apropriado para textos didáticos para iniciantes em álgebra. Resoluções geométricas não fazem parte, em geral, desses textos e vemos a geometria só nos exemplos, mais em Wallis do que nos outros dois textos. Embora Euler foi um grande expoente do conceito de função, não o usa essencialmente, no sentido de variação concomitante, no texto dele. De Morgan usa com frequência o termo “função”, mas, como Euler, não dá ênfase a conceito de moção, exceto incidentalmente da sua discussão de limites. Os acréscimos de Lagrange ao texto de Euler parecem querer buscar elementos de estrutura e é isto uma das razões que os tornam inapropriados para o iniciante.

É interessante observar, do ponto de vista do currículo moderno de uma primeira disciplina (ou dois, pois todos os três textos são bastante amplos) em álgebra, o que não é incluído. Apesar do fato de que todos os três abordam as funções logarítmicas e exponenciais, não há uma exposição sistemática das funções trigonométricas. Apenas Wallis utiliza alguns conceitos trigonométricas em alguns exemplos, mas são supostos conhecidos, não explicados.

A maior ausência, porém, são os gráficos. Simplesmente inexistem nos três textos considerados. De novo, é o livro de Wallis que contém alguns desenhos geométricos, mas são apenas isto, ou seja, desenhos geométricos utilizados no contexto da aplicação da álgebra a geometria. Não são gráficos de expressões algébricas. A referida ausência é provavelmente devida ao fato já mencionado de que os textos pertencem ao estágio da resolução de equações de Katz. Mesmo o livro de De Morgan, que aproxima um pouco mais ao estágio da função dinâmica, não inclui os gráficos de funções. Isto, de fato, confirma a classificação dele no estágio anterior.

O livro de Wallis teve, como já notamos, vários propósitos, sendo um pedagógico, outro histórico e até chauvinista. Esses propósitos não são inteiramente compatíveis e parece que, na verdade, Wallis não deu conta ao propósito pedagógico. O livro, em muitos lugares, parece ser endereçado menos a um iniciante, do que a um leitor com certa sofisticação. Na melhor das hipóteses, o leitor hipotético pode ser suposto como tendo certa "bagagem", mas quer aumentar seu conhecimento da álgebra. Mesmo nesse caso, porém, o texto de Wallis não se apresenta mesmo como um livro-texto, mas como um guia aos autores que ele aborda.

De certa forma, o texto de De Morgan é parecido com o de Wallis em que pressupõe certo nível de sofisticação do leitor. Isto é, é escrito para alunos que são habilidosos em matemática e propõe um curso de álgebra preparatório para o estudo do Cálculo. É por esse motivo que faz algum uso do conceito de função e que dá tanta ênfase ao conceito de limite.

O livro de Euler, em contraste, se empenha em apresentar a álgebra por si só. Também não supõe que o leitor tem habilidades especiais, nem conhecimentos anteriores, como atesta a história (ou, talvez, estória) sobre o alfaiate, recontado no início do presente trabalho. Sua linguagem é sempre clara e direta e usa vários recursos pedagógicos para esclarecer a matéria apresentada.

Não obstante as várias deficiências pedagógicas aqui sinalizadas, todos os três textos são fontes ricas em abordagens alternativas e maneiras em que certos assuntos podem ser estendidos e explorados pelo professor e seus alunos, bem como possíveis tópicos, além do currículo usual, que podem ser investigados pelos alunos como, por exemplo, projetos individuais ou em grupos. Sinalizamos ainda que a investigação das referidas possibilidades seria um interessante tópico para teses ou dissertações de pós-graduação em Educação Matemática.

Finalmente, observamos que o livro de Euler seria uma escolha excelente para os que querem usar fontes originais na sala de aula. De fato, seria especialmente apropriado devido ao estilo de Euler, pois, ao abordar um tópico, sempre começa com exemplos numéricos e/ou casos especiais e vai generalizando paulatinamente (isto é um estilo que ele usa também nos seus trabalhos científicos). Assim, o leitor pode participar no raciocínio envolvido no desenvolvimento do assunto e sempre fica a par da motivação para as manipulações algébricas.

A única questão sobre essa possibilidade é a da linguagem, pois o original em alemão não seria ao alcance de muitos alunos brasileiros. Muitos estudantes do segundo grau, contudo, poderiam seguir as versões inglesa ou francesa. Ainda há, segundo Dynnikov e Sad (2007), uma tradução para o português, embora seja algo raro. Uma possibilidade seria para o professor traduzir algumas páginas de uma das mencionadas versões, ou trabalhar com um professor de línguas para fazer pequenas traduções. Isto poderia até ser um interessante projeto para um grupo de alunos para sua aula de línguas, sendo o resultado posteriormente compartilhado com a turma de matemática.

Referências

ANJOS, Marta Figueredo dos. **Um Estudo Histórico-Epistemológico do Conceito de Número Negativo**. Natal: EDUFRN, 2012.

DYNNIKOV, Circe M. da Silva; SAD, Lígia Arantes. **Uma Abordagem Pedagógica do Uso de Fontes Originais em História da Matemática**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

EULER, Leonhard. **Vollständige Anleitung zur Algebra**. St. Petersburg. Academia das Ciências, 1771.

EULER, Leonhard. **Élémens d'algébre**. [Trad. Johann (III) Bernoulli. Com suplemento de Joseph-Louis Lagrange.] Lyon: Bruyset ainé & Compagnie, 1795.

EULER, Leonhard. **Vollständige Anleitung zur Algebra**. *In*: EULER, Leonhardi. **Opera omnia** [série 1, volume 1]. RUDIO, Ferdinand: KRAZER, Adolf; STÄCKEL, Paul. (Eds.). Leipzig and Berlin, 1911.

EULER, Leonhard. **Elements of Algebra**. [Trad. de John Hewlett.] London: Longman, Hurst, Rees e Orme, 1822.

FELLMANN, Emil A. **Leonhard Euler**. Basel: Birkhäuser, 2007.

FOSSA, John A. **Leonhard Euler: O Homem e o Matemático**. A aparecer.

FOSSA, John A. **O Ensino de Conceito de Variável**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

FOSSA, John A. **O Ensino do Conceito de Variável**. Mossoró: Academia Mossoroense de Letras, 1992.

GRICE, H. Paul. Logic and Conversation. In: COLE, Peter; MORGAN, Jerry, (Eds.), **Syntax and Semantics**. V. 3, p. 43-58. New York: Academic Press, 1975.

KATZ, Victor J. Studies in the History of Algebra with Implications for Teaching. **Educational Studies in Mathematics**. V. 66, p. 185-201, 2007.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. John Wallis. 2002. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wallis.html>. Acesso em 25/11/2018.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Joseph-Luis Lagrande. 1999. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wallis.html>. Acesso em 25/11/2018.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Augustus De Morgan. 1996. Disponível em <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Morgan.html>. Acesso em 25/11/2018.

PYCIOR, Helena M. **Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

SÁ, Pedro Franco de; FOSSA, John A. Uma Distinção entre Problemas Aritméticos e Algébricos". **Educação em Questão** (Natal, RN) v. 33, n. 19, p. 253-278, 2008.

SÁ, Pedro Franco de; FOSSA, John A. "Arithmetic Word Problems and Algebra Word Problems". **Journal Internacional de**

Estudos em Educação Matemática (São Paulo) v. 5, n. 1, p. 187-225, 2012.

STEDALL, Jacqueline A. Of Our Own Nation: John Wallis's Account of Mathematical Learning in Medieval England. **Historia Mathematica**, v. 28, p. 73-122, 2001.

STEDALL, Jacqueline A. **A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685**. Oxford: Oxford University Press, 2002.

SOUSA, Giselle Costa de. **Um Estudo sobre as Origens da Lógica Matemática**. Natal: EDUFRN, 2012.

6

CONSTITUIÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO E GENERALIDADES POR LEONHARD EULER EM *INTRODUCTIO IN ANALYSIS INFINITORUM*[1]

Miguel Chaquiam

Introdução

O tema emerge após consulta ao acervo do cientista paraense Guilherme La Penha[2] e identificação de livros antigos de matemática do século XVIII, onde constam tópicos de matemática relacionados a uma pesquisa, em andamento, vinculada ao curso de mestrado profissional em ensino de matemática, que se encontra sob minha orientação, cujos resultados iniciais que subsidiaram a elaboração de uma sequência didática nos chamam

1 *Intoduction à L'Analyse Infinitésimale* tradução francesa.

2 Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha (09/03/1942 - 06/02/1996), engenheiro mecânico, físico-matemático, gerador e gerenciador da ciência no Brasil. Autor de vários livros e artigos científicos, profundo conhecedor das obras de Euler, principalmente *Lettres à une princesse d'Allemagne*.

atenção. Mais precisamente, os motivos que levaram a discutir o conceito de função foram os resultados da revisão de bibliográfica sobre a temática, entrevista com estudantes e professores do ensino médio e os conteúdos constantes nos livros didáticos da Educação Básica. Além disso, há o destaque dessa temática nos documentos oficiais que balizam a educação brasileira.

A revisão da literatura aponta que as dificuldades de aprendizagem do conceito de função sobrevêm da não compreensão da natureza das variáveis, tais como variabilidade, dependência e como elas se relacionam, associadas às abordagens mecânicas e abstratas sem conexões entre os elementos gráficos e as expressões algébricas. Esses argumentos são corroborados por Trindade (1996) quando aponta as seguintes dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem do conceito de função: i) compreender o conceito de variável; ii) representar algebricamente uma função; iii) inabilidade de construir associações entre as diferentes representações e iv) compreensão da simbologia agregada.

Por outro lado, a pesquisa aponta diversos intentos no ensino do conceito de função, perpassam pelo uso da história da matemática, aliada ao uso de recursos tecnológicos, que pode promover uma aprendizagem mais significativa segundo Maciel (2014), pela resolução de problemas como nos mostra Souza (2016) em sua empiria e, pela modelagem matemática, proposta por Brito e Almeida (2005), onde procuram aproximar a linguagem cotidiana da linguagem científica integrada ao conceito de função e correlacionar as variações entre grandezas.

Quanto aos livros didáticos de matemática utilizados no Ensino Médio, identificados a partir do Guia do Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio, do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), foram analisados seis, sendo dois relativos ao período de 2015/2017 e quatro ao de 2018/2020, onde se constatou que a maioria apresenta a definição de função próxima da proposição de Dirichlet (Peter Gustav Leujene Dirichlet, 1805-1859), pouco exploram as diversas formas de dar significado à função, dependência, variáveis, correspondência, regra, transformação, causa e efeito, generalização. Para complementar o olhar sobre livros didáticos, Cruz (2015) concluiu que, cronologicamente a partir de 2005, o conceito de função na visão bourbakiana baseada como conjunto de pares ordenados, ainda que se apoie, em algum momento, a outros conceitos, vem diminuindo e se aproximam da mistura entre o uso de ideias modernas e do trabalho com funções seguindo a correspondência entre grandezas.

Os documentos oficiais que orientam o ensino de matemática na Educação Básica apontam a importância do ensino de funções e consideram um conceito estruturante para aqueles que desejam prosseguir os estudos, seja no ensino básico ou superior, fato ressaltado nas competências gerais e específicas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – prevista na Constituição de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1996 e no Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014 – onde consta que na construção de competências relacionadas ao pensamento científico, crítico e criativo deve-se fazer "uso de raciocínio indutivo e dedutivo para analisar e explicar recursos, soluções e conclusões de processos de investigação", além das indicações nas subdimensões. (BNCC, 2017)

Em relação aos documentos que orientam a formação dos licenciados em Matemática, constata-se a indicação de inclusão de conteúdos relacionados ao cálculo diferencial e integral, fundamentos de análise, álgebra, geometria, álgebra linear e geometria analítica, além de conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise.

Esses dois últimos parágrafos corroboram com a justificativa do tema escolhido, ou seja, o conceito de função deve ser trabalhado de forma clara, precisa e abrangente durante a formação inicial de professores de matemática, subsidia-los de modo que possam abordar adequadamente o referido conceito na Educação Básica.

No Ensino Superior, as definições seguem, de um modo geral, o padrão clássico, pautado no rigor, formalização e simbologia, associado aos comentários relacionados às variáveis, dependência, continuidade, classes, representações e restrições. Num sentido pedagógico, observa-se que a predominância do tratamento mais abstrato dos objetos matemáticos, restritos aos números reais, sem levar em consideração seus fundamentos naturais, pode gerar muitas das dificuldades relacionadas ao pensamento abstrato. Independentemente do ponto de vista matemático dominante, o conceito de função deve ser abordado de diversos modos, bem como as diferentes implicações educacionais.

O exposto justifica a escolha do objeto matemático – conceito de função – e , para delimitar o texto que servirá de base para as discussões, levou-se em conta que o referido conceito evoluiu por quase 300 anos, com discussões ancoradas nas visões geométricas e analíticas, elegemos a versão francesa do texto *Introductio in Analysis Infinitorum* de Leonhard Euler (1707-1783), considerado separatriz do que podemos denominar de Análise Matemática Clássica e Análise Matemática Moderna. Para melhor caracterizar o autor e a citada obra, a seguir são apresentados alguns traços biográficos e a descrição dois volumes que a compõem.

Euler e o Livro *Intoduction à L'Analyse Infinitésimale*

Sem a intenção de idolatra-lo, pode-se afirmar que Euler irá figurar em qualquer lista que procure ordenar personagens que contribuíram à Matemática e que adotem como parâmetros a amplitude dos trabalhos e a clareza nas exposições, embora ciente de que tal ordenamento está cercado de divergências e pode nos levar a equívocos. Não estou afirmando que os trabalhos de Euler não possuem erros, certamente, foram cometidos alguns erros, assim como ocasionais desatenções de rigor. (LA PENHA, 1983)

Leonhard Euler, nascido em 15 de abril de 1707 em Basileia, na Suíça, filho primogênito de Paul Euler e Marguerite Brucker. A princípio foi educado em casa e cedo enviado ao *Gymnasium* de Basileia. Entrou na Universidade de Basileia aos treze anos e formou-se com distinção quando tinha quinze anos.

Nesta universidade tomou aulas de Johann Bernoulli (1667-1748), matemático que tornou a Basileia um centro de referência, cujos filhos Niklaus Bernoulli (1695-1726) e Daniel Bernoulli (1700-1782), seus discípulos, tornaram-se seus rivais e amigos de Euler. Sob a batuta de Johann recebeu orientações destinadas a elucidar dificuldades que se antecipavam aos seus estudos dos principais tratados clássicos da ciência.

Nesse interim obteve os títulos de bacharel e mestre em Artes Liberais, proferiu conferências sobre as filosofias de Descartes e Newton e apresentou como tese à cátedra de Física uma memória intitulada *Dissertação Física sobre o Som*, embora sem sucesso à cátedra, essa curta e elucidativa obra de dezesseis páginas tornou-se um clássico e serviu de guia às pesquisas em acústica nos anos vindouros. Aos dezenove anos publicou um artigo que trazia em seu bojo um aprimoramento, generalização e abreviação da solução dada por Bernoulli ao problema geométrico da isócrona.

Nessa época, a Academia de Ciências de Paris estabelecia prêmios a cada competição, cujas temáticas geralmente estavam voltadas a outras áreas, não especificamente voltados à Matemática, que constituíam a principal honraria científica. Vinte quatro versões desse prêmio foram divididas entre Johann Bernoulli, duas vezes, seu filho Daniel Bernoulli, dez vezes, e Euler, agraciado por doze vezes.

Em 1727, após o declínio de Johann Bernoulli ao convite de Goldbach, da Academia de São Petersburgo – em 1914 essa cidade passou a ser denominada de Petrogrado, dez anos depois passou a Leningrado e, em 1991, volta ter seu nome original – juntamente com os dois filhos de Johann, Niklaus e Daniel, Euler parte para Rússia. A morte de Niklaus durante a viagem e o falecimento de Catarina I no dia de sua chegada o levaram da indicação para fisiologia a um mero associado de matemática.

Em 1730 passa a ocupar a cátedra de física e, em 1733, a cátedra de matemática, sucedendo Daniel Bernoulli que havia retornado à cátedra de anatomia na Universidade de Basileia. Ao final desse ano casou-se primeiro com sua compatriota Katharina Gsell e, posteriormente, após o falecimento da primeira, com Salome Abgail Gsell.

Durante sua estadia na Rússia contribuiu consistentemente à matemática, unificou e sistematizou trabalhos de seus predecessores, produziu resultados relevantes acerca das raízes das equações algébricas e dos números transcendentes, formulou a relação poliédrica V (número de vértices) – A (número de arestas) + F (número de faces) = 2 e a relação que contém os cinco números mais significativos $e^{\pi.i} + 1 = 0$, contudo, não apresentou uma demonstração correta para a primeira e, a segunda, aparece em sua *Introductio in Analysin Infinitorum* sob a forma generalizada $e^{\theta.i} = \cos(\theta) + i.\text{sen}(\theta)$. (LA PENHA, 1983)

Em 1740 morre a Czarina Ana Ivanovna (1693-1740), fato que levou a Academia a uma nova situação crítica e induziu Euler a partir em 1741 para Alemanha, onde foi diretor da Classe de Matemática na Academia de Belas-Letras de Berlim até 1766, quando retorna à Rússia no início do governo da Czarina Catarina II, ascendido em 1762, para ocupar cargo de influente posição social e financeira.

Durante sua estadia na Alemanha, dentre tantas outras publicações, surge em 1748 a *Introductio in Analysis Infinitorum*. Em relação a essa publicação, numa carta à Jean-Baptiste Lerond d'Alembert (1717-1783), Euler comenta que a referida obra passou três anos com os editores, entretanto, numa carta destinada à Cristian Goldbach (1690-1764) em meados de 1744, essa obra já é mencionada, fato que nos leva a inferir que o tempo de espera foi maior do que o dito inicialmente. (LA PENHA, 1986)

Em seus últimos anos em São Petersburgo, embora acometido de graves enfermidades, Euler teve mais tempo para se dedicar à Matemática, fato corroborado pelo número de publicações nos últimos dezessete anos de sua vida, cessado em 7 de setembro de 1783.

Euler foi tão criativo que é preciso um volume inteiro para conter apenas a relação dos títulos de suas publicações nitidamente identificáveis que já ultrapassava a marca de 866 até 1910. Sabe-se que um terço do total da pesquisa em matemática, física-matemática e engenharia mecânica que foram publicados nos três últimos quartos do século XVIII se deve a Euler. La Penha (1986) também afirma que em torno de um terço de sua produção científica era considerada como matemática pura, entretanto, de acordo com uma classificação mais moderna apenas um quinto foi associado à matemática pura, contribuições densas que permanecem até hoje.

Em relação a obra *Introductio in Analysis Infinitorum*, ou simplesmente *Introductio* como é comumente conhecida, foi completado por volta de 1744 e publicado pela primeira vez em 1748 em Lausanne, Suíça, composta por dois volumes, sendo no primeiro abordado análise pura, funções e séries e, no segundo, questões relacionadas à geometria analítica.

Sua versão do latim para o francês, intitulada de *Intoduction à L'Analyse Infinitésimale*, acompanhada de notas e esclarecimentos, foi apresentada por Jean Baptiste Labey (1752-1825) – matemático francês, tradutor, professor da École Militaire de Paris e da École Polytechnique, de 1799 a 1816, e do Lycée Napoléon em Paris – também em dois tomos, sendo o primeiro publicado em 1796 e o segundo em 1797, que tiveram 18 edições publicadas entre 1796 e 1968.

Nas cartas encaminhadas à Goldbach, além das informações temporais relativas ao atraso na publicação, é possível ter uma ideia do que pensa Euler sobre sua obra quando afirma que as abordagens dadas à álgebra e geometria resultaram na resolução de uma grande quantidade de problemas sem o cálculo infinitesimal e que não há nada igual publicado. (LA PENHA, 1986)

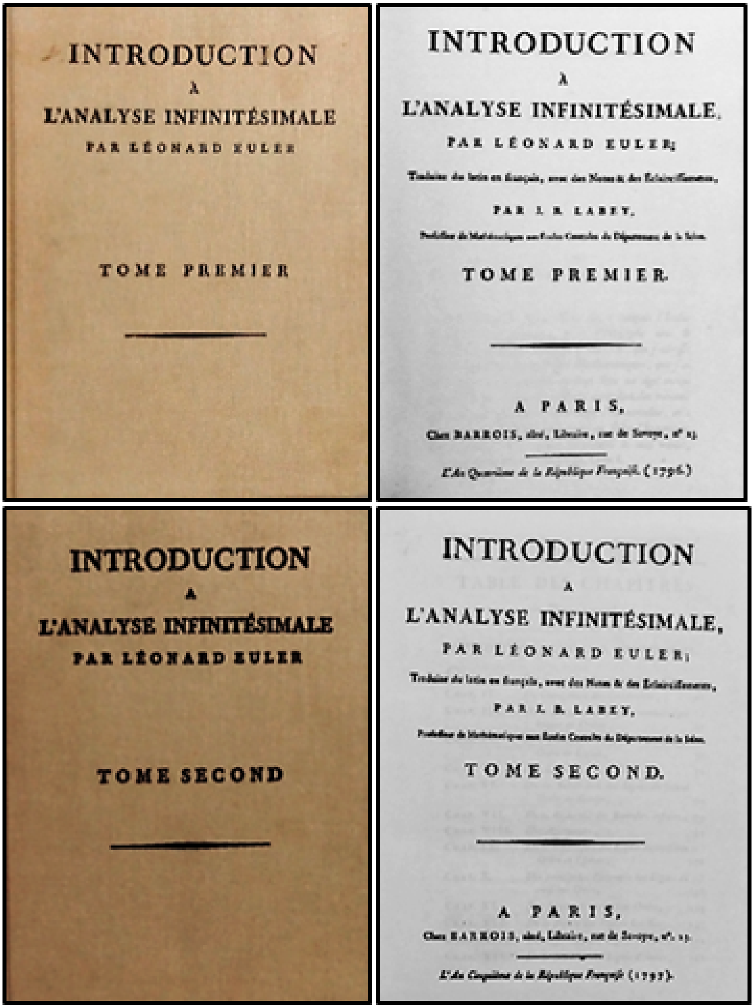


Figura 1: *Intoduction à L'Analyse Infinitésimale.*
Fonte: Acervo do autor (2019).

Nessa obra, Euler agrega os cinco números mais significativos na matemática a partir da forma generalizada $e^{\theta.i} = \cos(\theta) + i.\text{sen}(\theta)$, essa relação é obtida quando se considera o caso particular para $\theta = \pi$, ou seja, obtém-se a relação $e^{\pi.i} + 1 = 0$.

Após *Introductio in Analysis Infinitorum*, Euler publicou em 1755 *Institutiones calculi differentialis* e, em 1768, *Institutionum calculi integralis*, composto por três volumes, conjunto de obras que pode ser considerado uma trilogia. Em *Institutiones calculi* differentialis introduziu as leis para o cálculo diferencial e *Institutionum calculi integralis* é definido integração como o processo inverso de diferenciação, integração de fórmulas diferenciais e resolução de equações diferenciais.

Considero importante discorrer sobre a evolução do conceito de função em decorrência da ousada afirmação de La Penha (1983):

> ... alguns matemáticos dirão que Euler usou uma definição de função que cobre, essencialmente, tão somente funções algébricas. Poucos saberão que foi o próprio Euler quem, em trabalhos posteriores, observou a inadequação de tal definição e encetou a introdução, quase palavra por palavra, da definição hoje usada universalmente. Uma definição reintroduzida por Dirichlet, quase um século depois.

Uma cronologia relativa a constituição desse conceito é apresentada a partir de valores numéricos, seguido por representações geométricas e expressões analíticas, seu aprimoramento e generalização até sua formalização moderna.

A Constituição do Conceito até as Primeiras Definições

O estabelecimento de relação entre quantidades pelo homem é identificável há pelo menos cerca de 4000 anos se considerarmos, por exemplo, a Tábua de Plimpton ou Plimpton 322. Nessa tabela de argila em escrita cuneiforme num sistema numeral de base 60, ou sexagesimal, datada do período babilônio antigo, figuram tabelas nas quais é possível estabelecer relação entre seus componentes. Pesquisadores da Universidade da Nova Gales do

Sul, na Austrália revelaram que ela é a mais antiga e acurada tabela de trigonometria, possivelmente usada na construção, e evidencia que os babilônios foram os primeiros a sistematizar a trigonometria. Outros exemplos encontrados em épocas antigas apresentam correspondência entre sequência de números e seus quadrados ou seus recíprocos ou ainda raízes quadradas ou cúbicas.

Dentre os alexandrinos, os trabalhos de Klaudius Ptolemaios (Cláudio Ptolomeu), sábio grego do século II, matemático, geógrafo e astrônomo, foram os que chegaram até nossos dias. Os trabalhos de Hiparco de Nicéia foram organizados por Ptolomeu e, em *Almagesto*, obra considerada relevante até as descobertas de Nicolau Copérnico (1473-1543) e Johann Kepler (1571-1630) sobre a teoria heliocêntrica do sistema solar, a maior parte dos problemas geométricos pode ser resolvida correlacionando-se lados e ângulos de triângulos e tomando por base as informações constantes nas tabelas de cordas de Ptolomeu. Nesse período as relações são estabelecidas entre os elementos (quantidades constantes) de conjuntos finitos sem o uso de simbolismo algébrico.

Diophantus ou Diofante foi um matemático grego helenístico que viveu em Alexandria durante o século III e proporcionou progressos na notação matemática, sendo um dos primeiros a introduzir simbolismo e a utilizar notação abreviada para operações que ocorriam com frequência, assim como abreviação para o desconhecido. Escreveu uma série de livros chamada *Aritmética*, coleção de problemas algébricos que influenciaram o desenvolvimento do que conhecemos atualmente por Teoria dos Números.

Na passagem do século V para VI, o matemático indiano Aryabhata nos presenteia um compêndio de matemática e astronomia, intitulado *Aryabhatiya*, que sobreviveu aos tempos modernos. A parte matemática abrange aritmética, álgebra, trigonometria e uma tabela dos Jiva (tabela de senos). Um dos trabalhos perdidos, o *Arya-siddhanta*, continha cálculos astronômicos e também apresentava a descrição do *gnomon* (*shanku-yantra*), provavelmente instrumento de medição de ângulo. Os indianos Brahmagupta (628) e Bhaskara (1150) também trouxeram importantes contribuições.

Numa perspectiva moderna, observa-se que uma formulação da definição de função está associada aos fenômenos naturais, dentre os quais, velocidade, densidade, distância, calor, *etc*., na tentativa de quantificar “qualidades”, “formas”, “intensidade” ou “extensões”. Um dos primeiros a fazer uso dessa perspectiva foi Roger Bacon (1214-1294), filósofo franciscano inglês que também estudou matemática, astronomia, óptica, alquimia e idiomas, considerado precursor da ciência experimental moderna ao considerar o processo experimental como um ciclo constituído por observação, hipótese, experimentação e verificação de resultados.

O filósofo Nicole Oresme (1323-1382) escreveu sobre matemática, física, astronomia e teologia. Ao seu nome é associado uma teoria geométrica que estabelece a equivalência lógica entre os valores tabulados e os representados num gráfico, publicado em *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, ideias que contribuíram para o estabelecimento das bases da geometria analítica.

Em sua teoria usou coordenadas retangulares (latitude e longitude) e as figuras geométricas resultantes (formas) para distinguir entre distribuições uniformes e não uniformes de várias quantidades, a exemplo, a mudança de velocidade em relação ao tempo ou a distribuição de intensidades de uma qualidade em relação à extensão do objeto.

Em relação aos movimentos, a linha de base (longitude) é o tempo, enquanto as perpendiculares elevadas na linha de base (latitudes) representam a velocidade a cada instante durante o movimento. Abaixo estão representadas três adaptações dos tipos de movimento segundo a obra de Oresme.

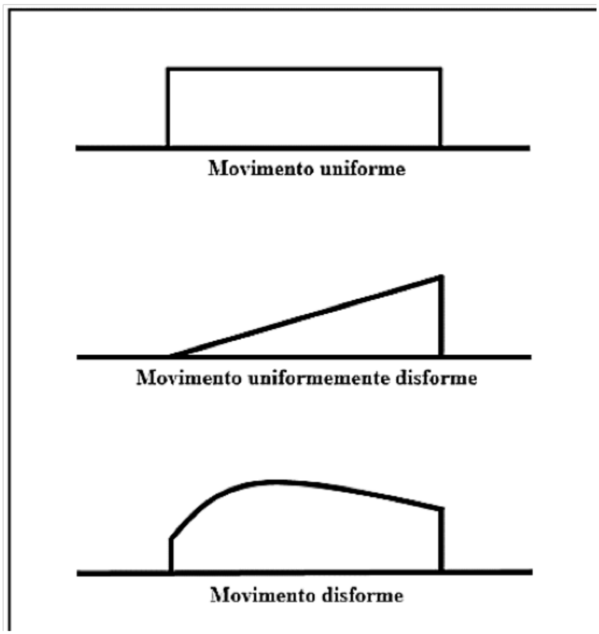


Figura 2 - Tipos de movimento segundo Oresme
Fonte: Adaptado de Katz (2010)

Oresme foi o primeiro a provar o teorema de Merton: A distância percorrida em um tempo fixo por um corpo que se move sob aceleração uniforme é a mesma que se o corpo se movesse a uma velocidade uniforme igual à sua velocidade no ponto médio do período. Para tanto, fez uso de seu método geométrico justapondo a figura para uma qualidade uniforme (ABGF) e outra de uma qualidade uniformemente disforme (ABC), cuja metade se atinja a mesma intensidade de qualidade da uniforme (E), e constatou que a área das duas figuras eram a mesma, conforme ilustração abaixo adaptada de sua obra.

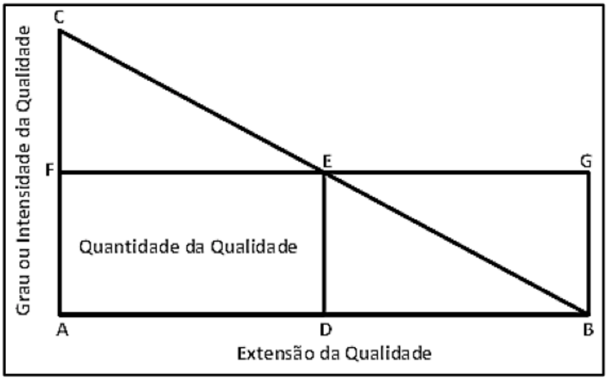


Figura 3: Demonstração geométrica da Regra de Merton feita por Oresme.
Fonte: Adaptado de Katz (2010).

No século XVI, os trabalhos do astrônomo, astrólogo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) e do físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano Galileu Galilei (1564-1642) envolvendo o estudo da variação por meio de leis matemáticas, uma associação entre grandezas que variam, dada por uma proporção geométrica, carregam em seu bojo a ideia de "variável", em outras palavras, o estudo do movimento como um problema central. Por outro lado, o surgimento da álgebra contribuiu para representação simbólica de uma variável, representação proposta inicialmente pelo matemático francês François Viète (1540-1603), aperfeiçoada no século XVII e definida formalmente depois.

O escocês John Napier (1550-1617) foi um matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo, mais conhecido como decodificador do logaritmo em decorrência dos trabalhos publicados em *Description de la merveilleuse règle des logarithmes* (1614), onde expôs a definição geral de logaritmos e a utilização das tabelas, e *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619), publicado dois anos após sua morte pelo seu filho Robert Napier, onde consta "números artificiais"no lugar de "logaritmos". Além disso, popularizou o uso do ponto decimal em conjunto com a vírgula decimal.

Originou o conceito de logaritmos como um dispositivo matemático para auxiliar nos cálculos, ou seja, por meio de um sistema computacional as raízes, os produtos e os quocientes podiam ser rapidamente determinados a partir de tabelas que mostravam potências de um número fixo usado como base. Para tanto, ele admite uma propriedade da qual é possível deduzir outras tantas, ou seja, "Os logaritmos de números proporcionais diferem de um mesmo valor" que, numa linguagem atual, "Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\log(a) - \log(b) = \log(c) - \log(d)$". Para aprofundamentos sugere-se a exposição apresentada por Roque e Carvalho (2012).

A imagem abaixo representa uma simplificação cinemática do modelo de Napier, que de certa forma agrega entes geométricos e mecânicos ao conceito de função, onde os pontos P e Q se movem ao longo de retas paralelas, partem com a mesma velocidade inicial e no mesmo momento, ou seja, para t = 0 tem-se P em A e Q em B. Para efeito de cálculo considere o comprimento AC igual a 10^7, que o ponto Q se mova a uma velocidade constante e que o ponto P se mova a uma velocidade proporcional à sua distância até o ponto C. Esse processo torna possível transformar uma sequência geométrica numa sequência aritmética, ou seja, para Napier, BQ corresponde ao logaritmo de PC.

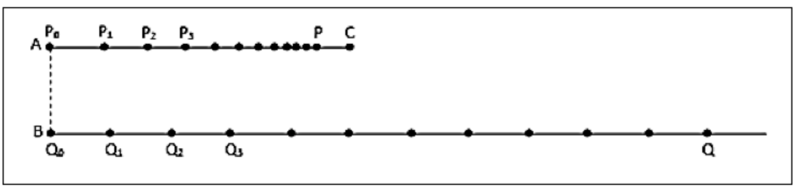


Figura 4: Simplificação do modelo mecânico de Napier.
Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho (2012)

A partir da definição de Napier tem-se que o comprimento do seguimento Q_0Q_1 corresponde ao logaritmo de P_1C; que o comprimento do seguimento Q_0Q_2 corresponde ao logaritmo de

P_2C, sucessivamente até concluirmos que o comprimento BQ corresponde ao logaritmo de PC.

Foi por meio do uso de logaritmos que Kepler foi capaz de reduzir suas observações e avançar, fato que corroborou para sustentação da teoria da gravitação newtoniana.

Avançando sob o ponto de vista das expressões analíticas, emergem os trabalhos de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) e a invenção da geometria analítica associada a ideia de representar um objeto geométrico, particularmente curvas, por meio de uma fórmula analítica. Assim, é introduzida uma nova maneira de pensar a relação entre duas grandezas variáveis na forma de uma equação entre as coordenadas x e y, ainda que Descartes distinga dois tipos de curvas, em geometria e em mecânica, respectivamente, a exemplo, as cônicas e a ciclóide. Essa mistura de álgebra e geometria, tendo como foco central as variáveis e a expressão que agrega essas variáveis, contribui com um grande número de exemplos de curvas para análise, entretanto, ainda faltava a identificação de variáveis dependentes e independentes numa equação.

Em meados do século XVII há uma ampliação do campo das funções estudadas a partir do desenvolvimento de funções por meio de séries. Contribuições importantes foram produzidas pelo matemático e geógrafo belga Gerardus Mercator (1512-1594). Reconhecido pela projeção de Mercator, projeção cilíndrica transversa secante, tipo de projeção muito utilizada em cartografia que possibilita a projeção do globo terrestre sobre uma carta plana. A respeito das séries, publicou pela primeira vez em 1668 a série Mercator, também conhecida por série Newton-Mercator, que é a série Taylor para o logaritmo natural, isto é, $\ln(x + 1) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$, para $-1 < x < 1$. Essa série, embora associada ao nome de Newton, foi uma descoberta independente de Mercator.

Outras contribuições surgem nos trabalhos do matemático e astrônomo escocês James Gregory (1638-1675), com avanços na trigonometria e representações de séries infinitas para várias funções trigonométricas. Publicou *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* (1667), no qual aproximava as áreas do círculo e da hipérbole com séries convergentes. Este livro também contém expansões em série de sen(x), cos(x), arcsin(x) e arccos(x), e mais, numa tradução livre[3] "Dizemos que uma quantidade é composta de quantidades quando, por adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raízes dessas quantidades ou por qualquer operação imaginável, obtemos a outra quantidade".

Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ao introduzirem o cálculo infinitesimal colocam a variação funcional no centro de estudos das propriedades das curvas. O primeiro propõe em *La méthode des fluxions et des suites infinies*, concluído em 1671 e publicado em 1736, uma representação cinemática e considera as quantidades produzidas por um aumento contínuo na trajetória que descreve um corpo em movimento no espaço, fato que pode ser interpretado como uma aproximação entre os conceitos de variação, cálculo fluxional – método que descreve as variações em termos de grandezas fluentes – e funções. O segundo, interessado pelo estudo de curvas e o problema de tangentes, apresenta em *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione* (1694), relações de dependência de quantidades geométricas na forma de curva, tais como subtangentes e subnormais.

A publicação de *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (1696) de Guillaume François Antoine (1661 - 1704), o Marquês de l'Hôpital, é o primeiro livro publicado

3 *Nous disons qu'une quantité est composée à partir de quantités, lorsque, par addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines de ces quantités, ou par n'importe quelle opération imaginable, on obtient l'autre quantité.*

sobre o cálculo infinitesimal de Leibniz, livro que contribuiu para propagação das palavras "constante", "variável", "parâmetro" e "coordenada" introduzidas por Leibniz.

O desenvolvimento dos estudos de curvas por métodos algébricos torna necessário designar um termo para representar quantidades que eram dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica. Nesse desenrolar, numa correspondência trocada por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748) entre 1694 e 1698, emerge a palavra "função" para atender tal finalidade.

Em 1718, Johann Bernoulli publicou um artigo onde apresenta pela primeira vez a definição explicita de uma função[4] como expressão analítica, a saber, "Chamamos a função de uma quantidade variável de uma quantidade composta de qualquer maneira, dessa quantidade variável e de constantes". Nesse artigo, Bernoulli propõe o uso da letra ϑ para denotar uma função ϑx, sem o parêntesis. A notação proposta por Euler em 1740 se encontra no formato $f(x/a + c)$, equivalente a $f(x)$. Além disso, ele denomina de "funções contínuas" aquelas definidas por uma única expressão analítica e de "funções mistas" aquelas que requerem expressões analíticas diferentes.

Finalmente, em 1748, Leonhard Euler em *Introductio in Analysis Infinitorum* publica sua definição para função. Na tradução francesa, *Intoduction à L'Analyse Infinitésimale*, essa definição encontra-se no Volume I, Capítulo I, Recursos em geral[5], página 2: "Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo, pela mesma quantidade e números, ou com quantidades constantes"[6].

---

4 *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*

5 *Des Fonctions em général.*

6 *Une fonction de quantité variable est une expression. analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité e de nombres, ou de quantités constantes*

Neste percurso para a constituição do conceito de função observa-se que a notação algébrica, oriunda da criação de uma álgebra simbólica, permitiu condensar certa quantidade de informações com simplicidade e rigor e proporcionar manipulações de expressões analíticas; que o estudo das curvas ocasionou uma gama de métodos para resolver problemas de tangencia, áreas sob curvas, comprimento de curvas e velocidade de pontos se movendo ao longo de curvas e contribuíram à representação geométrica e que as conexões com os problemas relacionados aos fenômenos naturais sugeriram uma visão dinâmica e contínua da relação funcional, contrapondo a visão estática e discreta e da combinação entre álgebra e geometria são introduzidos os conceitos de variáveis e relação entre variáveis, estágio final para a introdução formal do conceito de função por Bernoulli em 1718, aperfeiçoada por Euler em 1748.

O Conceito de Função a partir do *Introductio in Analysis Infinitorum*

As definições apresentadas agora figuram no *Intoduction à L'Analyse Infinitésimale* (1796), tradução francesa do *Introductio in Analysis Infinitorum* (1748). O primeiro volume é composto por dezoito capítulos – inicia com o capítulo intitulado *Des Fonctions em general*[7], perpassa pelos estudos de séries e termina no capítulo denominado *Des Fractions continues*[8], seguidas de notas e esclarecimentos do tradutor francês. As discussões relacionadas as funções ficaram no âmbito do primeiro volume, assim como, a presença de outras definições reformuladas por de Euler.

7 Funções em geral.

8 Frações contínuas.

No prefácio do primeiro volume Euler nos apresenta sua opinião sobre a obra, coloca o conceito funcional desempenhando um papel central na análise matemática, classifica funções de acordo com a forma de sua expressão analítica, rompe com a geometrização da análise matemática e dá início ao que atualmente consideramos como Análise Matemática Moderna.

A primeira definição retrata o que é um valor constante, isto é, "*Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur*"[9]. Esclarece em seguida que para representar esses valores devem ser utilizadas letras minúsculas do alfabeto, observado que para valores conhecidos serão utilizadas as primeiras letras, enquanto que, para valores que não são, as últimas letras. Ressalta ainda que a utilização das letras do alfabeto não é tão importante em geometria devido ao aspecto em que são consideradas. Observa-se que para além do cuidado com a definição, procura deixar claro o uso da simbologia a ser empregada. Quando uma "quantidade variável"[10] é uma quantidade indeterminada, apresenta "*Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées*".

Na sequência, informa quando uma "quantidade variável"[11] está determinada, isto é, "*Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque*". Estes dois últimos fatos nos chamam atenção, visto que essas definições precedem a definição de função, o que na análise moderna ocorre em processo inverso.

Em sua definição de função, Euler mais uma vez segue seu professor, Johann Bernoulli, mudando, entretanto, a palavra

---

9 Definição 1: Uma quantidade constante é uma quantidade fixa, que sempre mantém o mesmo valor.

10 Definição 2: Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada ou, se preferir, uma quantidade universal, que inclui todos os valores especificados.

11 Uma quantidade variável é determinada quando lhe é atribuído qualquer valor determinado.

“quantidade” por “expressão analítica”, isto é, “*Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes*”[12].

O que interessa aqui é saber o que Euler considerava como uma “expressão analítica”, uma vez que não a define. Por outro lado, nos fornece uma classificação de funções de acordo a forma da sua “expressão analítica”, cujo texto foi sintetizado por meio da figura a seguir.

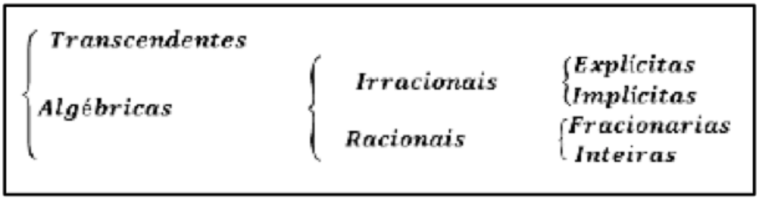


Figura 5: Classificação das funções segundo Euler.
Fonte: Adaptado de Euler (1796)

Euler, enumerando operações por meio das quais expressões analíticas podem ser compostas, inicia com operações algébricas e várias transcendentes, chegando às funções exponencial e logarítmica, além de diversas outras funções oriundas pelo cálculo integral.

Embora a grande maioria das funções usadas em matemática no tempo de Euler fosse analítica no sentido moderno do termo, nem sempre é possível determinar a natureza algébrica ou transcendente de uma função pela simples análise da sua expressão analítica. A função definida por $f(x) = \lim (x^{n+1} + e^x + 1 - e)/(x^n + 1)$, para $x \geq 0$, quando n tende ao infinito tem-se: a) $f(x) = e^x + 1 - e$, se $0 \leq x < 1$; b) $f(1) = 1$ e c) $f(x) = x$, se $x > 1$.

12 Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira, com a mesma quantidade e números, ou com quantidades constantes.

Retomando, “funções contínuas” são aquelas definidas por uma única “expressão analítica” e que “funções mistas” são aquelas que requerem “expressões analíticas diferentes”. Assim, a primeira das ideias a ser criticada nesse contexto foi exatamente a de haver isolado a classe das “funções mistas”, entretanto, o matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) apresentou em 1844 a função definida pelas expressões $f(x) = x$, se $x \geq 0$ e $f(x) = -x$, $x < 0$, que é mista, mas também é contínua, para contrapor o fato de que Euler havia considerado “descontinua”. Esse contraexemplo pode ser representado simplificadamente pela expressão $f(x) = (x^2)^{1/2}$, cujo gráfico (Figura 6) elucida essa afirmação.

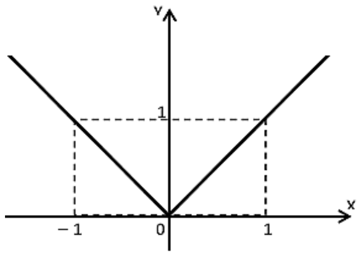


Figura 6. Contraexemplo de função “descontinua” no sentido de Euler
Fonte: La Penha (1986)

Adiante, vendo a impossibilidade de enumerar todos os métodos de expressar funções analiticamente, propõe convenientemente que uma expressão analítica para uma função pode ser obtida por meio de série de potências do tipo $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$, embora não tenha apresentado nenhuma demonstração para tal afirmação.

De acordo com La Penha (1986), no segundo volume do *Introductio in Analysis Infinitorum*, Euler reconhece explicitamente que outras funções existiam quando afirma que “Assim como algumas linhas curvas correspondem a qualquer função de x, também linhas curvas são representadas por funções de x ...

De uma tal ideia acerca de linhas curvas decorre de imediato sua divisão em contínuas e descontínuas ou mistas."[13]

Cerca de vinte e sete anos depois do *Introductio in Analysis Infinitorum*, em 1755, em seu *Institutiones calculi differentialis*, Euler, citado por La Penha (1986), reformula sua definição de função procurando explicita-la de uma forma tão universal quanto abstrata possível e apresenta:

> Se algumas quantidades dependem de tal forma de outras quantidades que, se as últimas variam as primeiras também o fazem, então as primeiras quantidades são chamadas funções das últimas. Esta denominação é da mais ampla natureza e compreende cada método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, *x* representa uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de *x* de um modo qualquer ou são Poe [por] ele determinadas, são chamadas funções dele (sic). (LA PENHA, 1986)

Para finalizar essas discussões em torno do conceito de função, tomo o exemplo apresentado em 1829 pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Dirichlet apresenta uma função que não é representada por uma expressão analítica ou por várias delas, tão pouco sua representação gráfica pode ser desenhada a mão livre e que é descontinua em todos os pontos do seu domínio no sentido moderno e, não no sentido de Euler, a saber: $f(x) = \begin{cases} c, \text{ se } x \text{ é racional} \\ d, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$, onde c e d são constantes arbitrárias distintas.

---

13 *De même que certaines lignes courbes correspondent à une fonction quelconque de x, les lignes courbes sont représentées par des fonctions de x. ... De cette idée sur les lignes courbes suit immédiatement sa division en continu et discontinu ou mixte.*

A partir de uma análise preliminar, restrita ao *Introductio in Analysis Infinitorum*, é possível que se afirme que Euler utilizou uma definição de função que cobre, essencialmente, tão somente funções algébricas, entretanto, foi mostrado que seus trabalhos posteriores revelam que Euler não só observou tal inadequação inicial, mas também introduziu a definição de função que muito se aproxima da definição hoje utilizada.

As definições originais que se seguiram as de Euler e depois a de Dirichlet, cada uma com sua porção de aprimoramento, generalização ou simples formalização, serão listadas cronologicamente, analisadas e comparadas num trabalho futuro.

Funções são excelentes para estudar problemas de variação, como uma determinada quantidade pode variar no tempo, pode variar no espaço, pode variar com outras quantidades e pode até variar simultaneamente em várias dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, ou pode até desaparecer em algum momento. Pode seguir padrões simples ou complexos e obedecer a restrições muito diversas. (PONTE, 1992)

Elegemos o conceito de função por sua centralidade e importância na formação do pensamento matemático, sobretudo pelas possibilidades de explorar um campo fértil de construção da linguagem matemática associada a linguagem materna.

No fundo não há como ignorar o conselho de Pierre-Simon Laplace (1749-1827) a um jovem geômetra "*Lisez. Euler, c' est notre Maire a tous*."

Referências

ALENCAR FILHO, Edgard. **Funções Aritméticas – Números Notáveis**. São Paulo: Nobel, 1988.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio Cézar. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

BAUMANN, Pierre *et all*. **Histoire des Mathématiques**. UFR de mathématique et d'informatique. Strasbourg: Université Louis Pasteur, 2005.

BOTTAZZINI, Umberto. **Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematicada Euler a Weierstrass**. Torino: Editore Boringhieri, 1981.

BRAGA, Ciro. **FUNÇÃO: a alma da matemática**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 2 de 22/12/2017, Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/CNE, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação (CNE). Câmara de Educação Superior (CES). Parecer CNE/CES 1.302/2001, Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: MEC/CNE/CES, 2001.

BRITO, Dirceu dos Santos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. O conceito de função em situações de modelagem. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 4a ed., 2002.

CHAQUIAM, Miguel; CABRAL, Natanael Freitas. **Funções: uso, desuso e reflexo sobre o ensino**. Belém: SINEPEM, 2019.

CORREIA, José Manuel Teixeira. **A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII**. 1999. 89f.

Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 1999.

CRUZ, Paulo Jakson Dias. **Interdisciplinaridade como prática para a construção do conceito de função**. 118 f. Dissertação (Mestrado Matemática em Rede Nacional) -Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2015.

EULER, Leonhard. **Introduction a L'Analyse Infitésimale**. Tradução J. B. Labey. v. 1. Paris, 1796.

EULER, Leonhard. **Introduction a L'Analyse Infitésimale**. Tradução J. B. Labey. v. 2. Paris, 1797.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Tradução e Revisão Jorge Nuno Silva. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KLEINER, Israel. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, September 1989, volume 20. n. 4, pp. 282–300.

LA PENHA, Guilherme Maurício Souza Marcos de. **A evolução do conceito de função**. Rio de Janeiro: EPUC-RJ, 1986.

LA PENHA, Guilherme Maurício Souza Marcos de. **Éloge de Euler**. Rio de Janeiro: Laboratório Computação Científica, 1983.

LA PENHA, Guilherme Maurício Souza Marcos de. A grandeza do desconhecido Euler. Revista Humanidades. V. 2. N. 5. Brasília: UnB, 1983.

LIMA, Elon lages et all. **A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1997. V. 1, 2 e 3.

LIRA, Alailson Silva de. **A evolução do conceito de função segundo Guilherme de La Penha**. 2013. 89p. Orientador Miguel Chaquiam. Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Sociais e Educação, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**. São Paulo: Cortez, 1996, 1999, 2011.

MACIEL, Paulo Roberto Castor. BOLEMA, Tereza Fachada Levy Cardoso. **A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem**. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367, dez. 2014.

PONTE, João Pedro. The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. **Mathematics Educator**. 1992. volume 3. n. 2. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/251211596_The_history_of_the_concept_of_function_and_some_educational_implications.

RIGHETTO, Armando & FERRAUDO, Antonio Sérgio. **Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: IBEC, 1981.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Stanford Encyclopedia of Philosophy. Nicole Oresme. Published and revised 2017. Acesso em 20/10/19: *https://plato.stanford.edu/entries/nicole-oresme/*

TRINDADE, Daniela Jéssica; NAGASHIMA, Lucila Akiko; ANDRADE, Cíntia Cristine. Obstáculos epistemológicos sob a perspectiva de Barchelard. Formação de professores: Contextos sentido e Práticas.**VI Seminário Internacional sobre Profissionalização Docente**. PUC/PR. Curitiba, 2017.

https://data.bnf.fr/fr/12112257/jean-baptiste_labey/

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Labey

https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/fu/node19.html

http://mathworld.wolfram.com/MercatorSeries.html

http://perso.numericable.fr/patrperrin/doc/crvo3ar3.pdf

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Fonctions.pdf

https://www.britannica.com/biography/James-Gregory

7

ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL O "GRANVILLE"

Manoel de Campos Almeida

O objetivo deste capítulo é investigar o porquê de um livro texto de Cálculo Diferencial e Integral, carinhosamente lembrado como "o Granville", escrito há 115 anos atrás, compulsado por gerações de matemáticos, físicos e engenheiros, com inúmeras edições publicadas, ainda manter o seu ofuscante brilho pedagógico e sua originalidade em termos didáticos. Evidentemente, evoluções nas apresentações de conceitos matemáticos ocorreram ao longo desse extenso trajeto, esmiuçaremos apenas algumas, por limitações de espaço e tempo, pois é impossível abranger todo o Cálculo neste texto.

Os Autores

Inicialmente, nos debruçaremos rapidamente sobre quem foram os seus autores. William Anthony Granville nasceu em 16 de dezembro de 1863, iniciou sua carreira no Bethany College

(West Virginia), onde lecionou matemática e foi tesoureiro do colégio. Em 1893 a Universidade de Yale conferiu-lhe o grau de bacharel. Posteriormente, em 1897, Yale lhe concedeu um Ph.D. em matemática, com a tese *Referat on the Origin and Development of the Addition-Theorem in Elliptic Functions*, orientada por James Pierpont (1866-1938).

Pierpont influenciou a pedagogia de Granville, pois sublinhava que o aspecto didático da apresentação de temas em um livro texto não deveria se aprofundar em extensas e aborrecidas, muitas vezes desnecessárias, explicações teóricas, mas sim de uma maneira conveniente a ser apresentada em sala de aula, Isso se pode depreender do que Pierpont escreveu no prefácio do segundo volume de seu *Theory of Functions of Real Variables* (1912)

> O presente volume foi escrito no mesmo espírito que animou o primeiro. O autor não intencionou escrever um tratado ou um manual; ele tentou antes reproduzir suas aulas universitárias com as modificações necessárias, esperando que a liberdade na escolha dos sujeitos e na maneira da apresentação que é permitida em uma aula possa ser auxiliadora e estimulante para uma audiência maior (Citado por O'CONNOR; ROBERTSON, 2010. Tradução do autor.)

Pierpont acrescentou no prefácio de seu próximo livro *Functions of a Complex Variable* (1914):

> O presente volume se originou das aulas sobre a Teoria das Funções de Variável Complexa, que o autor tem estado acostumado dar a estudantes juniores, seniores e graduados, que não têm a intenção de se especializarem em matemática; muitos tópicos os quais poderiam propriamente encontrar um lugar em um primeiro curso nessa teoria das funções

> não foram tratados, por exemplo as superfícies de Riemann (Citado por O'CONNOR; ROBERTSON, 2010. Tradução do autor.)

Dessa maneira, diferenciava claramente sobre o que pensava ser um tratado exaustivo, logicamente perfeito, minuciosamente detalhado, e um livro texto a ser empregado em sala de aula. Essas concepções influenciaram Granville, que depois de ter sua tese por Pierpont orientada foi também seu colega em Yale, pois ali lecionou de 1895 a 1910.

Em 1910 Granville foi eleito por unanimidade presidente do Gettysburg College, uma faculdade privada de artes liberais em Gettysburg, Pensilvânia, Estados Unidos. Fundado em 1832, seu campus fica ao lado do Campo de Batalha de Gettysburg. Serviu como seu presidente até 1923, e por diversos anos ele também ocupou o posto de presidente da Federação Americana da Irmandade Luterana. Morreu vítima de um enfarto de miocárdio em 4 de fevereiro de 1943, com 79 anos, deixando sua viúva, duas filhas e uma neta.

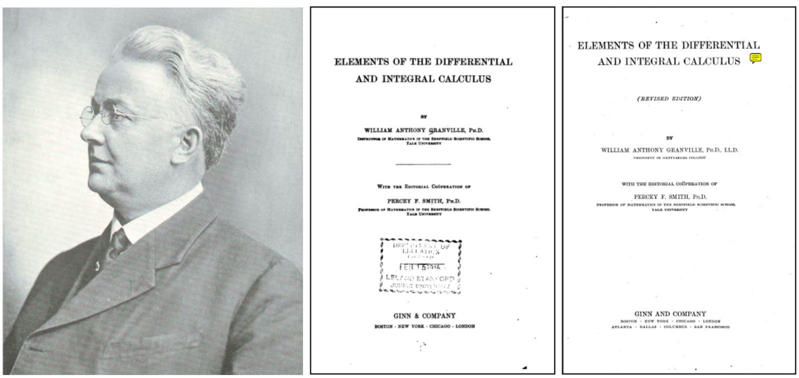


Figura 1. William Anthony Granville. Página de apresentação dos *Elementos*, 1904 e da edição revista de 1911.
Fonte: https://www.gettysburg.edu/about-the-college/college-history/college- (foto); GRANVILLE (1904) e Granville (1911).

A primeira edição do seu *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral* (ver Figura 1) data de 1904, já no seu prefácio, Granville expõe claramente o seu objetivo com essa obra:

> O presente volume é o resultado de um esforço para escrever um livro texto moderno sobre Cálculo, que será essencialmente um livro de exercícios. Com esse fim em mente, o princípio pedagógico, que cada resultado deveria ser tanto intuitivo como analiticamente evidente ao estudante, foi constantemente mantido na mente. Realmente foi melhor pensar que, em alguns casos, como, por exemplo, em Máximos e Mínimos e no Teorema do Valor Médio, deve-se discutir primeiro a questão do lado intuitivo, de modo que a significância da nova ideia possa ser clara da maneira mais direta. O objetivo não foi ensinar o estudante a depender unicamente da sua intuição, mas, em alguns casos, usar essa faculdade antes da investigação analítica. [...] Como traços especiais, deve-se prestar atenção ao esforço de se fazer perfeitamente claro a natureza e a extensão de cada teorema novo, o grande número de exercícios cuidadosamente graduados, e sumarização de regras práticas dos métodos de resolução dos problemas (GRANVILLE, 1904, fls. III-I. Tradução do autor.)

Figura Percey Franklin Smith (1867-1956) como co-autor, embora conste na primeira página como: "With the Editorial Cooperation of Percey F. Smith, Ph.D., Professor of Mathematics in the Sheffield Scientific School – Yale University". Smith nasceu em Nyack, Nova Iorque, estudou matemática no Sheffield Scientific School, terminando o curso regular em 1888 e recebendo o grau de Doutor em Filosofia em 1891. Foi instrutor de matemática em Yale de 1888 a 1894, quando então seguiu para Europa, onde estudou nas universidades de Paris, Berlim e Göttingen. Depois de retornar a Yale, atuou como professor assistente de matemática de 1896 a 1900 e se tornou professor (full) lecionando ali até 1936. O título "Percey F. Smith Professor of Mathematics" ainda hoje é usado em Yale. Smith escreveu vários livros, entre os quais: *Elements of Analityc Geometry, Introduction to Analityc Geometry e Theoretical Mechanics.*

Granville, no prefácio da edição revista (1911), reafirma os princípios que admitira na primeira, acrescentando: "O autor tentou escrever um livro texto que é inteiramente moderno e ensinável, e a capacidade e as necessidades do estudante que persegue um primeiro curso em Cálculo foi mantida constantemente em mente" (GRANVILLE, 1911, fl. III). Adicionou problemas práticos simples, para ilustrar a teoria e ao mesmo tempo de interesse dos estudantes, mas que não requeressem conhecimentos particulares em qualquer ramo da ciência.

Notável é sua observação que um bom livro texto de Cálculo deve ser *ensinável,* isto é, adequado à sala de aula, ao currículo e ao programa da disciplina, moderno e, principalmente, que atenda às necessidades e capacidades dos alunos.

William Raymond Longley (1880-1965), também professor de matemática em Yale, somente passou a figurar como co-autor em edições posteriores.

As primeiras edições foram publicadas pela Ginn & Company, fundada por Edwinn Ginn (1838-1914). Essa editora, especializada em livros escolares, foi fundada em 1868, sendo mais tarde, em 1885, renomeada como Ginn & Heath. Posteriormente foi adquirida pela Raytheon e, finamente, pela Houghton Miffin.

O "Granville" foi traduzido para o francês por A.A.M. Salin e publicado em 1939 pela Livraria Vuibert. Esta edição penetrou no Brasil tendo sido indicado para os Cursos de Matemática, Engenharia e Física por várias décadas, como livro introdutório com uma boa coleção de problemas.

O conteúdo da edição de 1911 é extenso, cobrindo praticamente tudo o necessário em um curso de cálculo diferencial e integral. O seus capítulos continham: I-Coleção de Fórmulas; II-Números; III-Variáveis e Funções; IV-Teoria dos Limites; V- Diferenciação; VI-Regras para Diferenciar Formas Standards Elementares; VII-Aplicações Simples das Derivadas; VIII-Derivação Sucessiva; IX-Máximos e Mínimos; X-Pontos de Inflexão; XI-Diferencial; XII-Taxas [de Variação]; XIII-Mudança de Variável; XIV-Raio de Curvatura; XV-Teorema do Valor Médio. Formas Indeterminadas; XVI-Círculo de Curvatura. Centro de Gravidade; XVII- Diferenciação Parcial; XVIII-Envelopes; XIX- Séries; XX-Expansão de Funções; XXI-Assíntotas. Pontos Singulares. Traçado de Curvas; XXII-Aplicações à Geometria Espacial; XXIII-Curvas Para Referência; XXIV-Integração. Regras Para Integrar Formas Standards Elementares; XXV-Constantes de Integração; XXVI-Integração de Frações Racionais; XXVII-Integração Por Substituição de uma Nova Variável; Racionalização; XXVIII-Integração por Partes. Fórmulas de Redução; XXIX-A Integral Definida; XXX-Integração Como um Processo de Soma; XXXI-Integração Sucessiva e Parcial; XXXII-Equações Diferenciais Ordinárias; XXXIII- Integraph (sic). Tabelas de Integrais. Como se pode constatar, seu conteúdo abrangia o que no presente costuma-se denominar de Cálculo I e Cálculo II, e é distribuído em dois volumes.

A edição revista de 1911, que já conta com a colaboração de Smith, rearruma alguns capítulos, reescreve teoremas com vista a maior clareza, acrescenta exercícios e estabelece regras resumidas dos métodos para a solução dos problemas. Nessas regras é que se percebe a colaboração de Smith, com vista a aperfeiçoar a didática da obra. A edição em português, traduzida por Abdelhay, acrescenta um capítulo sobre funções hiperbólicas.

Em português notabilizou-se a tradução feita a partir do inglês por J. Abdelhay, em 1954. Jose Abdelhay (1917-1996) foi eminente matemático brasileiro, lecionou por anos na Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro, fundada em 1939, onde iniciou sua carreira como docente em 1940, e contribuiu com vários trabalhos sobre matemática.

A ideia de escrever um livro texto de Cálculo, como "essencialmente um livro de exercícios", nas próprias palavras de Granville (1904, fls. III-IV), foi incorporada por vários autores posteriores. Notável exemplo disso são os livros da denominada "Coleção Schaum". Essa série de livros foi originalmente desenvolvida na década de 1930 por Daniel Schaum (1913-2008), filho de emigrantes do leste europeu. Originalmente foi projetada para estudantes de graduação, como suplemento aos livros textos padrões; cada capítulo principia com uma curta explanação de tópicos relevantes, não incluindo demonstrações, seguida por um conjunto de exercícios adicionais inteiramente resolvidos, para ilustrar as técnicas mais comuns de solução de problemas, terminado com um conjunto de problemas com respostas apenas indicadas. McGraw-Hill comprou a Schaum Publishing Company em 1967.

Embora tenha sido projetada como material suplementar, alguns dos seus livros têm sido usados como textos principais para alguns cursos. Contudo, a parte teórica dos livros dessa coleção é muito mais resumida e inferior ao padrão que Granville concebeu. Apesar disso, muitos dos seus títulos foram escritos por autores conceituados, como Murray R. Spiegel e Seymour Lipschutz, e são obras de valor, desde que empregadas conscientemente dentro das suas limitações.

O livro de Cálculo Diferencial e Integral dessa coleção, para selecionarmos apenas um exemplo, foi escrito originalmente por Frank Ayres Jr, (1901-1994). Ele ensinou entre 1921 e 1924 no Ogden College, depois por mais quatro anos na Texas A&M University, antes de vir para o Dickson College em 1928 onde, desde 1938 até sua aposentadoria em 1958, atuou como chefe do departamento de matemática (STEINHAUS, 2018, p. 150). Os livros dessa coleção são constantemente atualizados, por co-autores convocados, como, por exemplo, Elliott Mendelson, professor da Universidade de Queens, para o livro de Cálculo.

Leibniz empregou o termo *"Cálculo"* no título de um manuscrito *Elementa Calculi Novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, allisque communem calculum transcendentibus* [Os Elementos de um Novo Cálculo de diferenças e somas, tangentes e quadraturas, máximos e mínimos, medições de linhas, superfícies, sólidos e outras coisas as quais transcendem o cálculo comum]. O manuscrito não está datado, mas parece ter sido completado antes de 1680. Esse novo "Cálculo de diferenças e somas" é a origem do "Cálculo diferencial e integral".

Já em 1904 incluía Granville em seu livro um capítulo inicial, com fórmulas de álgebra, trigonometria e geometria analítica, para revisão de estudantes que delas necessitassem lembrar. Esse procedimento é acompanhado até hoje em muitos livros de matemática, por sua reconhecida utilidade didática.

Limites

Como, já frisamos, é impossível neste texto apresentar todo o conteúdo do Cálculo, pinçaremos apenas alguns tópicos, comparando-os com autores contemporâneos. Iniciaremos com a teoria dos limites, apresentada no Capítulo IV da edição de 1904.

O conceito moderno de limite foi desenvolvido por Augustin-Lois Cauchy (1789-1857). Afortunadamente no seu tempo a álgebra das desigualdades estava bem evoluída, principalmente pelo trabalho desenvolvido no século XVIII sobre estimativas de erros nas aproximações das soluções de equações algébricas, pois essas só podem ser resolvidas exatamente até o quarto grau. Cauchy soube aproveitar os métodos de aproximações então existentes, pois tais métodos podem ser empregados como uma forma de construir uma quantidade, e desse modo podem ser utilizados para provar sua existência. O conceito de limite então podia ser expresso em termos de desigualdades (dado um épsilon encontrar um delta ...), evitando-se assim recorrer a conceitos então discutíveis, como infinitésimos e infinitos. Na primeira lição de sua obra *Résumé des Leçons Donnés a l'Ecole Polytechnique sur le Calculo Infinitesimal* (1823), Cauchy expõe:

> Primeira Lição: Variáveis, seus limites, e quantidades infinitamente pequenas
>
> Chamamos de *variável* ao que se considera como recebendo sucessivamente vários valores diferentes. Quando os valores atribuídos a uma mesma variável [x_n] aproximam-se de um valor fixo [L] indefinidamente, de tal maneira que terminam [$n \geq N$, para algum N] diferindo [$|x_n - L|$] dele de um valor tão pequeno como se queira [$< \varepsilon$], este último valor é chamado de *limite* de todos os outros. (Citado por GRABINER, 1981, p.80 e ss. Tradução do autor.)

Weierstrass atacou o apelo à intuição que estava implícito na noção de movimento contínuo empregada por Cauchy quando falava que uma *variável se aproxima* (modernamente falamos *tende*) para um limite. Interpretou uma variável x como simplesmente uma letra designando qualquer um elemento de uma coleção de valores numéricos, eliminando assim o aspecto cinemático da colocação de Cauchy. Refraseou a definição de limite de Cauchy (Citado por Grabiner, 1981, p.77 e ss. Tradução do autor.) evitando esse aspecto: "O *número* L é o limite da função $f(x)$ para $x = x_0$ se, dado um *número* ε arbitrariamente pequeno, outro *número* δ pode ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ, o valor de $f(x)$ irá diferir do de L por menos que ε". Essa é essencialmente a definição moderna de limite.

Granville certam ente conhecia os trabalhos de Cauchy e Weierstrass, contudo sua introdução de limites é ingênua e intuitiva, não recorrendo a desigualdades, tanto que principia a apresentação do tema com: "Nas aplicações, o que acontece é isto":

> Temos uma variável v e uma dada função z de v. A variável independente v toma valores tendendo a l e temos que examinar os valores da variável dependente z, em particular, determinar se z tende a um limite. Se existe uma constante a tal que lim z = a, então se escreve
>
> $$\lim_{v \to l} z = a,$$
>
> Que se lê "limite de z, quando v tende a l, é igual a a".(GRANVILLE; SMITH; LONGLEY, 1961, p. 14.)

Mais tarde, ensina como levantar indeterminações nos cálculos de limites (Cap. XI, ed. 1961). Já em textos modernos, a introdução do conceito de limite envolve módulos, desigualdades e número reais, como, por exemplo:

> Seja f uma função definida em todo o número de algum intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. *O limite de f(x) quando x se aproxima de a é* L, que pode ser escrito $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para qualquer ε, mesmo pequeno, existir um δ, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ (LEITHOLD, 1981, p. 64.)

Exceto por pequenas variações no fraseado, essa é a maneira em que os limites são introduzidos nos textos modernos. Contudo, cabe aqui um reparo, já notado por Weierstrass. É o emprego da expressão "*se aproxima*", o que envolve um caráter cinemático, físico, que não deve ser aceito na definição de um ente puramente matemático. Para evitar isso, devemos empregar somente desigualdades, módulos e números reais, o que, em um nível introdutório, é difícil de compreensão para o aluno, portanto não didático.

A principal contribuição de Weierstrass para a rigorização do cálculo foi eliminar a então "cinemática" descrição de limites, que envolviam conotações com movimento contínuo ("tende, se aproxima," *etc*.). Ele as substituiu por uma formulação "estática", envolvendo apenas números reais (ε, δ) sem apelo a movimento ou geometria.

O tratamento de limites no Granville é singelo, envolve uns poucos teoremas e exercícios simples; em seguida trata rapidamente de infinitésimos, tema que desapareceu dos textos modernos, embora recentemente a análise não standard de Abraham Robinson tenha conseguido abordar o conceito de infinitesimal de maneira rigorosa, reabilitando-o. Trata mais profundamente das derivadas, pelo seu uso mais prático na vida diária, enquanto os limites fornecem, na maioria dos casos, no seu modo de ver, apenas uma fundamentação teórica.

Derivadas

A introdução do conceito de derivada no Granville é basicamente semelhante à dos livros atuais, entretanto, é onde ilustra a sua capacidade didática, introduzindo a "regra geral de derivação", onde destrincha o algoritmo do cálculo de derivadas em quatro passos distintos:

> Primeiro Passo: substitui-se x por $x + \Delta x$ e calcula-se o novo valor da função, $y + \Delta y$.

> Segundo Passo: subtrai-se o dado valor da função do novo valor, achando-se, assim, Δy. $[\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)]$
>
> Terceiro Passo: divide-se Δy (acréscimo da função) por Δx (acréscimo da variável independente). $\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$
>
> Quarto Passo: acha-se o limite do quociente quando Δx (acréscimo da variável independente) tende a zero. Este limite é a derivada. $\left[\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$ (GRANVILLE, 1961, p. 28).

O cálculo da derivada de uma função é explicado em palavras simples, facilmente inteligíveis, de um modo muito mais didático do que simplesmente apresentar a fórmula definidora da derivada. Emprega então essa "regra geral" para deduzir todas as regras de derivação. No domínio das *técnicas* de derivação e integração o Granville é, ainda hoje, praticamente imbatível.

Ao longo do capítulo selecionaremos alguns textos modernos de cálculo, dos quais analisaremos apenas alguns tópicos, com o objetivo único de comparar a didática das apresentações. Contudo, cabe um *caveat,* não é possível fazer a avaliação da obra completa de um autor apenas extraindo-lhe um pequeno trecho, pois alguns autores podem ter uma excelente apresentação didática em um tópico, e apenas uma sofrível em outro, e outros vice-versa.

Máximos e Mínimos

Um dos mais úteis tópicos do cálculo diferencial é a determinação dos máximos e mínimos de uma função de uma variável, pois ele encontra aplicação em um sem número de problemas da vida prática cotidiana. Por isso, é interessante cotejarmos como o Granville e alguns autores modernos aconselham os alunos a como proceder na solução desses problemas, comparando a didática dos seus ensinamentos. Principiaremos com o Granville (1961, p. 69):

> Valores máximo e mínimo. Problemas de aplicações.
>
> a. Na relação que envolve as grandezas do problema, pomos em destaque a função cujos valores máximo ou mínimo são procurados;
> b. Se a relação contém mais de uma variável, procuramos exprimir em função de uma única delas todas as demais usando para isso as condições dadas pelo problema;
> c. Aplicamos para a função obtida, de uma só variável, a regra para achar os valores máximo e mínimo, notando que nos problemas práticos é usualmente fácil dizer qual dos valores críticos dá um máximo e qual dá um mínimo, de modo que não é sempre necessário aplicar o terceiro passo.
>
>   [3º passo: considerando um valor critico de cada vez, examinar a derivada, primeiro para valores da variável ligeiramente menores que o valor crítico e depois para os ligeiramente maiores. Se o sinal da derivada é + para os ligeiramente menores e – para os ligeiramente maiores, então a função tem um máximo para o valor crítico em exame; se é o contrário que se dá, a função tem um mínimo. Se o sinal não muda, a função não tem máximo nem mínimo]
> d. Traçamos o gráfico da função para controle.
> e. Os valores máximo e mínimo de uma função contínua ocorrem alternadamente.

Passaremos para o texto do Swokowski (1983, p. 178):

> Orientação para a resolução de problemas aplicados que envolvem extremos
>
> 1. Ler o problema cuidadosamente, várias vezes, meditando sobre os fatos e as quantidades incógnitas que devem ser determinadas.
> 2. Se possível, esboçar um diagrama, rotulando-o convenientemente, introduzindo variáveis para representar a incógnitas. Expressões, tais como "o que', "determine", "quanto", "quão longe" ou "quando" devem alertar o leitor para as quantidades incógnitas.
> 3. Fazer uma lista dos fatos conhecidos juntamente com quaisquer relações que envolvam as variáveis. Uma relação em geral pode ser descrita por uma equação de algum tipo.
> 4. Após analisar a lista em 3, determinar a variável que deve ser extremada, e exprimir essa variável em função de uma das outras variáveis.
> 5. Determinar os valores críticos da função obtida em 4 e testá-los quanto a máximos e mínimos,
> 6. Verificar se ocorrem máximos ou mínimos nos pontos extremos do intervalo de domínio da função obtida em 4.
> 7. Não se desencorajar se não conseguir resolver determinado problema. A proficiência na resolução de problemas aplicados exige considerável esforço e prática. Continuar tentando!

Vejamos agora outro texto moderno, o do Larson *et al*. (2006, p. 217):

> Procedimentos para Resolver Problemas Aplicados de Mínimo e de Máximo
>
> 1. Identifique todas as quantidades dadas e as quantidades a serem determinadas. Se possível, faça um esboço.
> 2. Escreva a equação primária para a quantidade a ser maximizada ou minimizada. [...]
> 3. Reduza a equação primária a uma única variável independente. Isto pode envolver o uso de equações secundárias que relacionam as variáveis independentes da equação primária.
> 4. Determine o domínio possível da equação primária, ou seja, determine os valores para os quais o problema tem sentido.
> 5. Determine o valor máximo ou mínimo desejado através das técnicas de cálculo discutidas nas seções [...].

É interessante notar que o Granville, em sua obra, não menciona o “domínio” (de uma função). Isso porque esse conceito, sob a denominação de “domínio”, somente começou a se popularizar em torno da virada do século XIX para o XX, surgindo apenas na *Encyclopaedia Britannica* de 1902 e no *Webster's New International Dictionary, Unabridged* de 1909, no sentido como hoje é conhecido. Portanto, na preparação da sua primeira edição esse conceito sob essa denominação ainda não estava consolidado, sendo essa a razão de sua não inclusão.

O Granville foi um dos primeiros autores de textos de cálculo a introduzir instruções simples destinadas a orientar os leitores na resolução de problemas. Esse foi um dos motivos do sucesso de sua obra, pois eram enunciadas em palavras simples, distribuídas em passos que orientam a sequência da resolução. Swokowski (1983) segue na mesma trilha do Granville, acrescentado conselhos sobre como ler um enunciado e frases de encorajamento, o que é interessante, pois atuam não somente sobre o conteúdo do cálculo, mas também sobre aspectos psicológicos do aprendizado. J*á Larson et al*. introduz termos como "equação primária/secundária", cujo uso não é habitual, embora compreensível.

Integral

O termo *"Integral"* primeiro apareceu impresso por Jacob Bernoulli (1654-1705) em Maio de 1690 na *Acta eruditorum,* p. 218. Ele escreveu *"Ergo et horum Integralia aequantur"*.

Vejamos agora como Granville introduz o conceito de integral indefinida. Sua explicação é clara, simples e eficiente:

> No cálculo diferencial aprendemos como calcular a derivada $f'(x)$ de uma dada função $f(x)$, uma operação indicada por: $\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$, ou, se usarmos diferenciais, por $df(x)=f'(x)dx$. Os problemas do cálculo integral dependem da *operação inversa*, precisamente: Ache uma função $f(x)$ cuja derivada $f'(x) = \phi(x)$. Ou, já que é usual usar diferenciais no cálculo integral, podemos escrever: $df(x) = f'(x)dx = \phi(x)dx$ e por o problema como segue: Dada a diferencial de uma função, achar a função. A função assim achada chama-se *integral* da dada função, o processo de acha-la chama-se *integração* e a operação de integração é indicada pelo *sinal de integração* $\int$ posto antes da dada expressão diferencial, assim: $[\int \phi(x)dx] = \int f'(x)dx = f(x)$, lê-se *integral de $f'(x)dx$ igual a*

> $f(x)$. A diferencial dx indica que x é a variável de integração. (GRANVILLE, 1961, p. 230).

Para comparação, vejamos agora como esse conceito é introduzido em alguns textos modernos. O texto do Leithold (1981, p. 207), tentando ser original, introduz o conceito de *antiderivada* da seguinte forma:

> Teorema. Uma função F é chamada uma *antiderivada* de uma função f em um intervalo I se $F'(x)=f(x)$.
>
> Teorema. Se F é uma antiderivada qualquer de f em um intervalo I, então, a antiderivada mais geral de f em I é dada por $F(x)+C$, onde C é uma constante arbitrária e toda a antiderivada de f em I pode ser obtida atribuindo valores específicos a C.
>
> *Antidiferenciação:* é o processo pelo qual a antiderivada mais geral de uma função é encontrada. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação, e escrevemos $\int f(x)dx = F(x) + C$, onde $F'(x)=f(x)$, ou então $d(F(x))=f(x)dx$. Pode-se escrever: $\int d(F(x)) = F(x) + C$.

Dessa forma, a boa e velha integral virou uma "antiderivada". Por coerência, então o "Cálculo Diferencial e Integral" deveria passar a se chamar "Cálculo Diferencial e Antidiferencial". Vejamos agora como outro texto, o do Guidorizzi (2001, p. 291) trata o assunto:

> Seja f uma função definida em um intervalo I. Uma *primitiva* de f em I é uma função F definida em I, tal que $F'(x)=f(x)$. Sendo F uma primitiva de f em I, então, para toda constante k, $F(x)+k$ é, também, primitiva de f. [...] Se duas funções têm derivadas iguais em um intervalo, elas diferem, neste intervalo, por

> uma constante. Segue que as primitivas de f em I são as funções da forma $F(x)+k$, com k constante. Diremos então, que $y=F(x)+k$, k constante, é a família das primitivas de f em I. A notação $\int f(x)dx$ será usada para representar a família das primitivas de f: $\int f(x)dx = F(x) + k$. Na notação $\int f(x)dx$, a função f denomina-se integrando. Uma primitiva de f será, também, denominada uma integral indefinida de f.

Essa maneira de introduzir a integral indefinida se originou do ensino das equações diferenciais ordinárias, onde o conceito de "primitiva" surge e é empregado de modo altamente eficiente.

Nota-se aqui, não apenas nesses autores, mas também em muitos outros, a tendência de tentarem novas formas de apresentação de conceitos matemáticos sólida e historicamente estabelecidos, tendo em vista a promoção de suas próprias obras. Algumas vezes caem no ridículo, na sua tentativa de refrasear definições ou teoremas rigorosos, logicamente consistentes, perfeitamente enunciados, apenas para diferenciar seu trabalho dos concorrentes. Esse esforço mercadológico muitas vezes implica na deterioração da didática da obra, quando não do rigor do conteúdo.

Cumpre observar que o Cálculo Integral é mais complexo que o Diferencial, pois, dada uma função sempre é possível obter sua derivada ou sua diferencial (exceto em casos patológicos). Já o inverso nem sempre é verdadeiro, existem funções que não podem ser integradas por processos exatos, somente por processos numéricos aproximados. E a grande dificuldade que o aluno, ou mesmo o pesquisador, enfrenta, é saber se uma dada função já conseguiu ser integrada por processos exatos, pois às vezes sua solução é complexa. Daí a importância das Tabelas de Integrais, o que o texto do Granville enfatiza corretamente, embora tenham sido algo esquecidas em textos mais recentes. O fato de que os computadores conseguem calcular soluções aproximadas rapidamente ocasionou a tendência a esquecê-las, contudo, devemos sempre ter em mente, que estas soluções são apenas aproximadas, nunca exatas, por melhor que sejam.

Autodidatismo

Nesse ponto, abriremos parênteses para relembrar um episódio da vida docente do autor. Em determinada ocasião, eis que um professor universitário, Ph.D. em matemática, me procurou e disse: “Professor, se recorda de que fui seu aluno?”. Obviamente não me recordava do fato. Porém, em uma determinada Universidade onde lecionava, às vezes gostava de assumir uma cadeira de cálculo para alunos repetentes, com dificuldades na matéria, pois apreciava quando um deles se sobressaía. Ele era um desses alunos. Acrescentou: “Eu não conseguia entender a integração, perguntei-lhe como a podia aprender sozinho. O Sr. me recomendou o livro do Granville e disse: faça mais de 400 integrais que tenho certeza de que vai aprender. Eu emprestei o livro, comecei a fazer os exercícios, numerando-os. Fiz mais de 400, como o Sr. recomendou. Hoje a integração é a técnica do cálculo que mais domino e a que mais facilmente ensino”.

Um dos grandes méritos do texto do Granville é que ele é adequado ao autodidatismo, possibilitando ao aluno se instruir por esforço próprio, sem a ajuda de mestres. Evidentemente, podem surgir questões que somente podem ser elucidadas pelos professores, mas a grande parte de seu texto pode ser dominada com esforço próprio. Gerações de engenheiros, físicos e matemáticos, o agradecem por isso. Portanto, em livros introdutórios, deve-se ter sempre em conta essa possibilidade, principalmente quando se pretende incentivar o ensino à distância, sem a presença de instrutores. Certos autores algumas vezes sucumbem à tentação de produzirem textos herméticos, pseudo-sapienciais, com o intuito de se mostrarem ‘originais’, mas se esquecem de que o importante é que seu texto seja *compreendido*.

Teoremas

Para se aquilatar a maneira de enunciar e demonstrar teoremas adotada por Granville, bem como compará-la com a de autores modernos, selecionamos um dos teoremas fundamentais do cálculo, o Teorema de Rolle. Michel Rolle (1652-1719) foi um matemático francês que publicou o seu teorema em 1691 na sua obra *Démonstration d'une Méthode pour resoudre les Egalitez de tous les degrez.* Iniciaremos com o Granville:

> Teorema de Rolle. Se *f(x),* contínua no intervalo *(a,b),* é nula nas extremidades e tem uma derivada *f '(x)* finita em cada ponto interno do intervalo, então *f '(x)* deve se anular para ao menos um valor de *x* compreendido entre *a* e *b.*
>
> A demonstração é simples. Realmente, ou *f(x)* é nula em todos os pontos de [a,b] e o teorema está demonstrado, ou não é. Neste segundo caso, podemos fazer duas hipóteses: ou *f(x)* começa crescendo ou começa decrescendo. Vejamos a primeira hipótese: *f(x)* não pode crescer sempre, pois é nula em *b*; logo há um dado ponto *c* interno ao intervalo, de onde ela passa a decrescer. Neste ponto *f(x)* tem um máximo e portanto *f'(c)=0.* Vejamos a segunda hipótese: *f(x)* não pode decrescer sempre, pois é nula em *b*; logo, há uma ponto *c'* interno a [a,b] de onde a função passa a crescer. Neste ponto, ela tem um mínimo e portanto *f'(c')=0.* (GRANVILLE, 1961, p. 113.)

Vejamos agora como o Guidorizzi (2001, p. 458) enfrenta esta questão:

> Teorema de Rolle. Se *f* for contínua em [a,b], derivável em]*a*, *b*[e *f(a)* = *f(b)*, então existirá

pelo menos um *c* em]*a*, *b*[tal que $f'(c)=0$; logo existirá *c* em]*a*, *b*[tal que $f'(c)=0$.

Demonstração. Se *f* for constante em [a,b], então $f'(x)=0$ em]*a*, *b*[; logo, existirá *c* em]*a*, *b*[tal que $f'(c)=0$. Suponhamos, então, que *f não seja constante e*m [a,b]. Como *f* é contínua no intervalo fechado [a,b], pelo teorema de Weierstrass* existem x_1 e x_2 em [a,b], tais que $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de *f* em [a,b]. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, pois estamos supondo *f* não constante em [a,b], segue que x_1 ou x_2 pertence a]*a*, *b*[(estamos aqui usando a hipótese $f(a) = f(b)$) , daí $f(x_1) = 0$ ou $f(x_2) = 0$. Portanto, existe c em tal que $f'(c)=0$.

*[Se *f* for contínua em [a,b], então existirão x_1 e x_2 em [a,b] tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em [a,b]].

Ilustraremos, na sequência, como o Leithold (1982, p. 162) trata o mesmo assunto:

Teorema de Rolle. Seja *f* uma função tal que:

i. É contínua no intervalo fechado [*a,b*];

ii. É derivável no intervalo aberto *(a,b)*;

iii. $f(a)=f(b)=0$

Então, existe um número *c* no intervalo aberto *(a,b)* tal que $f'(c)=0$

Demonstração: Consideremos dois casos:

Caso 1: $f(x)=0$ para todo *x* de *(a,b)*.

Então $f''(x)=0$ para todo *x* de *(a,b)*; consequentemente, qualquer número entre *a* e *b* pode ser tomado para c.

Caso 2: $f(x)$ é diferente de zero para algum valor de x no intervalo aberto *(a,b)*. Como *f* é continua no intervalo fechado [a,b], sabemos do Teorema 4.3.9 *, que f tem um valor máximo absoluto em [a,b] e um valor mínimo absoluto em [a,b]. Como $f(a)=f(b)=0$ por hipótese e neste caso $f(x)$ é diferente de zero para algum x em (a,b), concluímos que f terá um valor máximo absoluto positivo em algum c_1 em (a,b) ou um valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 em (a,b), ou ambos. Deste modo para c = c_1 ou c = c_2 conforme seja o caso, temos um extremo absoluto em um ponto interior do intervalo [a,b] portanto, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como $f'(c)$ existe por hipótese, resulta do teorema 4.3.3** que $f'(c)=0$. Isto demonstra o teorema.

*Teorema 4.3.9: Se a função f for contínua no intervalo fechado [a,b], então f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em [a,b].

**Teorema 4.3.3: Se $f(x)$ existe para todos os valores de x no intervalo aberto (a,b) e f tem um extremo relativo em c, onde $a<c<b$, então se $f'(c)$ existe, $f'(c)=0$.

Didática versus Rigor

Evidentemente, dentro de uma apresentação axiomática do cálculo, todos os seus pontos devem provir de resultados anteriormente rigorosamente demonstrados. Contudo, em um texto introdutório isso é absolutamente necessário? Ou deve-se dar prioridade ao *entendimento* do conteúdo e à *didática* de sua apresentação? Qual deve ser o *rigor* a ser adotado?

A Matemática considera algo como rigoroso se puder ser demonstrado, provado. Porém, como Ernst Mach já observava, a Matemática é útil por propiciar uma economia de pensamentos. A codificação simbólica que emprega condensa a cadeia de raciocínios, porém não os substitui. Já se afirmou que uma demonstração, por mais complexa que seja, só é completamente inteligível se puder ser expressa em palavras. Os símbolos constituem apenas um meio econômico de exprimir o raciocínio lógico-matemático subjacente. Por isso, considerar a Matemática apenas como um jogo com símbolos desprovidos de sentido, como a consideram os formalistas estritos, desprezando a intuição, não é inteiramente correto.

Tanto filósofos como matemáticos já alertaram para isso; vejamos algumas opiniões. O filósofo Arthur Shopenhauer assim se expressou: "Para melhorar o método em Matemática é necessário acima de tudo abandonar o preconceito que consiste em acreditar que a verdade demonstrada é superior ao conhecimento intuitivo". (Citado por KLINE, 1980, p. 313. Tradução do autor.)

Em 1928 o matemático Godfrey H. Hardy afirmou:

> Não há, estritamente falando, tal coisa como uma prova [demonstração] matemática..., nós podemos, em uma última análise, nada fazer além de apontar;..., provas são o que Littlewood e eu denominamos de *gás*, floreios retóricos projetados para afetar a psicologia, figuras no quadro nas aulas, artefatos para estimular a imaginação de alunos .(Citado por KLINE, 1980, p. 314. Tradução do autor.)

Em 1944, o proeminente matemático americano Raymond L. Wilder reduziu o *status* da prova. Para ele, demonstração nada mais é que:

> ...teste do produto de nossa intuição... Obviamente nós não possuímos, e provavelmente nunca possuiremos, qualquer padrão de prova que é independente do tempo, da coisa a ser provada, ou da pessoa ou escola de pensamento que a emprega. E sob essas condições,

> a coisa sensível a ser feita é admitir que não exista tal coisa, geralmente [dita], como verdade absoluta [prova] em Matemática, apesar do que o público possa pensar. (Citado por KLINE, 1980, p. 314. Tradução do autor.)

Bertrand Russel afirmava que a infalibilidade não é acessível aos mortais[1], enquanto Poincaré sempre lembrava que não há problemas resolvidos, apenas problemas mais ou menos resolvidos. Weyl assegurava que a Matemática é uma atividade do pensamento não um corpo de conhecimento exato, sendo, portanto, melhor contemplada historicamente. "Infortunadamente, as demonstrações de uma geração são as falácias das próximas", assim se manifestou Morris KLINE (1980, p. 318).

Karl Popper, em sua obra *A Lógica da Descoberta Científica* expressou, talvez, a concepção mais extrema, afirmando que o raciocínio matemático nunca é verificável, mas somente falsificável; logo os teoremas matemáticos nunca são garantidos. Pode-se usar a teoria existente na ausência de uma melhor, como a geometria euclidiana foi empregada antes da Riemanniana, mas a garantia da sua exatidão nunca é atingida. Também asseverava que "há três níveis de compreensão de uma demonstração. O mais baixo é o agradável sentimento de ter compreendido o argumento; o segundo é a habilidade de repeti-lo, o terceiro e o mais elevado é aquele de ser capaz de refutá-lo". (Citado por KLINE, 1980, p. 310. Tradução do autor.)

O conceito de demonstração depende, portanto, da escola de pensamento à qual o praticante adere. Já em 1903 o matemático americano E.H. Moore sustentava que toda a ciência, aí incluídas a lógica e a Matemática, eram funções de sua época, bem como todos os seus ideais e conquistas (KLINE, 1980, p. 318).

1 Apesar do que afirmam os autoproclamados, bem como eventuais dogmas sobre tal.

Resta o problema de qual o nível de rigor a ser adotado em determinada momento, dado que o rigor absoluto é inatingível. Nesse ponto, também é magistral o ensinamento de Moore, quando afirmava que *"suficiente para o dia é o rigor disso"* (Citado por KLINE, 1980, p. 318, tradução do autor) com o que queria declarar que existe um rigor adequado a cada momento.

Outro ponto que desejamos abordar diz respeito à "elegância", a beleza formal e a simplicidade, que as demonstrações matemáticas supostamente deveriam ter. Esse ponto é resquício dos cânones gregos de busca de beleza e harmonia, onde um sentimento estético deveria nortear e imperar. Evidentemente, quando possível, é um ideal a ser encontrado, porém não deve ser encarado como condicionante, imperativo. Os cânones de "rigor" e de "elegância" a serem perseguidos variam historicamente, devem ser adequados aos seus momentos e mutáveis, particulares a cada período da história.

Com o advento dos computadores, certas demonstrações modernas, que envolvem a exaustão de todas as possibilidades existentes no problema, empregando o que denominaríamos de "força bruta", não podem ser classificadas como "elegantes"; contudo são válidas, pois comprovam as hipóteses formuladas. São, portanto, adequadas ao momento histórico atual.

Analogamente, a Matemática dos egípcios ou dos babilônios, com suas soluções propostas em forma de receitas, ilustradas por problemas particulares, seguiam os cânones de rigor e elegância matemáticos então vigentes. Cada Matemática, ou melhor, Etnomatemática, deve ser apreciada em seu contexto.

Einstein, ao apresentar sua teoria geral da relatividade, escreveu em 1916: "No interesse da clareza, foi inevitável repetir-me muitas vezes, sem preocupação com a elegância da apresentação", acrescentando: "Pautei-me, escrupulosamente, pela norma do genial físico teórico Ludwig Boltzmann, que deixava as questões de elegância a cargo de alfaiates e sapateiros".

Ao que parece, esse era um mote conhecido dos físicos e matemáticos nos fins do século XIX e princípios do XX. Einstein se referia à Física, porém o mesmo se aplica à Matemática, onde igualmente questões de elegância dever-se-iam deixar a cargo dos referidos artífices, parafraseando Boltzmann.

No mesmo texto acrescenta: "Já os fundamentos físicos empíricos da teoria, conscientemente tratei-os com certa negligência, para evitar que o leitor menos familiarizado com a física fizesse como aquele caminhante que, de tantas árvores, não conseguiu enxergar a floresta" (EINSTEIN, 1920, p. IV). É uma observação importante, pois muitas vezes o aluno em meio a um emaranhado de detalhes supérfluos não percebe o todo.

Albert Einstein já frisava: "Se você não consegue explicar algo de modo simples é porque não entendeu bem a coisa"[2]. Não adianta um excesso de rigor se o aluno não entendeu o conteúdo. Nesse ponto, é instrutivo recordar a experiência de Feynman com o ensino de ciências no Brasil. Richard Philips Feynman (1918-1988) foi um renomado físico norte-americano, ganhador do Prêmio Nobel de Física de 1965 por seu trabalho sobre a eletrodinâmica quântica. Além disso, concebeu a ideia da computação quântica e chefiou a comissão que investigou o acidente do ônibus espacial Challenger, ocorrido em 28 de janeiro de 1986.

Feynman visitou o Brasil no verão de 1949, após ter participado do Projeto Manhattan, que deu origem ao primeiro reator nuclear bem como as primeiras bombas atômicas, que foram lançadas sobre o Japão. Em 1951 retornou ao Brasil, onde permaneceu dando aulas por meio ano. Foi um professor notável, uma das suas mais conceituadas obras, as *Feynman Lectures on Physics,* publicadas originalmente em 1963, constituem até hoje uma das melhores e mais didáticas obras dedicadas ao ensino da Física.

---

2 https://www.epochtimes.com.br/20-pensamentos-de-einstein-que-todo-aluno-deveria-saber/

Sua apreciação, feita naquela época, exposta a seguir, constitui, a nosso ver, uma das mais lúcidas avaliações de como se processa o ensino de ciência no Brasil e, em nossa opinião, reflete muito bem como este modelo danoso se perpetua até hoje.

Feynman descobriu que os alunos brasileiros conseguem gabaritar nas provas, responder qualquer pergunta com perfeição, fazer demonstrações sem, contudo, terem entendido, compreendido, assimilado, realmente o conteúdo. Sabem recitar, palavra por palavra, o que dizem os textos, sem compreenderem que essas palavras *significam alguma coisa.* Para o aluno, são sons artificiais. Nunca ninguém as traduziu para palavras que eles possam compreender. Do mesmo modo, podem reproduzir com perfeição uma demonstração, palavra por palavra, símbolo por símbolo, mas não explicá-la, de uma maneira simples.

Não basta, como é comum hoje em dia, apenas dizer o significado de uma palavra em termos de outras palavras. É necessário entender a natureza, o âmago do conceito, da intenção que aquela palavra expressa, e transmiti-lo corretamente. Conclui Feynman, no fim de sua exposição sobre o ensino no Brasil: "Por fim disse que não concebia que alguém pudesse ser educado por este sistema de autotransmisssão, no qual as pessoas passam em exames e ensinam as outras a passar em exames, mas ninguém sabe nada" (FEYNMAN, 1988, p. 209-210). É uma avaliação ferina, mordaz, mas sincera, infelizmente ainda vigente para o nosso sistema de ensino.

Vetores

Cabe notar que na obra de Granville os vetores não são mencionados, nem o cálculo de funções vetoriais. O conceito moderno de vetor, livre dos quatérnions, surgiu independentemente com Josiah Willard Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925). Gibbs foi professor de matemática e física em Yale, mas era no início um físico-químico. Heaviside no início de sua carreira era um engenheiro de telégrafos e telefones, tendo posteriormente se dedicado a escrever sobre eletricidade e eletromagnetismo.

Gibbs foi professor em Yale de 1871 até sua morte, em 1903, portanto foi contemporâneo e colega de Granville. Gibbs imprimiu, para uso de seus alunos, em 1881 e 1884 um pequeno libreto intitulado *Elements of Vector Analysis*, que se tornou amplamente conhecido.

Provavelmente Granville não adotou vetores em sua obra por não considerar o cálculo vetorial suficientemente consolidado, o que aconteceu somente bem depois de 1904, por sua imensa aceitação entre os engenheiros e os físicos devido à sua praticidade. No Brasil desde 1931 era exigida a introdução do Cálculo Vetorial na cadeira de Mecânica Racional, por força do Decreto nº 19852, de 11/04/1931. Note-se que a exigência era de que vetores fossem introduzidos na cadeira de Mecânica Racional, não na de Cálculo Diferencial e Integral. Aliás, somente em tempos recentes o tratamento vetorial foi incorporado aos livros texto de cálculo.

Conjuntos

Outro tópico não incluído na obra de Granville são os conjuntos, a teoria dos conjuntos e o tratamento da matemática tendo-os como fundamento. Pode-se retraçar os começos da escola da teoria dos conjuntos com os trabalhos de George Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916). Embora estivessem primariamente preocupados com conjuntos infinitos, ambos começaram a tentarem colocar os números inteiros (naturais) como fundamento dos conceitos de conjuntos. A corrente logicista dos fundamentos da matemática incorporou a teoria dos conjuntos, contudo essa vertente, que pretendia resumir a matemática à lógica, logo encontrou percalços com a descoberta dos paradoxos.

A axiomatização da teoria dos conjuntos foi feita por primeiro por Ernst Zermelo (1871-1953) em um trabalho de 1908. Ele acreditava que os paradoxos surgiriam porque Cantor não restringiu o conceito de um conjunto. O conjunto de axiomas de Zermelo foi aperfeiçoado em 1922 por Abraham A. Fraenkel (1891-1965). Posteriormente, principalmente a escola Bourbaki (1935 em diante) procurou edificar toda a matemática sobre essa base, colocando os conjuntos como os seus fundamentos.

Essa tendência culminou no movimento denominado de "Matemática Moderna", onde o uso de conjuntos assumiu proporções exageradas, às vezes ridículas, ocasionando o que Newton Carneiro Affonso da Costa denomina de uma "conjuntivite" da matemática. Colocações exageradas, como "determinar o conjunto solução" de um problema, eram exigidas. Conjuntos são importantes, não há dúvida, porém o excesso de seu emprego, principalmente em cursos introdutórios, prejudica a didática necessária à absorção dos conteúdos. Seu emprego, quando bem dosado, é benéfico.

O programa adotado por Granville para sua obra é o tradicional, muitas vezes pode-se argumentar se ele estaria atrasado no tempo. Nesse ponto, cabe relembrar o que Morris Kline (1976, p. 116) ponderou sobre isso:

> Tal argumento poderia se aplicar à história, mas não tem força sobre a matemática. Nosso assunto é cumulativo, e a antiga matéria tem que ser compreendida se se tem que dominar os novos desenvolvimentos". [...] Tem-se comparado a matemática a uma grande árvore que está sempre estendendo novos ramos e novas folhas, mas tendo, entretanto, o mesmo tronco firme de conhecimento estabelecido. O tronco é essencial ao sustento da vida da árvore inteira.

Portanto, o núcleo tradicional é fundamental para a edificação de uma boa cultura matemática. Contudo, tanto a ciência moderna como o crescimento exponencial da tecnologia, exigiram da matemática um *aggiornamento.* Na época de Granville nem se sonhava que iriam existir computadores, calculadoras, plotters, smartphones e outros gadgets tecnológicos, que poderiam influir significativamente na sua didática. Do mesmo modo, a Física moderna, especialmente a mecânica quântica, a física das partículas elementares, a as teorias do campo, e outros de seus esotéricos saberes, propiciaram o desenvolvimento de novos ramos da matemática então insuspeitados. O mesmo ocorreu com outros ramos do conhecimento. Os gráficos do Granville, hoje facilmente produzidos por qualquer programa gráfico, foram penosa e meticulosamente desenhados a mão.

Os computadores, por sua capacidade de executarem bilhões de operações, abriram espaço para o cálculo numérico, por exemplo, no cálculo de soluções de equações diferenciais que não possuem soluções exatas. Os textos modernos de cálculo devem aproveitar sabiamente as vantagens didáticas que esses recursos oferecem, ofertando exercícios então impossíveis de serem resolvidos mediante réguas de cálculo ou tábuas de logaritmos, os meios então disponíveis, devido ao volume de cálculos exigido. Os modernos programas gráficos descortinam espaços didáticos ainda não inteiramente aproveitados. Tecnologias como a internet, realidade virtual, projeções 3D, *etc.,* proporcionam universos pedagógicos frutíferos. Mas os computadores não resolvem problemas, apenas executam instruções seguindo algoritmos construídos por quem conhece a matemática tradicional.

Se Granville hoje ressuscitasse com certeza atualizaria sua obra, incluindo tópicos como: vetores, conjuntos, ..., e, temos certeza, aproveitaria os recursos tecnológicos modernos: internet, computadores, programas gráficos, ... Contudo, sem dúvida, manteria sua clareza original, sua *ensinabilidade,* sua capacidade de *autodidatismo.*

Conclusão

O livro do Granville não é uma vulgar compilação de exercícios, mas sim um excelente livro texto para quem realmente deseja *dominar as técnicas* de derivação, diferenciação e integração. Sua ótica é essencialmente prática, destinada não a minúcias teóricas, mas sim para atender ao dia a dia principalmente dos engenheiros ou dos físicos. Sua capacidade de propiciar condições para o autodidatismo foi um fator essencial de seu sucesso.

Não é um livro do que se convencionou modernamente de denominar de Análise Matemática, onde a fundamentação dessa ciência é exposta rigorosamente, mas sim do que historicamente se denominava de “Cálculo”, ou seja, o “Cálculo”, a obtenção, das derivadas e integrais das funções.

Para ser um bom livro texto introdutório de Cálculo Diferencial e Integral atual, deve haver um equilíbrio entre a parte teórica, minimamente necessária para a compreensão do porque o cálculo funciona, e permitir um domínio das suas técnicas, ou seja, saber derivar integrar, resolver equações diferenciais, com certa facilidade. *Virtus in médium est* (A Virtude está no meio). A parte teórica deve incluir demonstrações de teoremas, para desenvolver o raciocínio lógico-abstrato, porém estes teoremas devem ser sabiamente escolhidos e didaticamente apresentados. Aconselha-se o emprego da Navalha de Occam: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* (as entidades não devem ser multiplicadas além da necessidade).

Não é todo livro texto de matemática, ou de qualquer outra ciência, que depois de 115 anos de sua publicação, usado por gerações de engenheiros, físicos e matemáticos, ainda é lembrado com carinho. Granville acertou em sua fórmula: todo bom livro texto deve ser *ensinável* e cada resultado deve ser tanto *intuitiva como analiticamente evidente* ao estudante. A herança inestimável de Granville é sua didática.

Referências

EINSTEIN, Albert. Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverstanändlich). Braunshweig; Fried. Vieweg, 1920. Existe tradução em português: **Teoria da Relatividade: Sobre a Teoria da Relatividade Especial e Geral.** São Paulo: L&PM Pocket, 2015.

FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Ralph. **Estás a brincar, Sr. Feynman!** Lisboa: Gradiva, 1988. [Original em inglês: **Surely You're Joking, Mr. Feynman!**]

GRABINER, Judith V. **The Origins of Cauchy Rigorous Calculus**. New YorK: Dover, 1981.

GRANVILLE, William Anthony; SMITH, Percey F. **Elements of the Differential and Integral Calculus.** Boston: Ginn & Company, 1904.

GRANVILLE, William Anthony; SMITH, Percey F. **Elements of the Differential and Integral Calculus.** Boston: Ginn & Company, 1911. Revised Edition.

GRANVILLE, W.A.; SMITH, P. F.; LONGLEY, W.R. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral.** Rio de Janeiro: Editora Científica, 1961. Trad. J. Abdelhay.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. São Paulo: LTC, 2001. 5ª ed.

KLINE, Morris. **Mathematics. The Loss of Certainty.** New York: Oxford University Press, 1980. 366 p.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LARSON, Ron; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H.. **Cálculo.** Vol.1. São Paulo: Mc Graw-Hill, 2006. 1ª ed.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo: Harper & Row, 1982.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. James P Pierpint. 2010. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pierpoint.html>. Acesso em 30/03/2019.

POPPER, Karl. **Conjecturas e refutações.** 4.ed. Brasília: Universidade de Brasília, 1972.

Conhecimento Objetivo. Belo Horizonte: Itatiaia / EDUSP, 1972.

STEINHAUS, Hugo. **Mathematician for All Seasons: Recollections and Notes Vol. 1 (1887-1945). Germany:** Birkhäuser, 2018.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo; McGraw-Hill, 1983.

8

CONTOS ÁRABES, HISTÓRIAS REAIS OU EPISÓDIOS FICTÍCIOS SOBRE MALBA TAHAN?

Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Clarice Segantini

A gente morre é para provar que viveu, [mas] as pessoas não morrem, ficam encantadas.

Guimarães Rosa, ao proferir o excerto acima, nos brindou com a possibilidade de estendê-lo a tantas outras sensações de deslumbramento ou encantamento daquilo que se pode ver, ouvir ou, simplesmente, perceber. Certamente, poderemos recorrer a uma gama de personagens que ao longo de nossa trajetória, seja ela infanto-juvenil, acadêmica; seja ela profissional, nos marcaram com as mais diferentes e variadas comoções. Dentre elas nos saltam da memória a figura de Malba Tahan, uma mistificação literária[1] que se materializou em meio a uma rede de relações

1 Quando [...] o escritor faz uma obra que atribui a um outro escritor, vivo, [...] real ou imagin‡rio [...] (MUSEU DA IMAGEM E DO SOM – MIS. Depoimento de Malba Tahan, 1973).

sociais diversificadas, nas quais desenvolveu seu jogo e imputou sua existência. Apesar de suas inúmeras contribuições, didáticas e paradidáticas, é bastante comum nos depararmos, nos dias de hoje, com quem o desconheça, integralmente, ou que o associa a uma única obra. À vista disso, cabe-nos apresentá-lo àqueles que não tiveram a oportunidade de desfrutar de seus enredos árabes, dos mirabolantes desafios matemáticos ou das fascinantes curiosidades numéricas e, ao mesmo tempo, dessa forma, reapresentá-lo àqueles que compartilharam de tudo isto.

O ano era o de 1933. Rosalina Coelho Lisboa[2], poetisa e leitora atenta, constatou que a versão de uma das obras de Malba Tahan, "Sama-Ullah, contos orientais", fora atribuída a Rudyard Kliping[3], em uma lista de tradutores, incluída no livro "Lendas do Oásis", lançado naquele ano (MUSEU DA IMAGEM E DO SOM, 1973). Segundo ela, Kliping nunca fizera aquele tipo de trabalho e, diante desta surpreendente revelação, caiu por terra o que, até então, se presumia sobre o autor, ou seja, um cientista social árabe que se tornara famoso por seus escritos, nascido a 06 de maio de 1885, na aldeia de Mazali, próxima à Meca, descendente de uma família mulçumana, ferido aos 36 anos de idade, enquanto lutava pela libertação de uma pequena tribo de beduínos, localizada no deserto da Arábia Central (ARQUIVO PESSOAL – IMT, 1933).

---

2 Nasceu na cidade do Rio de Janeiro em julho de 1900. Em 1921 publicou, pela editora Monteiro Lobato, seu primeiro livro de poemas, *Rito Pagão*, o qual lhe rendeu a vitória em um concurso literário da Academia Brasileira de Letras. Escreveu outro livro de poemas em 1932, *Passos no Caminho*, publicado no Brasil, em 1932, pela editora Renascença e, em 1946, traduzido para a língua espanhola, foi publicado pela Edições Diana e em 1962, pela Ediciones Idea (SILVA, 2013).

3 Rudyard Kipling (1865-1936), autor de *Kim*, traduzido para o português por Monteiro Lobato pela Companhia Editora Nacional, 1941 (KOSHIYAMA, 2006).

Marco, este, que impôs a Julio César de Mello e Souza, a essa altura, um prestigiado professor de Matemática, revelar a farsa e declarar terem ele e Ali Yazzed Izz-Eddin Ibn Salin Hank Malba Tahan a mesma identidade, o que por oito anos, no imaginário de seus leitores, pautou-se na existência de dois autores com diferentes estilos de escrita: Malba Tahan divulgava uma Matemática repleta de singularidades e aspectos históricos por meio de temas orientais; Mello e Souza, uma Matemática formalizada para alunos e professores, sob a égide dos métodos e legislações vigentes (SIQUEIRA FILHO, 2008).

Mas quais circunstâncias forjariam a constituição do autor-personagem Malba Tahan? Por qual razão Mello e Souza teria decidido inventá-lo/criá-lo? Quem resistiu às intempéries do passar dos anos na relação "dialética" Criador e Criatura? Retomemos, pois, à história para que possamos identificar e compreender a gênese de alguns movimentos intencionais em prol de uma "mentira artística"[4].

Mello e Souza nasceu no Rio de Janeiro em 06 de maio de 1895, portanto, 10 anos mais novo do que seu personagem. Entretanto, mudou-se, ainda criança, para a cidade de Queluz, interior do Estado de São Paulo. Apesar de ter sido aluno de sua mãe, com quem aprendeu as primeiras letras, escrevia mal e era pouco interessado pela Matemática. Limitações que não o impediram de prosseguir seus estudos no Colégio Militar (1906-1908); Colégio Pedro II (1909-1911); Escola Normal do Distrito Federal (1912); Escola Politécnica (1913-1932) (ARQUIVO PESSOAL – IMT, s/d). Atento às modificações dos saberes ditados por reformas educacionais ou emergenciais, adaptou suas obras e buscou parcerias com a intenção de interferir na formação de novas gerações e divulgar uma Matemática sob um ponto de vista lúdico.

4 Fernando Pessoa (1986, p. 16).

Como gostava de escrever e sabia do espaço reservado para publicações literárias nas edições diárias do jornal onde trabalhava em 1918, *O Imparcial*, recorreu a Lêonidas Rezende, seu diretor, à época, com alguns textos de sua autoria, com a intenção de publicá-los. Apesar de tê-los recebido, o dirigente não se mostrou muito interessado, os colocou sobre a mesa com um pedaço de chumbo em cima (MUSEU DA IMAGEM E DO SOM – MIS, 1973).

Alguns dias se passaram e sem retorno algum, mas insistente e conhecedor do mercado editorial daquele período, que valorizava textos de autores estrangeiros, pegou os manuscritos de volta, retirou o seu nome e os substituiu por R. S. Slady (inventado, segundo ele, naquela hora) e os levou, novamente, ao Leônidas, garantindo haver descoberto um escritor americano sensacional, todavia desconhecido no Brasil. Na manhã seguinte, lá estava R. S. Slady publicado na primeira página d'*O Imparcial* (MUSEU DA IMAGEM E DO SOM – MIS, 1973).

Como consequência desta experiência e certo de que não iria obter êxito assinando seu nome de batismo em suas historietas, bem como indeciso com relação à escolha da nacionalidade do autor que o subscreveria, acabou optando pela árabe, muito provavelmente, impressionado com a leitura que fizera acerca das "Mil e Uma Noites".

Assim, de 1918 a 1925, não obstante nunca ter ido à Arábia, preparou a criação de sua personagem e, para tanto, estudou o Islã, leu o Alcorão e o Talmud, tomou aulas particulares de árabe e por fim compôs o "pseudônimo" com as palavras Malba, um pequeno oásis localizado no Iêmen e Tahan, o moleiro que prepara o trigo, adotada por sugestão de uma aluna da Escola Normal, Maria Zechsuk Tahan (MUSEU DA IMAGEM E DO SOM – MIS, 1973).

Doravante, o caminho a ser trilhado seria o de dar visibilidade às publicações do escritor árabe e para que isso acontecesse as projetaria em vários jornais e revistas, tais como *A Noite; Folha da Noite; O Jornal; O Cruzeiro, A Noite Ilustrada; Almanaque d'O Tico Tico; Correio da Manhã; Última Hora; Globo Juvenil; Vamos Ler, A Cigarra; A Galera; O Número; A Maça; Revista da Semana; Diário da Noite; Folha de São Paulo; Grande Hotel; Vida Ilustrada* (ARQUIVO PESSOAL – IMT, s/d).

Contos de Malba Tahan, seu livro de estreia, lançado logo após a divulgação das primeiras colaborações nos jornais *A Noite* e *Folha da Noite*, pela *Editora BrasLux*, reunia uma coletânea de vinte e três contos[5], trazendo Mello e Souza como tradutor da obra. Entretanto, não era essa a informação que constava na segunda edição[6], de 1929, publicada pela *A Encadernadora*, na qual a tradução era devida a Breno Alencar Bianco, outro personagem fictício, cujas iniciais B.A.B., em persa, significam "porta", criado para homenagear seu amigo Heitor Bianco de Almeida Pedroso (TAHAN, 1925). Parece-nos que aqui surgira uma primeira pista para que os leitores se questionassem acerca da existência do autor, mas passara despercebida, haja vista, como já dito, a mistificação literária perdurar um longo período.

---

5 A pequenina lua azul; A última vontade do rei Hibban; O nariz do rei Mahendra; O castelo das mil e tantas luzes; O livro do destino; A sombra do cavallo; O thesouro de Brésa; O elephante furioso (parábola hindu); O sábio da Effelogia; Devoradores de Reis; O homem que tudo achava; A primeira pedra; O castigo; Protocholovsky (Vocábulo do dialeto tártaro que significa "mais estúpido que um porco"); Um caso de medicina; Kitab, o gênio; A bossula; A sopa; O avestruz contrabandista; O homem prodigioso (O nome do protagonista desta história é R. S. Slady); Sassevará; Peregil e o velho do camelo; Bom, mas não muito. Destes, os seis primeiros já haviam aparecido no jornal Folha da Noite (TAHAN, 1925).

6 Oliveira (2001) atesta que, nesta edição, ocorreu o aparecimento do conto que daria origem à sua mais conhecida obra: *O Homem que Calculava*.

Ao longo de sua trajetória como escritor, Mello e Souza tecera uma rede de contatos que permitiu sua manutenção no mercado editorial por cinco décadas, sobretudo, no que diz respeito ao movimento de comercialização e divulgação de seus livros, realizado pelos diversos editores com os quais trabalhou.

Em 1974, ano de seu encantamento, a Bloch Editores publicou, aqui no Brasil, duas obras em 1ª edição e outra em 3ª. Dois anos depois, na cidade de Barcelona, outra 1ª edição, pela Dom Luis Véron e, no ano seguinte, em 1977, uma adaptação em quadrinhos, pela Brasil-América e uma 2ª edição, pela Companhia Editora Americana (SIQUEIRA FILHO, 2008). A partir de então, instaurar-se-ia um período de quatro anos sem nenhuma reedição de seus trabalhos. Destarte, em 1982, a Record, conforme Hallewell (2004), a maior editora brasileira do setor não-didático, em meio a maturidade da indústria editorial estabelecida em "tempos de abertura", modificaria este cenário.

Coincidentemente, a retomada de suas obras, nos anos 1980, ocorreu perante um momento de retorno à democracia, em que educadores matemáticos, interessados, sobretudo, em discutir questões relacionadas a o que e como ensinar Matemática, buscavam alternativas que agregassem, de certa forma, avanços nas diferentes etapas de escolarização (LOPES, 2000), como também, em um período bastante aquecido à Educação Matemática, em face da [1] organização de dois ENEM's[7]; [2] criação da Sociedade

7 Encontro Nacional de Educação Matemática. I ENEM – 1987 – PUC-SP/SP; II ENEM – 1988 – Universidade Estadual de Maringá/Maringá-PR. Seguiram–se a eles: III ENEM – 1990 – Universidade Federal do Rio Grande do Norte/Natal-RN; IV ENEM – 1993 – Fundação Universidade Regional de Blumenau/Blumenau-SC; V ENEM – 1995 – Universidade Federal de Sergipe/Aracaju-SE; VI ENEM – 1998 – UNISINOS/São Leopoldo-RS; VII IENEM – 2001 – Universidade Federal do Rio de Janeiro/Fundão-RJ; VIII ENEM – 2004 – Universidade Federal de Pernambuco/Recife-PE; IX ENEM – 2007

Brasileira de Educação Matemática - SBEM; [3] implantação de núcleos de estudos na USP, UNICAMP, UNESP de Rio Claro/SP, Universidade Santa Úrsula – USU/RJ. Como resultado da boa aceitação do público consumidor, vendiam-se, em média, na década seguinte, mais precisamente em 1999, 151 exemplares por dia, perfazendo um montante de 54.360 exemplares por ano/comercial. Isto é, 25 anos depois de sua morte, seus livros estavam entre os mais vendidos (COSTA, 1999) e *O Homem que Calculava*[8] era um deles.

O Homem que Calculava, um Clássico do Campo Literário da Matemática

> À memória dos sete grandes geômetras cristãos ou agnósticos: Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange, Comte, (Allah se compadeça desses infiéis), e à memória do inesquecível matemático, astrônomo e filósofo mulçumano Buchafar Mohamed Abenmusa Al Kharismi, (Allah o tenha em sua glória!), e também a todos os que estudam, ensinam ou admiram a prodigiosa ciência das grandeza, das formas, dos números, das medidas, das funções, dos movimentos e das forças, eu, el-hadj xerife Ali Iezid Izz-Edim ibn Salim Hank Malba Tahan (crente de Allah e de seu

– Universidade de Belo Horizonte – UNI-BH/Belo Horizonte-MG; X ENEM – 2010 – UCSal/Salvador-BA; XI ENEM – 2013 – PUC-Curitiba/PR; XII ENEM – 2016 – Universidade Cruzeiro do Sul/São Paulo-SP; XIII ENEM – 2019 – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Cuiabá-MS.

8 Sua 25ª edição foi veiculada pela editora Conquista por durante três anos (1972, 1974, 1975) e, somente, em 1983, ou seja, oito anos após a última divulgação, saiu a 26ª edição com os selos Record e Círculo do Livro (SIQUEIRA FILHO, 2008). Esta obra foi traduzida para mais de 12 idiomas, entre eles, segundo Lorenzato (2004, p. 64) figuram o alem‹o, esloveno, espanhol, inglês e o italiano.

> santo profeta Maomé), dedico esta desvaliosa página de lenda e fantasia. De Bagdá, 19 da lua de Ramadã de 1321(TAHAN, 1983, p. 5).

Com essas palavras, de cunho altamente filosófico, Malba Tahan inaugurou os 34 capítulos que compõem sua obra, dedicando-as a sete infiéis: os seis primeiros cristãos, e o último, agnóstico. As muitas notas de rodapé trazidas, ao longo do texto, ora se creditam a ele, ora a Breno Alencar Bianco, novamente seu tradutor. Após a conclusão do enredo que retrata a saga do protagonista Bereniz Samir – um viajante perspicaz no manuseio de problemas, supostamente, insolúveis –, tem-se um apêndice com o qual o autor esclarece a seu leitor o significado religioso nas entrelinhas da dedicatória; a destreza de calculistas famosos; a contribuição dos árabes para o progresso da matemática; bem como apresenta uma série de pensamentos elogiosos sobre a matemática; tece considerações acerca de alguns problemas propostos; insere um glossário de termos desconhecidos, traz o índice de autores, personagens históricos, matemáticos entre outros e, por fim, limita-se a apontar uma pequena bibliografia, consultada para consubstanciar as muitas referências que faz.

Sem vestígio algum, alusivo a 1ª edição da obra em voga, constatamos, em 1938, a publicação da 2ª edição e, em 1939, a da 3ª, ambas pela editora ABC. Nesse último ano, Mello e Souza, em seu discurso durante a menção honrosa feita, pela Academia Brasileira de Letras (ABL), à obra *O Homem que Calculava*, destacou o fato de que aquele prêmio representava algo inédito nos anais da literatura mundial, além de ser a primeira vez que um livro de fantasia tecido em torno da Matemática [era] distinguido por uma valiosa láurea literária (FARIA, 2004). E, assim, se posicionou:

> [...] a Academia Brasileira de Letras outra coisa não fez, senão rehabilitar a Matemática perante homens de espírito e de talento, os burilados do Verso, os arquitetos da Frase – e demonstrar, de forma eloquente e generosa, que a ciência de Lagrange – na sua beleza e simplicidade, pode viver e florir em perfeita harmonia com a Literatura (ARQUIVO PESSOAL – IMT, 1939).

O livro, em sua 86ª edição em 2019, nos brinda com narrativas que se desenrolam em torno de uma série de tramas que nos conduzem a intrigantes desafios matemáticos, com os quais podemos garantir não terem solução, mas que por meio de artifícios algébricos, aritméticos e geométricos mostram ao leitor, justamente, o contrário.

Cabe-nos ressaltar, como uma prática bastante comum, nas obras de Malba Tahan, decorrente de exaustivas pesquisas, a inserção de várias outras referências, sobretudo, francesas, que abordavam tópicos relacionados à História da Matemática e às Recreações Matemáticas.

Desta feita, localizamos quatro autores que, também, trataram de problemas muito semelhantes a alguns sugeridos no livro *O Homem que Calculava*, tais como *Recreations in Mathematics and Natural Philosophy* (Jacques Ozanam, 1840); *Récréations Arithmétiques* (Émile Fourrey, 1899); *Récréations mathématiques et Problèmes des Temps Anciens et Modernes* (Walter Willian Rouse Ball, 1907); *Curiosités & Récréations Mathemátiques* (Gaston Boucheny, 1939) (SEGANTINI, 2015), como indicamos a seguir:

Quadro I. Similaridades entre os enredos d'*O Homem que Calculava* e quatro Obras Estrangeiras.

O PROBLEMA DOS 35 CAMELOS	
[...] - Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha, se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas? (TAHAN, 1983, p. 21)	Un Arabe en mourant avait laissé 17 chameaux à ses 3 fils. Le premier devait en avoir la moitié; le second, le tiers; et le troisième, le neuvième. Comment put-on effectuer le partage? (FOURREY, 1899, p. 159)[9] Un héritage difficile à partager. – Un arabe, en mourant, laisse, par testament, as fortune à ses trois neveux, à condition que l'ainé en prendra la moitié, le second le tiers et le troisième le neuvième. Or, cette fortune se compose de 17 chameaux. Comment doit-on faire le partage? Exercice d'origine arabe (BOUCHENY, 1939, p. 143)[10] Un marchand possède 17 moutons qu'il veut donner à ses trois fils dans la proportion suivante: la moitié à l'ainé, le tiers au second, et le neuvieme au troisiême. On demande combien il revient de moutons à chacun? (BALL, 1907, p. 110)[11]

Continua...

9 Um árabe moribundo deixou 17 camelos para seus 3 filhos. Ao primeiro caberia a metade disso; ao segundo, a terça parte; e ao terceiro, a nona. Como poderia efetuar a partilha?

10 Um legado difícil de partilhar. - Um árabe, moribundo, deixa, em testamento, uma fortuna para seus três sobrinhos, sob a condição de o mais velho tomar a metade, o segundo a terça parte e o terceiro a nona. Mas essa fortuna se compôes de 17 camelos. Como deveríamos fazer a partlha? Exercício de origem árabe

11 Um comerciante possui 17 ovelhas que quer dar a seus três filhos na seguinte proporção: a metade ao mais velho, a terça parte ao segundo e a nona ao terceiro. Perguntamos quantas ovelhas cada um receberá?

Continuação...

O PROBLEMA DA PARTILHA DOS 8 PÃES	
Três dias depois, aproximávamos das ruínas de pequena aldeia – denominada Sippar[12] – quando encontramos, caído na estrada, um pobre viajante, roto e ferido. Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua aventura. [...] ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa: - Trazeis, por acaso, ó mulçumanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase, quase a morrer de fome! - Tenho, de resto, 3 pães – respondi. - Trago ainda 5! – afirmou, a meu lado, o Homem que Calculava. - Pois bem – sugeriu o cheique[13] –, juntemos esses pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer! (TAHAN, 1983, p. 26-27)	Deux Arabes, l'un portant 5 pains, l'autre 3 pains, rencontrent dans la campagne un voyageur riche et affamè. Ils dèjeunent ensemble, puis le voyageur, pour prix de son repas, leur donne 8 pièces d'or. Comment faire le partage? (FOURREY, 1899, p. 160)[14] Chacun son écot. – Trois personnes dînent ensemble, la première fournit 5 plats, la deuxième 3 plats, la troisième ne fournit rien. Les frais étaient communs, la troisième donne 8 francs pour payer sa part. Que revient-il à chacune des deux autres, si l'on suppose que les plats fournis coûtent le même prix? Problème d'origine arabe (BOUCHENY, 1939, p. 62)[15] Un chasseur a affamé rencontre deux bergers qui consentent à partager avec lui des petits fromages qu'ils allaient manger. L'un avait 5 fromages el l'autre 3. En partant, le chasseur leur laisse 8 francs pour payer les fromages. Comment doil être partagée cette somme? (BALL, 1907, p. 111)[16]

Continua...

12 "Antiga Aldeia nos arredores de Bagdá" (TAHAN, 1983. p. 27)

13 "Termo de respeito que se aplica, em geral aos sábios, religiosos e pessoas respeitáveis pela idade ou posição social" (TAHAN, 1983, p. 27).

14 Dois árabes, um portando 5 pães e os outros 3, encontram no campo um viajante rico e faminto. Eles jantaram juntos e, em seguida, o viajante, pelo preço de sua refeição, lhes dá 8 peças de ouro. Como fazer a partilha?

15 Cada um com seu quinhão - Três pessoas jantam juntas, a primeira fornece 5 pratos, a segunda 3 e a terceira, nenhum. Como as taxas eram comuns, o terceiro dá 8 francos para pagar sua parte. O que cabe a cada um dos outros dois, supondo que os pratos tem o mesmo preço? Problema de origem árabe.

16 Um caçador faminto conhece dois pastores que concordam partilhar com ele pequenos queijos que eles comeriam. Um tinha 5 queijos e o outro 3. Ao sair, o caçador lhes deixa 8 francos para pagar o queijo. Como deve ser partilhada essa soma?

Continuação...

O PROBLEMA DOS 21 VASOS	
[...] Disse o cheique, apontando para os três mulçumanos: - Aqui estão, ó Calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora um dos problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte: - Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composto de 21 vasos iguais, sendo: 7 cheios 7 meio cheios 7 vazios. Querem, agora, dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade, a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó Calculista, obter uma solução para este problema? (TAHAN, 1983, p. 62)	Un vigneron laisse en mourant à ses trois enfants 21 tonneaux de même capacité dont 7 pleins de vin, 7 demi-pleins et 7 vides. Ne possédant aucune mesure, comment devront-ils s'y prendre pour que chacun d'eux ait la même quantité de liquide et le même nombre de tonneaux? (FOURREY, 1899, p. 160)[17] Le partage du vin et des tonneaux. – Distribuer entre 3 personnes vingt et un tonneaux, dont sept pleins, sept vides et sept à moitié pleins, en sorte que chacune ait la même quantité de vin et de tonneaux (BOUCHENY, 1939, p. 57)[18] To distribute among 3 persons, 21 casks of wine, 7 of them full, 7 of them empty, and 7 half full, so that each shall have same quantity of wine, and the same number of casks (OZANAN, 1840, p. 81)[19]

Continua...

17 Um viticultor deixa, ao morrer, para seus três filhos, 21 barris de mesma capacidade, 7 cheios de vinho, 7 meio cheios e 7 vazios. Não tendo medidas, como eles farão para que cada um deles tenha a mesma quantidade de líquido e o mesmo número de barris?

18 A partilha do vinho e dos barris. Distribua entre tr s pessoas vinte e um barris, sete cheios, sete vazios e sete meio cheios, de tal modo que cada uma tenha a mesma quantidade de vinho e barris.

19 Distribuir entre 3 pessoas, 21 barris de vinho, 7 deles cheios, 7 deles vazios e 7 meio cheios, para que cada uma tenha a mesma quantidade de vinho e o mesmo nœmero de barris.

Continuação...

O PROBLEMA DO JOGO DE XADREZ	
[...] Vou, pois aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo. - Grãos de trigo? – estranhou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. – Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda? - Nada mais simples – elucidou Sessa. – Dar-me-eis um grão pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última do tabuleiro.	Un auteur arabe, Al Sephadi, rapporte que le roi des Perses ayant demandé à Sessa, l'inventeur du jeu des échecs, quelle récompense il souhaitait. Sessa répondit qu'il désirait un grain de blé pour la 1º case de l'échiquier, 2 pour la 2º, 4 pour la 3º et ainsi de suite, en doublant toujours jusqu'à la 64º case. Le roi, parait-il, sourit à cette demande et grand fut son étonnaement quand il apprit qu'elle ne pouvait être satisfaite (FOURREY, 1899, p. 158)[20]. Les grains de blé et le jeu d'échecs. - Un auteur árabe, Al-Sephadi, raconte que Sessa ayant inventé le jeu d'echecs fut présenté à son maítre, roi de Perse. Pour le récompenser, celui-la promit de lui accorder ce qu'il désirerait. Le mathématicien demanda qu'il lui fût donné un grain de blé pour la première case du jeu, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, 8 pour la quatrième et ainsi de suite jusqu'à la dernière case (on sait que le jeu d'échecs en renferme 64). Le prince s'indigna d'une demande qu'il jugeait indigne de sa libéralité et fut bien étonné lorsqu'il apprit qu'il lui serait impossible de la satisfaire (BOUCHENY, 1939, p. 94)[21]

20 Um autor árabe, Al Sephadi, relata que o rei dos persas perguntou a Sessa, o inventor do jogo de xadrez, que recompensa ele queria. Sessa respondeu que queria um grão de trigo para o primeiro compartimento do tabuleiro de xadrez, 2 para o 2º, 4 para o 3º e, assim por diante, dobrando sempre até o 64º compartimento. O rei, ao que parece, sorriu a esse pedido e grande foi o seu espanto quando soube que n‹o poderia satisfazê-lo.

21 Grãos de trigo e o jogo de xadrez. - Um autor árabe, Al-Sephadi, conta que Sessa, tendo inventado o jogo de xadrez, foi apresentado a seu mestre, rei da Pérsia. Para recompensá-lo, aquele prometeu dar o que ele quisesse. O matemático pediu que lhe dessem um grão de trigo para o primeiro compartimento do jogo, 2 para o segundo, 4 para o terceiro, 8 para a quarta e, assim sucessivamente, até o último compartimento (sabemos que o jogo xadrez contém 64). O príncipe ficou indignado com um pedido que considerava indigno de sua liberalidade e ficou surpreso ao saber que lhe seria impossível satisfazê-lo.

Peço-vos, ó Rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei! (TAHAN, 1983, p. 134)	A courtier having performed some very important service to his sovereign, the latter, wishing to confer on him a suitable record, desired him to ask whatever he thought proper, promising that it should be granted. The courtier, who too well acquainted with the Science of numbers, only requested that the monarch would give him a quantity of wheat equal to that which would arise from one grain doubled sixty three times successively. What was the value of the reward? (OZANAN, 1840, p. 37)[22]

Fontes: OZANAM (1840); FOURREY (1899); BALL (1907); BOUCHENY (1939); TAHAN (1983).

Comparando cada um dos quatro problemas elencados, no Quadro 1, note-se que Fourrey (1899) e Boucheny (1939) operaram com 17 camelos; Ball (1907) com a mesma quantidade, entretanto, preferiu ovelhas e Tahan (1983) com 35 camelos. Consequentemente, outros modelos poderiam ser elaborados, independentes de serem com camelos, ovelhas ou quaisquer outras espécies, desde que sequenciar as possíveis quantidades para a partição da herança, por exemplo, (17, 35, 71, 143, ...), com o intuito de generalizá-la, seja o mote em questão. No caso dos viajantes, os mesmos autores, apesar de preservarem a porção a ser dividida, optaram por partilhar pães (Fourrey, 1899; Tahan, 1983); refeições (Boucheny, 1939) e pequenos queijos (Ball, 1907).

22 Um cortesão, tendo prestado algum serviço muito importante ao seu soberano, e este, desejando lhe conferir um registro adequado, ordenou-lhe perguntar tudo o que julgasse apropriado, prometendo-lhe que seria concedido. O cortesão, que conhecia muito bem a ciência dos números, apenas solicitou que o monarca lhe desse uma quantidade de trigo igual à que surgiria de um grão dobrado sessenta e três vezes sucessivamente. Qual foi o valor da recompensa?

Ao tratarmos acerca do preenchimento do tabuleiro de xadrez, observamos que todos os autores o fizeram com grãos de trigo e, trouxeram para seus enunciados os personagens: Rei da Pérsia; *Al Sephadi*, o escritor árabe (Fourrey, 1899; Boucheny, 1939); *Sessa*, o inventor do jogo (Fourrey, 1899; Boucheny, 1939; Tahan, 1983); o cortesão, o soberano/monarca (Ozanam, 1840); o matemático (Boucheny, 1939).

Exceto Tahan (1983), que se utilizou de vasos, os demais - Ozanam (1840); Fourrey (1899); Boucheny (1939) – dispuseram de barris e, todos, permaneceram com o mesmo número de objetos e volumes, bem como de filhos, amigos ou pessoas, em prol de uma recompensa ou herança. À página 309, Malba Tahan (1983) traz duas referências com características muito próximas a esse problema, mas que dele se distancia ao propor procedimentos que exigiriam outro tipo de raciocínio:

Jules Regnault - Paris, 1952, p. 421[23]:

> Dividir 24 vasos por três pessoas, sendo 5 cheios, 8 vazios e 11meio cheios

Claude-Marcel Laurent – Paris, 1948, p. 42[24]:

> Um mercador tem um vaso com 24 litros de vinho. Quer repartir esse vinho por 3 sócios, em 3 partes iguais, com 8 litros cada uma. O mercador só dispõe de 3 vasilhas vazias, cujas capacidades são respectivamente: 13 litros, 11 litros e 5 litros. Usando essas 3 vasilhas, como poderá ele dividir o vinho em 3 porções de 8 litros cada uma?

---

23 *Les Calculateurs* (Calculadoras).

24 *Problèmes amusants, Un partage difficile* (Problemas divertidos, uma partilha difícil).

Outra versão similar a este problema, um tanto mais antiga, pode ser encontrada em *Propositiones ad acuendos iuvenes*[25], de Alcuíno de Yorque (735-804)[26]:

> [...] certo pai morreu e deixou como herança para os seus três filhos 30 vasilhas de vidro, das quais 10 estavam cheias de óleo; outras 10 meias cheias, enquanto que outras 10 estavam vazias. Deixe-o dividir, ao que pode, o óleo e os frascos de tal forma que cada um dos três filhos receba uma parte igual dos bens, tanto do óleo como das vasilhas.

Da mesma forma que se torna possível trabalhar outros modelos para a partilha dos “camelos-ovelhas”, aqui também poderemos investigar certas regularidades, cuja manutenção da divisão equânime seja verificada, tal como explorar conceitos matemáticos e diferentes soluções. “É esse, sem dúvida, um dos problemas mais famosos nos largos domínios da matemática recreativa” (TAHAN, 1983, p. 314).

Não seria, sem razão, tal assertiva, haja vista, sua predileção pelo tema e admiração por aqueles que exploraram conceitos e definições da aritmética, geometria, álgebra por meio de entretenimentos. Para ele,

---

25 Proposições para instruir os jovens.

26 “[...] nasceu em uma família de alto escalão que morava perto da costa leste da Inglaterra. Enviado para a cidade de York, Tornou-se aluno na escola da catedral da cidade. Em 781, Alcuin aceitou um convite de Carlos Magno para ir a Aachen para uma reunião dos principais estudiosos da época. Nesta reunião, ele foi nomeado diretor da Escola do Palácio de Carlos Magno, em Aachen, e lá desenvolveu o minúsculo carolíngio, uma escrita clara que se tornou a base da maneira como as letras do atual alfabeto romano são escritas” (http://jnsilva.ludicum.org/HMR14_15/Alcuin.pdf).

> Não poucos foram os matemáticos, de alto renome na História, que tiveram a atenção vivamente voltada para as curiosidades e sutilezas relacionadas com as recreações matemáticas. Leibniz, Euler, Fermat, Moivre, Sylvester, Hamilton e muitos outros deixaram até estudos e análises notáveis sobre as questões que envolviam unicamente jogos e recreações matemáticas (TAHAN, 1941, p.9).

Corroborando o discurso expresso, no fragmento acima, queremos destacar três assuntos tratados por Euler; Fermat, em parceria com Pascal, e Hamilton. Respectivamente, O *problema das pontes de Königsberg;* O *problema dos pontos* e O *jogo hamiltoriano*.

O *problema das pontes de Königsberg* investiga um conjunto de sete pontes que conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens do Rio Pregel, como se pode ver na figura a seguir:

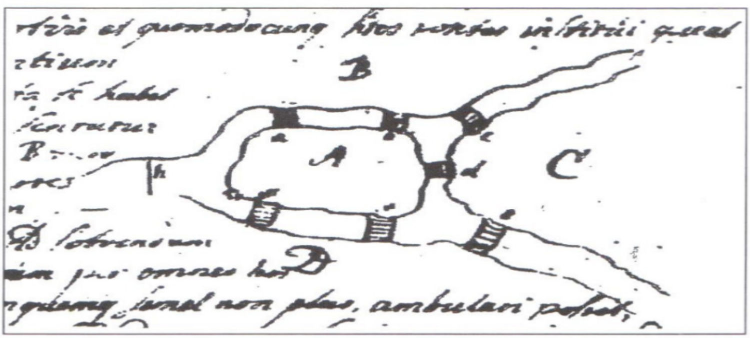


Figura 1. Desenho das sete pontes de Königsberg.
Fonte: Flood & Wilson (2013).

Com o intuito de responder a uma inquietação que assolava os habitantes daquela cidade há tempos - fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida – Leonard

Euler (1707-1788), em 1735, demonstrou a impossibilidade da travessia, eliminando alguns detalhes geométricos, tais como comprimento das pontes, a sua forma, o tamanho das ilhas, originando, com essa proeza, a *Teoria dos Grafos* (SILVA, 2004; FLOOD & WILSON, 2013).

O *problema dos pontos*, inicialmente, investigado por Luca Paccioli, em seu *Summa de arithmetica, geometria, Proportioni et proportionalita*, de 1494, como também por Cardano e Tartaglia, instiga "[...] que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo" (EVES, 2004, p. 365). Entretanto, sem grandes avanços, somente em 1654, Chevalier de Méré[27] o propôs a Blaise Pascal (1623-1662) que se interessou pelo problema e o apresentou para Pierre de Fermat (1601-1665). Após intensa correspondência mantida entre eles, além de chegaram a um resultado correto, principiaram os fundamentos da *Teoria das Probabilidades*.

O *jogo hamiltoriano,* inventado por William Rowan Hamilton (1805-1865), "consiste em determinar um caminho ao longo das arestas de um dodecaedro regular passando uma, e uma só vez, em cada um dos vértices do poliedro" (EVES, 2004, p.580), os quais recebem o nome de uma cidade, por exemplo: Dublin, Roma, Paris, Madri, entre outras e, por este motivo, tornou-se também conhecido por *Viagem ao Mundo*, (GUZMÁN, 1991). Algo bastante similar ao Grafo de Euler:

27 "[…] hábil e experiente jogador, cujo raciocínio teórico sobre o problema não coincidia com suas observações […]" (EVES, 2004, p. 365)

Figura 2. Grafo equivalente ao Jogo Hamiltoriano.
Fonte: Guzmán (1991).

Deve-se, também, a Hamilton, segundo Tahan (1941, o estudo dos Quarténios, cuja gênese remonta de seus intentos para se "[...] definir uma multiplicação para os tripletos (x, y, z) com as mesmas propriedades da multiplicação dos pares numéricos (x, y) e que pudesse ser interpretada via rotações no espaço, tal como a multiplicação de pares numéricos, em relação ao plano. (NEVES, 2008, p. 54)

Outros tantos, como apontado pelo próprio Tahan (1941), que se dedicaram ao campo dos problemas recreacionais, poderiam, sem dúvida alguma, agregar sua lista. Muito antes da era cristã, Arquimedes (287a.C-212a.C), por exemplo, natural de Siracusa, desenvolveu um quebra-cabeça, *Loculus Archimedius*[28], formado por 14 peças, cujo objetivo era o de reorganizá-las para a obtenção de um quadrado, cuja ordenação das peças pode

28 Caixa de Arquimedes, em Latim, ou Stomachion/Ostomachion/ syntomachion - raiz grega (SEGANTINI, 2015).

suscitar diferentes disposições e, dessa forma, resultar uma gama de soluções:

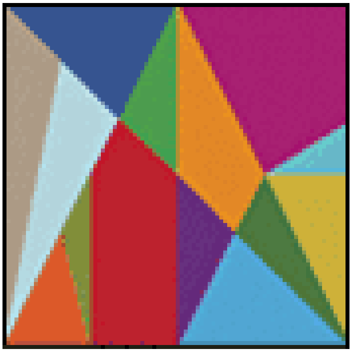


Figura 3. Jogo de Arquimedes.
Fonte: Lopes (2012).

Executando um salto temporal significativo, nos deparamos com o italiano Leon Battista Alberti (1404-1472) que, em suas "páginas de entretenimentos matemáticos", denominação dada à obra *Matemática Lúdica* ou *Ludi rerum mathematicarum*, na versão em latim, dedicada ao príncipe Meliaduse[29], trouxe à tona, em ~1448/1450, "[...] 20 resoluções de problemas referentes à Arquitetura, construção civil ou militar, topografia ou navegação [...]", subdivididas em duas partes: a primeira tratando acerca da "[...] medição no espaço (comprimento, largura, altura e profundidade) [...]" e a segunda, "[...] alguns aspectos referentes à agrimensura, ao nivelamento de solo e à elaboração de mapas", como apontam Pereira e Tavares (2017, p. 26). Para Cesana (2013, p. 91), D'Amore (2005) colocou em dúvida se esta obra

29 "O marquês era muito entusiasmado pela ciência, mas as suas funções não lhe permitiam fazer uso da forma que ele desejava. Quando tornou-se amigo de Alberti lhe fez o pedido pela obra. Mas apenas 15 anos depois a obra foi publicada" (PEREIRA & TAVARES, 2017, p. 5).

“[...] fora um mero divertimento intelectual ou um trabalho a ser contado entre os textos mais representativos da época”, ante a produção multifacetada de seu autor.

Um tanto mais tarde, Claude-Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638), em 1612, publicou a 1ª edição do livro *Problémes Plaisants et Délectables qui se font par les nombres*[30] e, após quase 300 anos, em 1884, seus leitores foram contemplados com uma 5ª edição; Jean Leucheron, em 1624, lançou a obra *Récréations Mathématiques,* reimpressa em 1626; e mais adiante, Walter Willian Rouse Ball escreveu *Mathematical Recreations and Essays,* cuja 1ª edição data de 1892, atingindo a 12ª em 1974. Devido a algumas correções e/ou ampliações feitas por Harold Scott MacDonald Coxeter, a 13ª edição, de 1987, contou com sua coautoria.

Nos entremeios dos séculos XIX e XX, certificamo-nos de que os americanos Samuel Loyd (1841-1911)[31] e Martin Gardner (1914-2010)[32], o primeiro matemático; o segundo, escritor de matemática recreacional, apresentavam alguns pontos em comum. Ambos, além do entusiasmo por enigmas matemáticos, despertaram o gosto por quebra-cabeças, ainda, crianças. Loyd, conforme O’Connor & Robertson (2003), tornou-se enxadrista aos 10 anos e, aos 14, teve seu primeiro problema de xadrez publicado na *New York Saturday Courier.* Posteriormente, trabalhou como colunista na *Scientific American Supplement* e exerceu

30 *Problemas Agradáveis e Divertidos que podemos criar com os números* (Tradução livre).

31 Quebra-cabeças das 15 pastilhas; Charada de Boss; O sofisma 64 = 65, entre outros.

32 Alguns de seus trabalhos: *Mathematics, Magic and Mystery* (1956); *Aha! Insight* (1978), *Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight* (1982); *Puzzles from Other Worlds* (1984); *Entertaining Mathematical Puzzles* (1986), *Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers* (1988) (SEGANTINI, 2015).

esta função em outros veículos de comunicação. Postumamente, ocorreu a publicação da *Cyclopaedia de 5000 Quebra-cabeças, truques e enigmas de Sam Loyd*, com a qual Gardner fora presenteado pelo pai. Muito provavelmente, tenha sido esta obra a responsável por ele se tornar um dos grandes divulgadores dos feitos de Loyd, tanto que, em 1959, publicou *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* e, no ano seguinte, *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*. Gardner, durante 25 anos escreveu a coluna *Mathematical Games* para a revista *Scientific American*, cujo conteúdo, posteriormente, fora transformado em livro (O'CONNOR & ROBERTSON, 2010).

Ainda, no século XX, o russo Yakov Perelman (1882-1942) tornou público, em 1913, o livro *Física Recreativa*, subsequentemente a este, Álgebra Recreativa, *Aritmética Recreativa*, *Geometria Recreativa*, *Astronomia Recreativa*, *Matemáticas Recreativas*, qualificando-as como obras de grande destaque e importância, haja vista, ultrapassarem 300 edições, com tiragem de, aproximadamente, 15 milhões de exemplares, além de serem traduzidas para diversas nacionalidades, entre elas, alemã, búlgara, checa, espanhola, finlandesa, francesa, inglesa, italiana e portuguesa (BARROS, 2001).

Ante a este breve percurso histórico, a Matemática Recreativa acaba por se enquadrar em duas categorias: [1] atividades de caráter lúdico e pedagógico (COSTA, 2014), ou, simplesmente, tal qual Lopes (2012), [2] realizadas por prazer ou satisfação em jogar, pensar, se divertir, desenvolver a mente.

Seja como for, faz-se notória a importância atribuída a esta, digamos, subárea da Matemática ou Tendência da Educação Matemática, no âmbito do processo educacional, tanto para quem ensina quanto para quem aprende Matemática, vis-à-vis suas diversas vertentes, nomeadamente a cultural, histórica e recreativa. Como vimos, a Teoria dos Grafos das Probabilidades, dos Jogos principiaram, sobretudo, a partir de situações que não se atrelavam ao, academicamente, esperado, mas sim a movimentos que requeriam certa criatividade, perseverança, disponibilidade, estendidas, como afirma Gallagher (1997), à Teoria dos Números, da Topologia, por exemplo.

Nesse sentido, a Matemática Recreativa configura-se como um viés bastante interessante para matemáticos e educadores matemáticos, uma vez que oportuniza a sistematização e produção do conhecimento matemático, de tal maneira que, diferentes frentes acadêmicas, tais como congressos, colóquios ou encontros, visibilizam discussões sobre a temática, por meio de Grupos de Estudo (GT) permanentes, como é o caso dos ICME's – International Congress on Mathematical Education[33] e dos RCM's – *Recreational Mathematics Colloquium*[34].

Não poderia ser diferente aqui no Brasil. Aqui ocorre uma série de eventos regionais e locais, ligados à História da Matemática e da Educação Matemática, os quais promovem a apresentação de pesquisas sobre variados temas e, entre eles, sempre surge a figura de Malba Tahan como o grande divulgador da *Matemática Recreativa* em solo brasileiro. Com mais de uma centena de livros

33 ICME – 1, 1969 – Lyon (France); ICME – 2, 1972 – Exeter (UK); ICME – 3, 1976 – Karlsruhe (Germany); ICME – 4, 1980 – Berkeley (USA); ICME – 5, 1984 – Adelaide (Australia); ICME – 6, 1988 – Budapest (Hungary); ICME – 7, 1992 – Québec (Canada); ICME – 8, 1996 – Sevilla (Spain); ICME – 9, 2000 – Tokyo (Japan); ICME – 10, 2004 – Copenhagen (Denmark); ICME – 11, 2008 – Monterrey (México); ICME – 12, 2012 – Seoul (Korea); ICME – 13, 2016 – Hamburg (Germany); ICME – 14, 2020 – Shangai/China.

34 I RCM – University of Évora, 2009; II RCM, 2011; III RCM, 2013 – Universidade de Açores, Ponta Delgada; IV RCM, (2015) – Museu Nacional de História Natural e da Ciência, Lisboa; V RCM, 2017 – Museu Nacional de História Natural e da Ciência, Lisboa; VI RCM, 2019 – Museu Nacional de História Natural e da Ciência, Lisboa; VII RCM, 2021 – Ilha de São Miguel, Açores. 2021 (http:// ludicum.org).

publicados, muitos deles destinados a enigmas, desafios ou curiosidades matemáticas, *O Homem que Calculava* permanece como o carro-chefe de sua produção.

Como dito anteriormente, esta obra, composta por enredos que narram as peripécias de Beremiz Samir, um prodigioso calculista, faculta ao processo educacional delinear, conforme Dalcin (2002, p. 10), o "[...] gênero literário como um importante veículo para a aprendizagem prazerosa e significativa". De acordo com a autora, trata-se de um livro paradidático que tanto pode auxiliar professores, nas aulas de Matemática, ou mesmo aperfeiçoa-los, quanto divulgar pesquisas e relatos de experiências.

Segantini (2015) dialoga, em sua pesquisa, com outros trabalhos que utilizaram o livro em questão e identifica uma série de ações articuladas para o desenvolvimento do conteúdo matemático. Segundo a pesquisadora, tanto Valentin (2010) quanto Paez (2014) consideraram a importância dos textos literários, os quais, para esta, permitem aos alunos relacionar os conteúdos escolares com suas práticas cotidianas e, para aquele, permitem aos atores envolvidos aliá-los à formação de uma educação matemática; Costa (2011) teatralizou alguns dos episódios trazidos nos capítulos; Roberto Filho (2013) destacou a tríade Recreações Matemáticas, Histórias, Problemas e Curiosidades como pilar da prática pedagógica de Malba Tahan, Balladares (2014) propôs a produção de histórias em quadrinhos adaptadas às características sócio-culturais de uma Colônia de Pescadores; Bispo (2014), a partir do problema dos Quatro Quatros, ressaltou-o como um método eficiente para melhorar o rendimento escolar.

Tais investigações denotam um conjunto de intervenções possíveis, a partir do paradidático *O Homem que Calculava*, que vai desde uma simples leitura às interpretações textuais mais fecundas e, nestes entremeios, a elaboração de algoritmos e soluções das histórias-problema, inseridos nas narrativas sugeridas. Em seus, mais ou menos, 81 anos de existência, esta produção continua propagando mensagens, que vão além da curiosidade e diversão, do científico e do pedagógico, bem como explicita as intencionalidades por detrás dos discursos enredados por seu autor e, ao mesmo tempo, desvela algumas de suas singularidades.

Matemática Recreativa: Uma das Muitas Facetas de Malba Tahan

> [...] uma anedota histórica, uma curiosidade geométrica, uma disposição numérica imprevista [...] tornam o ensino gracioso e leve; atraem, para a Ciência, a simpatia do estudante (TAHAN, 1962, p. 209-10).

Comprovadamente, uma vez mais, avistamos a Matemática Recreativa implicada no discurso de Malba Tahan, prática que o acompanha desde a década de 1920, como podemos constatar em algumas de suas obras que trazem, no próprio título, denominações que, facilmente, nos endereçam a esta Subárea ou Tendência. Vejamos:

Quadro II. Relação de algumas obras, cujos títulos mencionam tratar-se da Matemática Recreativa (1934-1975).

<table>
<tr><th>Obras</th><th>Ano</th><th>Editora</th></tr>
<tr><td>Matemática Divertida e Curiosa</td><td>1934</td><td>Calvino Filho</td></tr>
<tr><td>Matemática Fácil e Atraente</td><td>1938</td><td>ABC</td></tr>
<tr><td>Histórias e Fantasias da Matemática</td><td>1939</td><td rowspan="7">Getúlio Costa</td></tr>
<tr><td>Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática</td><td>1940</td></tr>
<tr><td>Matemática Divertida e Pitoresca</td><td>1941</td></tr>
<tr><td>Matemática Divertida e Fabulosa</td><td>1942</td></tr>
<tr><td>Matemática Divertida e Diferente</td><td rowspan="2">1943</td></tr>
<tr><td>Diabruras da Matemática</td></tr>
<tr><td>As Grandes Fantasias da Matemática</td><td>1945</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Obras</th><th>Ano</th><th>Editora</th></tr>
<tr><td>Matemática Suave e Divertida</td><td>1951</td><td>Aurora</td></tr>
<tr><td>Folclore da Matemática</td><td>1954</td><td>Conquista</td></tr>
<tr><td>Matemática Recreativa – Volume I</td><td>1960</td><td rowspan="5">Saraiva</td></tr>
<tr><td>Matemática Divertida e Delirante</td><td>1962</td></tr>
<tr><td>As Maravilhas da Matemática</td><td>1964</td></tr>
<tr><td>Matemática Recreativa – Volume II</td><td rowspan="2">1965</td></tr>
<tr><td>Recreações Matemáticas: casos, histórias e problemas</td></tr>
<tr><td>O jogo do Bicho à luz da Matemática</td><td>1975</td><td>Grafipar</td></tr>
</table>

Fonte: Extraído de Siqueira Filho (2008).

Outras produções, apesar de não apresentarem estas mesmas características, abordam situações-problema, enigmáticas, jogos que provocam a imaginação do leitor de forma humorada, curiosa ou lúdica, tais como:

Quadro III. Relação de Outras Obras que Incluem Recreações Matemáticas (1931-1969).

Obras	**Ano**	**Editora**
Revista Brasileira de Matemática	1929	
Céu de Allah	1931	Francisco Alves
O Homem que Calculava (2º edição)	1938	ABC
Revista Al-Karizmi, nº 1 e 2	1946	Getúlio Costa
Revista Al-Karizmi, nº 3 e 4	1946	Aurora
Revista Al-Karizmi, nº 6,7 e 8	1947	Aurora
Meu Anel de Sete Pedras	1955	Conquista
Revista Lilaváti	1957	Freitas Bastos
Os Números Governam o Mundo	1965	Edições de Ouro
O Problema das Definições em Matemática	1965	Saraiva
Numerologia	1969	Conquista

Fonte: Extraído de Siqueira Filho (2008).

Não fazendo parte das duas categorizações, apresentadas nos Quadros II e III, assinalamos o volume 2 do livro *Didática da Matemática*, publicado em 1962, no qual Malba Tahan reservou 1/3 de seu conteúdo para tratar, com exclusividade, acerca da importância didática dos Jogos e das Recreações Matemáticas e os distribuiu em cinco capítulos: XXII. O Jogo – O Jogo e a Criança – Teorias do Jogo; XXIII. Funções secundárias do Jogo de Classe – O Jogo e o trabalho – Os objetivos morais ou o jogo de classe – O Jogo de Classe e suas finalidades didáticas; XXIV. O Jogo de Classe em Matemática; XXV. A Metodologia do Jogo de Classe em Matemática; XXVI. Recreações Matemáticas.

Com relação ao último capítulo, o autor (1962, p. 210) enfatiza que "Dentro da moderna orientação do ensino, cumpre ao professor conhecer algumas recreações matemáticas, pois terá, muitas vezes, necessidade de aproveitá-las para motivar seus alunos e tornar mais agradável e interessante a aprendizagem da Ciência". Para tanto, propôs algumas curiosidades matemáticas que poderão ser desenvolvidas pelos estudantes:

Quadro IV. Curiosidades matemáticas e suas finalidades didáticas.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS		
Conceitos	**Exemplos**	**Finalidades didáticas**
Produtos Curiosos	12345679 x 9 = 111111111 12345679 x 18 = 222222222 12345679 x 27 = 333333333 12345679 x 36 = 444444444	Despertar o interesse dos alunos para o cálculo numérico (p. 210).
Números e Expressões Palíndromas	• 1551 • 42024 • 16 + 61 = 77 • 14 x 82 = 28 x 41	Relacionar o ensino da Matemática com o ensino da Linguagem (p. 211).

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS		
Conceitos	**Exemplos**	**Finalidades didáticas**
Número por Extenso	• Qual é o número que exprime o seu próprio número de letras? *Resposta: Cinco* • Qual é o número, entre zero e mil que se escreve com o menor número de letras? *Resposta: Um* • Qual é o número, entre zero e mil que se escreve com o maior número de letras? *Resposta: Quatrocentos e cinquenta e quatro*	Chamar a atenção dos alunos para a grafia de certos números (escritos por extenso). Despertar, nos alunos, interesse por questões da linguagem diretamente relacionadas com a Matemática (p. 213).
Somando Algarismos	• O quadrado de 9 é o número 81 cuja soma dos algarismos é igual a 9. • A quinta potência de 28 é o número 172 103 608 cuja soma dos algarismos é 28.	Fixar noção de potência de um número (p. 215).
Malabarismos Numéricos	Escreva um número qualquer de três algarismos que seja divisível por três; à esquerda desse número escreva a sua terça parte. O novo número formado será divisível por 17.	Interessar o aluno em problemas relacionados com a Aritmética Teórica (p. 216).
Adivinhação	Peça a pessoa (cuja idade desejou conhecer) que escreva o número de ordem do mês em que nasceu, e a seguir efetue com esse número as seguintes operações: multiplique por 2, some 5, multiplique por 50, some a idade atual, tire 360, e some 110. O número resultante dará o mês em que a pessoa nasceu, e a idade que tem; a idade é indicada pelos dois algarismos à direita e a ordem do mês pela parte restante à esquerda.	Apresentar aos alunos uma recreação numérica (p. 218).
Cubos Singulares	Observe os cubos: $17^3 = 4913$ $18^3 = 5832$ $26^3 = 17576$ Temos que a soma dos algarismos de 4913 é 17; a soma dos algarismos de 5832 é 18 e do número 17576 é 26.	Fixar noção de cubo de um número (p. 219).

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS		
Conceitos	**Exemplos**	**Finalidades didáticas**
Problema dos Pés e Cabeças	O Sr. R. Bruno embarcou no último navio levando para o Jardim Zoológico de Lisboa uma partida de cisnes, cobras e girafas, sendo um total de 28 animais e 52 pés. Em viagem, vendeu a metade dos cisnes e uma girafa morreu. Ao chegar ao destino verificou que o total de pés estava reduzido a 40. Pergunta-se: Quantos cisnes, cobras e girafas levava o Sr. Bruno quando embarcou? *Resposta: 9 girafas, 8 cisnes e 11 cobras.*	Exercício de raciocínio – Operações elementares (p. 221)

Fonte: Extraído de Tahan (1962)

Outrora anunciado, em linhas atrás, Malba Tahan utilizou outros veículos de comunicação para divulgar uma Matemática menos árida e interagir com seus leitores. Por ora, faremos uma breve menção acerca do Jornal Última Hora[35] que, em uma de suas páginas, trouxe a seção *Malba Tahan – ao alcance de todos – Matemática Recreativa*. Destarte, Tahan solicitava a seu público problemas e curiosidades inéditos que abordassem "[...] variados conteúdos matemáticos, os quais, se resolvidos corretamente, premiavam o solucionador com livros [...]" de sua autoria (SIQUEIRA FILHO, 2015, p.14) e como discordava dos algebrismos em excesso, valorizava, especialmente, as soluções aritméticas.

35 Fundado em 12 de junho de 1951, por Samuel Wainer (SODRÉ, 1999).

Sendo assim, uma série de concursos[36] foi lançada de 18 de março a 18 de dezembro de 1972[37] e, de todos eles, acreditamos que o problema do Concurso de número 9, cujo enunciado, veiculado em 13 de maio, sugere escrever expressões numéricas iguais a 10, utilizando-se apenas quatro quatros, sem outro número ou letra, acrescidos dos sinais de adição, subtração, multiplicação, divisão, raiz quadrada e fatorial, seja os mais conhecido por professores e alunos entretidos com desafios matemáticos, haja vista,

---

36 **Concurso nº 1.** Um Polígono Exquisito. **Concurso nº 2.** A Multiplicação Reconstituída. **Concurso nº 3.** Um Erro Grave Na Estrada. **Concurso nº 4.** Multiplicação Singular. **Concurso nº 5.** A Idade da Professora Nadima. **Concurso nº 6.** Caçando Algarismos. **Concurso nº 7.** Curva Estranha Muito Conhecida. **Concurso nº 8.** O Heptágono da Perfeita Harmonia. **Concurso nº 9.** Dez com Quatro Quatros. **Concurso nº 10.** O Problema do Garagista. **Concurso nº 11.** O Problema do Leiteiro. **Concurso nº 12.** Os Sete Tretaminós. **Concurso nº 13.** Um Erro Imperdoável. **Concurso nº 14.** A Área do Terreno. **Concurso nº 15.** O Peso de um Tijolo. **Concurso nº 16.** O Homem da Gravata Azul. **Concurso nº 17.** O Caso de Dona Jurema**. Concurso nº 18.** Problema dos Pés e Cabeças. **Concurso nº 19.** A Herança do Sheik. **Concurso nº 20.** Problema das Nove Adições. **Concurso nº 21.** Quatro Perguntinhas Numéricas. **Concurso nº 22.** Um Amontoado de Figuras. **Concurso nº 23.** As Três Noivas. **Concurso nº 24.** O Problema das Duas Velas. **Concurso nº 25.** A Idade da Mãe Paciente e Discreta. **Concurso nº 26.** O Problema da Bolsa Perdida. **Concurso nº 27.** O Problema das Sete Pilhas. **Concurso nº 28.** A Família Fagundes e sua Travessia. **Concurso nº 29.** O Problema da Casa Revendida. **Concurso nº 30.** Primeiras Noções de Palindromia. **Concurso nº 31.** Aritmética do Apagador. **Concurso nº 32.** O Problema da Galinha e Meia. **Concurso nº 33.** Uma Estrada em Ladeira. **Concurso nº 34.** A Frase de Dona Renata. **Concurso nº 35.** Figuras Equivalentes. **Concurso nº 36.** A Idade do Roberto. **Concurso nº 37.** No Ônibus das Oito Horas. **Concurso nº 38.** Um Passeio a Petrópolis. **Concurso nº 39.** O Professor e o Aluno. **Concurso nº 40.** O Horóscopo do Dr. Sérgio Lins

37 Ocorreu um erro na sequência numérica dos concursos. Assim sendo, os de números 32; 33; 34 e 35 foram publicados com uma numeração a menor. Fato, esse, corrigido no concurso 36. Porém, nos concursos 37; 38; 39 e 40 o erro retornou, com duas numerações a menor.

já ter aparecido n'*O Homem que Calculava* (SIQUEIRA FILHO, 2015).

Aproximando-nos de um desfecho e diante das colocações feitas ao longo desta narrativa temos a convicção de que a permanência de Malba Tahan, em tempo atual, se consolida em consequência de suas obras que continuam sendo editadas; dos eventos que disseminam as pesquisas realizadas por meio de uma vasta documentação devidamente tratada[38]; do Dia Nacional da Matemática, comemorado em seis de maio, data de seu nascimento, graças a lei n° 12.835, sancionada em 26 de junho de 2013 pela, então, Presidenta da República, Dilma Rousseff. Atos que demonstram, suficientemente, quem resistiu às intempéries do passar dos anos na relação "dialética" Criador e Criatura.

Surpreender o Brasil, um dos motes com que Mello se balizou para o emergir de sua "máquina de produção", expressão cunhada por Joaquim Inojosa, em seu discurso de posse, da cadeira nº 8, vagada pelo professor-autor, na Academia Carioca de Letras, intitulado *Malba Tahan: o mercador de esperança* (INOJOSA, 1975), denota que com ele (criatura) haveria a possibilidade, dele (criador), "[...] de se recriar, de se reinventar, de se ressignificar no cerne de suas práticas cotidianas" (SIQUEIRA FILHO, 2008, p. 190).

Para além do divertido e do didático, um caminhar paralelo, que paradoxalmente se entrecruza, forjou a constituição do autor-personagem frente à capacidade inventiva e criativa, de seu criador, consoante à leveza e destreza de sua criatura.

---

38 O acervo de Malba Tahan reúne milhares de documentos pessoais, como fotografias, diplomas, cadernos de viagem, recortes de jornal e obras manuscritas, administrado, desde 2010, pelo Centro de Memória da Educação da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Referências

ARQUIVO PESSOAL – IMT. Recortes de Jornal. **A União** - Lenda do Oásis, de Malba Tahan – Civilização Brasileira. João Pessoa, Parahyba: 13 de setembro de 1933.

ARQUIVO PESSOAL – IMT. **Discurso de Malba Tahan na ABL**, 1939.

ARQUIVO PESSOAL – IMT. **Documento sobre a vida e obra de Malba Tahan**. Elaborado por MESENTIER, Humberto, s/d.

BALLADARES, B. L. **Malba Tahan, Matemática e Histórias em Quadrinhos: Produção Discente de HQS em uma Colônia de Pescadores**. 2014. 185f. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2014.

BALL, Walter Willian Rouse. **Récréations Mathématiques:** Problèmes des temps anciens et modernes. Tradução de J. Fitz-Patrick. 10 ed. Paris: Librairie Scientifique Hermann et C.ie, 1907. Disponível em: < http://books.google.com>. Acesso em: 21 mar. 2015.

BARROS, P. **Yakov Isidorovich Perelman. 2001.** Disponível em <http://www.librosmaravillosos.com/biografia/biografia.html >. Acesso em 25 set. 2015.

BISPO. L. P. **O Efeito Transformador das Atividades Lúdicas nas Aulas de Matemática**. 2014. 82f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

BOUCHENY, Gaston. **Curiosités & Récréations Mathemátiques**. 6. ed. Paris: Larousse, 1939.

CESANA, Andressa. **Textos e contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento**. 2013. 233f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

COSTA, Cristiane. **Mil e uma Fábulas**: com uma série de lançamentos e reedições de clássicos como Malba Tahan, será aberto ao público hoje o primeiro Salão do Livro Para Crianças e Jovens no MAM, **Jornal do Brasil**, 06.11.1999.

COSTA, L. F. Desafios no Ensino de Matemática: A Didática de Malba Tahan e os PCN. In: Congresso Nacional de Educação Matemática – IX Encontro Regional de Educação Matemática. 2., 2011, Rio Grande do Sul. **Anais** eletrônicos ... Disponível em:<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE59.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2015.

COSTA, O. da. **A matemática recreativa no ensino básico**. 2014. 98f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores) - Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

DALCIN, A. **Um olhar sobre o paradidático de matemática**. 2002. 162f. Dissertação (Mestrado)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FARIA, Juraci Conceição. **A prática educativa de Júlio César de Mello e Souza Malba Tahan:** um olhar a partir da concepção de interdisciplinaridade de Ivani Fazenda. São Bernardo do Campo, SP: Universidade Metodista, 2004 (Dissertação de Mestrado).

FLOOD, R; WILSON, R. **A História dos Grandes Matemáticos**: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda. 2013.

FOURREY, Émile. **Récréations Arithmétiques**. Paris: Librairie Vuibert, 1899.

GALLAGHER, K. Resolvendo problemas com o uso da matemática recreativa. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 235-246.

GUZMÁN, M. de. **Aventuras Matemáticas**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1991.

HALLEWELL, Laurence. **O livro no Brasil**: sua história. São Paulo: Edusp, 2.ed., rev. e ampl., 2005.

INOJOSA, Joaquim. **Malba Tahan, o mercador de esperança**. Rio de Janeiro: Academia Carioca de Letras, 1975.

KOSHIYAMA, Alice Mitika. **Monteiro Lobato**: intelectual, empresário, editor. São Paulo: Edusp: Com-Arte, 2006.

LOPES, Maria Laura Mouzinho Leite. Entrevista. In: **Educação Matemática em Revista**. Ano VII, n. 8, jun/2000.

LOPES, A. J. **Dia da Matemática e a obra didática de Malba Tahan, para além do homem que calculava**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): Boletim n. 13. Brasília, 2012.

LORENZATO, Sergio. Malba Tahan, um precursor. *In*: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, ano 11, n. 16, p. 63-66, maio 2004.

MUSEU DA IMAGEM E DO SOM – MIS. **Depoimento de Malba Tahan**. Rio de Janeiro: 1973.

NEVES, Robson Coelho. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço**. 2008. 112f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2008.

O'CONNOR, J; ROBERTSON, E. F. **The MacTutor History of Mathematics archives**: Indexes of Biographies: Sam Loyd. 2003. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Loyd.html>. Acesso em: 12 out. 2015.

O'CONNOR, J; ROBERTSON, E. F. **The MacTutor History of Mathematics archives**: Indexes of Biographies: Martim Gardner. 2010. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gardner.html>. Acesso em: 12 out. 2015.

OLIVEIRA, Cristiane Coppe de. **Do menino "Julinho" a Malba Tahan:** uma viagem pelo Oásis do ensino da Matemática. UNESP, Rio Claro, 2001 (Dissertação de Mestrado).

OZANAM, Jacques. **Recreations in Mathematics and Natural Philosophy**. Translated from Montucla's edition: Charles Hutton, LL.D and F.R.S. Revised edition: Edward Riddle. London: Printed for Thomas Tegg, 1840.

PAEZ, G. R. **A produção de sentidos e significados matemáticos por estudantes do último ciclo do ensino fundamental por meio da leitura da obra "O homem que calculava"**. 2014. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

PEREIRA Ana Carolina Costa; TAVARES, Marina Oliveira. A UBP e sua inserção no ensino de Matemática: Uma proposta utilizando a obra Matemática Lúdica de Leon Battista Alberti (1404-1472**). BoEM**, Joinville, v.5. n.8, p. 21-36, jan./jul. 2017.

PESSOA, Fernando. *Livro do Desassossego*. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

ROBERTO FILHO, M. Júlio César de Mello e Souza – O Malba Tahan: O Homem que Calculava, a vida e o legado. 2013. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2013.

SILVA, J. N. **Matemática Recreativa**. 2004. Disponível em < http://ludicum.org/jogos/abstr/amazonas/ludusjogosamazonasmr-primeirojaneiro.pdf>. Acesso em 28 set. 2015.

SIQUEIRA FILHO, Moysés Gonçalves. **Ali Iezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan:** episódios do nascimento e manutenção de um autor-personagem. 2008. Tese (Doutorado em Educação

Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

SIQUEIRA FILHO, Moysés Gonçalves. **Os concursos de Malba Tahan veiculados na Última Hora em 1972**. São Paulo: Editora e Livraria de Física, 2015.

SEGANTINI, Clarice. **Problemas Recreativos na Obra "O Homem que Calculava", de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas**. 2015. 131 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica – UFES, 2015.

SILVA, Luzia Gabriele Maia. Vida e obra de Rosalina Coelho Lisboa: desafios e limiares do método biográfico In: **Anais**... XXVII Simpósio Nacional de História Conhecimento histórico e diálogo social. ANPUH. Natal/RN, 2013.

SODRÉ, Nelson Werneck. **História da Imprensa no Brasil**. 4. ed. Rio de Janeiro: Mauad, 1999.

TAHAN, M. **Contos de Malba Tahan**. Rio de Janeiro: Braslux, 1925. [Documento consultado na FUNDAÇÃO BIBLIOTECA NACIONAL – FBN].

TAHAN, M. **Matemática divertida e pitoresca**. Rio de Janeiro: Getúlio Costa, 1941.

TAHAN, M. **Didática da Matemática**. V.2. São Paulo: Saraiva, 1962

TAHAN, M. **O Homem que Calculava.** São Paulo: Círculo do Livro, 1983.

VALENTIM, M. A. **Literatura e Matemática**: O Homem que Calculava de Malba Tahan. 2010. 103f. Dissertação (Mestrado em Letras) – Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2010.

Sobre os Autores

Ana Carolina Costa Pereira tem pós-doutoramento em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP) e doutorado em educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). É docente Adjunta do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE e líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática. E-mail: carolina.pereira@uece.br.

Bernadete Morey tem graduação em Matemática pela Universidade Amizade dos Povos, mestrado em Matemática pela Universidade Amizade dos Povos e doutorado em Educação Matemática pela Universidade Amizade dos Povos (1992). Estágio pós-doutoral na UNESP-RC em História da Matemática (2010), Estágio pós-doutoral na Universidade de Penza, Rússia (2016) em História da Matemática. Estágio pós-doutoral (2017-2018) na Laurentian University, Sudbury, Canadá. Coordena o Grupo de Pesquisa Matemática e Cultura. Seus interesses em pesquisa são: 1. Teoria da Objetivação, uma teoria de ensino e aprendizagem sociocultural; 2. Relações entre a História da Matemática e a Educação Matemática; 3. Matemática Recreativa e Ensino de Matemática; 4. Matemática Medieval Islâmica.

Clarice Segantini é Mestra em Ensino na Educação Básica pela Universidade Federal do Espírito Santo – UFES; Licenciada em Matemática (UFES); Professora efetiva na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Nestor Gomes" (SEDU - Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo) e no Centro de Educação Infantil Municipal "Mundo do Saber" (Secretaria Municipal de São Mateus/ES); Membra do Grupo de Estudos em História da Educação Matemática (UFES, campus São Mateus). E-mail: claricesegantini@gmail.com.

Gabriela L. de Oliveira Lopes tem graduação em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (1997), Mestrado em Matemática (Álgebra) pela Universidade Federal de Minas Gerais (2000) e Doutorado em Educação (História da Matemática) pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professora Adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e Assessora Acadêmica do Centro de Ciências Exatas e da Terra desta instituição. Atua na Graduação Presencial e na Graduação à Distância (EaD-UAB). Coordenadora Local em Programas de Aperfeiçoamento do Ensino Médio (PAPMEM do IMPA); atuou como Coordenadora Local do Projeto "Brasil Alfabetizado", um projeto do MEC; atuou em Cursos de Especialização oferecidos pela UFRN. Participou efetivamente na criação do PIBID no Departamento de Matemática da UFRN; Modalidade à Distância da Universidade Federal de Viçosa - UFV. Integra o corpo docente do PROFMAT, Programa Nacional de Mestrado Profissional para Professores de Matemática, que com certeza vem dando um salto de qualidade dos Professores de Matemática do Ensino Básico. Tem experiência em diversas áreas de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Didática, Cálculo Diferencial e Integral, equações diferenciais, geometria, álgebra abstrata, álgebra linear e educação matemática.

João Cláudio Brandemberg é professor associado IV da FACMAT-ICEN/UFPA, mestre em Matemática (UFPA) e doutor em Educação Matemática (UFRN). Realiza pesquisa sobre o uso da componente histórica no ensino e aprendizagem de matemática. Autor de livros: Métodos históricos para resolução algébrica de equações (2009), Uma Análise histórico-epistemológica do conceito de Grupo (2010), Euler, Professor (2013), Uma História da Integral: de Arquimedes a Lebesgue (2017), O Idioma da Álgebra (2017) e Métodos Históricos (2019). Desde 2005 é membro da SBHMat e desde 2012 é líder do grupo de estudos e pesquisa em história e ensino de matemática – GEHEM – cadastrado no CNPq. Professor Orientador nos cursos de mestrado e doutorado acadêmico do PPGECM – IEMCI – UFPA e Mestrado Profissional – PROFMAT – ICEN – UFPA. E-mail: brand@ufpa.br.

John A. Fossa é doutor em Educação Matemática pela Texas A&M University. Aposentado do Departamento de Matemática da UFRN, é atualmente professor visitante junto ao PPGECEM – UEPB. É pesquisador das áreas de História e Filosofia da Matemática e da Educação Matemática.

Iran Abreu Mendes é Bolsista Produtividade em Pesquisa Nível 1C do CNPq, possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1983), graduação em Licenciatura em Ciências pela Universidade Federal do Pará (1983), especialização em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (1995), Mestrado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (1997) e Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2001). Pós-Doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro, SP (2008). Tem experiência na área de Matemática, com atuação nos seguintes temas: Cálculo, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, História da Matemática, Ensino de Matemática, História da Educação Matemática, História para o Ensino da Matemática e em Educação Matemática e Diversidade Cultural. Atualmente é professor

Titular junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (PPGECM/IEMCI/UFPA) E-mail: iamendes1@gmail.com.

Isabelle Coelho da Silva é Mestra em Ensino de Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE). Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), com período sanduíche na Universidade de Pittsburgh. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: história da matemática, educação matemática e formação de professores. É membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História Matemática - GPEHM. Atualmente, faz parte da Diretoria da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), regional Ceará e é doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Manoel de Campos Almeida é Engenheiro Civil, especializado em Estruturas; Licenciado em Física. Professor Emérito dos Departamentos de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPr) e da Universidade Federal do Paraná (UFPr). Chefe dos Departamentos da Análise de Projetos, Controle e de Expansão do extinto Banco de Desenvolvimento do Paraná. Consultor nas áreas de projetos de investimento, financeira e de informática. Coordenador Geral dos Laboratórios da PUCPr. Pesquisador convidado do Max Planck Institut für Wissenschafstgeschichte, Berlim. Conferencista e autor de diversos livros. Co-fundador do Centro de Imagens e Inovações Médicas da PUCPr. Atua nas áreas de Filosofia, Epistemologia e História das Ciências, particularmente interessado na História da Matemática. Diretor do Instituto Histórico e Geográfico do Paraná.

Miguel Chaquiam é Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2012), Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001), Especialista em Matemática pela UNESPA (1989), e Licenciado em Ciências - Habilitação em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984). Professor no Ensino Superior há mais de 33 anos, atua no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e no Curso de Licenciatura em Matemática da UEPA. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Computacional, Álgebra Linear; Estruturas Algébricas, Análise Real, História da Matemática, História das Ciências e Formação de Professores. Foi professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio durante 18 anos, Diretor da SBEM-PA durante o triênio 2004/2007, membro da DNE da SBEM no triênio 2007/2010, avaliador da Revista Iberoamericana de Educação Matemática – UNIÓN, Membro da Diretória da SBHMat no quadriênio 2015/2019 e Coordenador Científico do XIII Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM 2019). É membro do Comitê Científico da Revista REMATEC e Membro do Conselho Editorial da Coleção Contextos da Ciência, uma publicação da Editora Livraria da Física. Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (www.ghemaz.com.br). E-mail: miguelchaquiam@gmail.com.

Moysés Gonçalves Siqueira Filho e Pós-Doutor pela Université de Limoges - UNILIM/França e Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP/Brasil; Doutor em Educação Matemática (UNICAMP); Mestre em Educação [Área de Concentração: Educação Matemática, UFES); Licenciado em

Matemática (FFCLSP); Professor Permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo; Membro do Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática – GHEMAT; Editor Adjunto da Revista de História da Educação Matemática – HISTEMAT. E-mail: siqueira.moyses@gmail.com

Sobre o livro

Foto da capa | Isabela Almeida

Projeto Gráfico e Editoração | Jéfferson Ricardo Lima Araujo Nunes

Tipologias Utilizadas | Myriad Pro 16/18pt
Adobe Caslon Pro 12/14 pt

Os primeiros dois volumes da Coleção Caroá, *Itinerários de Pesquisas em Ensino de Ciências e Educação Matemática* e *Práticas Educativas como Itinerários de Pesquisas em Ensino de Ciências e Educação Matemática*, abordaram uma grande variedade de tópicos dentro da grande área de Ensino de Ciências e Educação Matemática. No presente volume, o terceiro da Coleção, versamos para a área temática da Educação Matemática, apresentando vários artigos que investigam dez importantes livros-textos históricos para o ensino da matemática. Os textos abordados contemplam períodos históricos que vão do Egito antigo até o passado recente e são analisados com propósitos não somente descritivos, mas também com o intuito de esclarecer como eles podem contribuir para o ensino contemporâneo da matemática.

Ao apresentarmos o texto ao público interessado, simultaneamente, estendemos o convite ao leitor para participar no diálogo sobre o Ensino de Ciências e Educação Matemática enviando resultados de suas pesquisas a serem incluídos em futuros volumes da Coleção.

ISBN 978-65-86221-88-6

9 786586 221886

eduepb