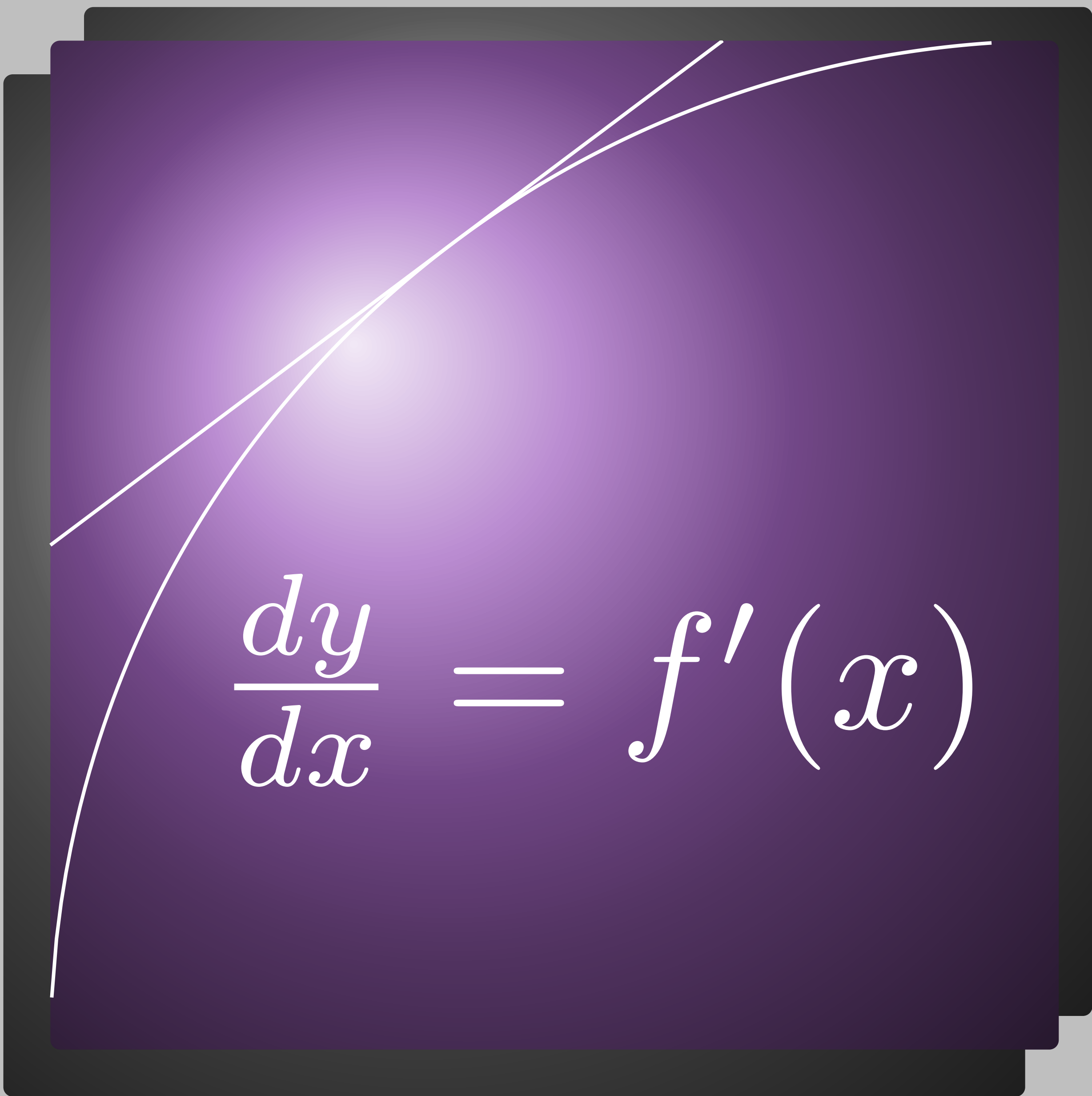
Cálculo Diferencial Sob a Perspectiva ∂a Resolução ∂e Problemas



$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Roger Ruben Huaman Huanca

Diego Jonathan Bezerra Silva

Pammella Queiroz de Souza

eduepb

Roger Ruben Huaman Huanca

Diego Jonathan Bezerra Silva

Pammella Queiroz de Souza

Cálculo Diferencial Sob a Perspectiva da Resolução de Problemas

eduepb

Campina Grande - PB

2021

Universidade Estadual da Paraíba
Profª. Célia Regina Diniz | *Reitora*
Profª. Ivonildes da Silva Fonseca | *Vice-Reitora*

Editora da Universidade Estadual da Paraíba
Cidoval Morais de Sousa (UEPB) | *Diretor*

Editora indexada no SciELO desde 2012

Editora filiada a ABEU

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone/Fax: (83) 3315-3381 - http://eduepb.uepb.edu.br - email: eduepb@uepb.edu.br

EDITORA A UNIÃO

BR 101 - KM 03 - Distrito Industrial - João Pessoa-PB - CEP: 58.082-010

Depósito legal na Câmara Brasileira do Livro - CBL.

Ficha catalográfica elaborada por Heliane Maria Idalino Silva – CRB-15ª/368

H144c Huanca, Roger Ruben Huaman.
Cálculo diferencial sob a perspectiva da resolução de problemas [Livro eletrônico]/Roger Ruben Huaman Huanca, Diego Jonathan Bezerra Silva, Pammella Queiroz de Souza.–Campina Grande: EDUEPB, 2021.
4200 Kb - 144 p.: il. color.

ISBN IMPRESSO - 978-65-86221-60-2
ISBN E-BOOK - 978-65-86221-61-9

1. Educação matemática. 2. Cálculo diferencial. 3.Matemática – Ensino-Aprendizagem. 4. Limite e continuidade. I. Título.

21. ed.CDD 370.7

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Rua Baraúnas, 351 - Bodocongó - Bairro Universitário
Campina Grande-PB - CEP 58429-500

Fone/Fax: (83) 3315-3381 - http://eduepb.uepb.edu.br
e-mail: eduepb@uepb.edu.br

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Papiro de Ahmes 17
Figura 2 – A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem 28
Figura 3 – Figura do Problema 1 33
Figura 4 – Figura do Problema 5 34
Figura 5 – Reta secante 39
Figura 6 – Reta tangente 39
Figura 7 – Comportamento do limite 42
Figura 8 – Diferentes representações da existência de um limite 44
Figura 9 – Limites laterais diferentes 52
Figura 10 – Exemplo para o teorema do confronto 54
Figura 11 – Demonstração de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ 56
Figura 12 – Limites infinitos e no infinito 58
Figura 13 – Representação geométrica do Teorema 3.13 66
Figura 14 – Contradições sobre a noção de reta tangente a uma curva 73
Figura 15 – Reta secante 74
Figura 16 – Velocidade média 75
Figura 17 – Velocidade instantânea 76
Figura 18 – Figura para a solução do Problema 2.4 110
Figura 19 – Figura para a solução do Problema 2.6 112

SUMÁRIO

Lista de ilustrações **5**
Prefácio **9**
Apresentação **11**
1 Resolução de Problemas **15**
1.1 A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sob a perspectiva da Resolução de Problemas 15
1.2 Retrospectiva históricos da resolução de problema 16
1.2.1 Mudanças de papel na resolução de problemas 20
1.2.2 Resolução de problemas como contexto 22
1.2.3 Resolução de problemas como habilidade 22
1.2.4 Resolução de problemas como arte 23
1.3 Aspectos Teóricos e Práticos da Resolução de Problemas 24
1.4 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas 27
2 Problemas sobre limite e continuidade **33**
2.1 Problemas 33
3 Limite e Continuidade de funções **37**
3.1 Limite 37
3.1.1 Definição Formal de Limite 41
3.1.2 Propriedades dos limites 45
3.1.3 Limites indeterminados 49
3.1.4 Limites laterais 50
3.1.5 Teorema do confronto 53
3.1.6 Limites fundamentais 55
3.1.7 Limites infinitos, limites no infinito e assintotas 58
3.2 Funções contínuas 63
3.2.1 Continuidade da função composta e continuidade em um intervalo . . . 64
4 Problemas sobre Derivadas **69**
4.1 Problemas 69
5 Derivadas e derivação **73**
5.1 Interpretação geométrica 73
5.2 Interpretação Física 75
5.3 Definição formal de derivadas 77
5.3.1 Derivadas laterais 79
5.4 Regras de derivação 80

5.5 Regra da cadeia 87
5.5.1 Derivação implícita 89
5.5.2 Derivadas de ordem superior 91
5.6 A derivada como taxa de variação 92
5.7 Derivação e os extremos de uma função 94
5.7.1 Funções crescentes e decrescentes e o teste da primeira derivada 97
5.7.2 Concavidades e o teste da segunda derivada 99
5.8 A regra de L'Hôptal para limites indeterminados 101
6 Resoluções comentadas dos problemas 105
6.1 Problemas sobre limites e continuidade 105
6.2 problemas sobre derivadas 116
Referências 139

Prefácio

O aprendizado de matemática por meio da repetição e memorização é coisa do passado. Tendo como referência fundamental o matemático George Polya e seu livro A Arte de Resolver Problemas, publicado originalmente em 1945, uma importante transformação vem se operando nos processos de ensino e aprendizagem na área.

A Resolução de Problemas como metodologia de aprendizagem em matemática tem suas virtudes e vantagens já testadas em milhares de experiências e estudos científicos de fôlego, voltados para a área específica da educação matemática, matemática aplicada e até na matemática pura. A escolha deste caminho exige um esforço intelectual, a busca e construção de estratégias, a utilização e a combinação de experiências e conhecimentos anteriores.

Este trabalho, liderado pelo Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Universidade Estadual da Paraíba/UEPB), em parceria com a Profa. Dra. Pammella Queiroz de Souza (Universidade Federal de Campina Grande/UFCG) e o acadêmico Diego Jonathan Bezerra da Silva (UEPB) é resultado da experiência acadêmica dos docentes e da demanda concreta por obras que tratem com exclusividade da questão, utilizando-se desta metodologia, explorando suas potencialidades, aliada ao Cálculo Diferencial, visando influenciar diretamente e de maneira destacada a aprendizagem do estudante.

Ressalte-se, por oportuno, que a obra tem suas raízes fincadas em solo caririzeiro paraibano, em Monteiro. Foi a partir de experiências de orientação de projetos de Iniciação Científica, importante passo para a formação de pesquisadores nas universidades brasileiras, que as ideias essenciais foram tomando corpo, ampliando-se com a participação de docente e pesquisadora de outra instituição pública de ensino superior. Tive a alegria de acompanhar o trabalho do Prof. Roger no câmpus VI da UEPB e testemunhar a sua comovente paixão pelo conhecimento e a formação das novas gerações de educadores matemáticos.

Para além do conhecimento e da experiência dos autores e da importância de como nasceu este projeto, a partir da experiência cotidiana no ensino de matemática, o que nutre e dá fundamento a este trabalho é a ideia de que não se aprende matemática sem colocar a mão na massa. É colocando, literalmente, a mão na massa, enfrentando o desafio de "fazer matemática" a partir da vida real, de situações concretas, que serão construídos caminhos futuros para certa desmistificação necessária acerca de como se pode aprender matemática não apenas pelo aprendizado de conceitos e fórmulas.

Trabalhar com a metodologias de Resolução de Problemas, certamente exigirá mais do professor em termos de preparação, planejamento e dedicação. Entretanto, a possibilidade de desenvolver competências e uma aprendizagem significativa, tornando-o mais autônomo e mais capaz de avançar nos conhecimentos.

É um livro não somente para estudantes e professores de matemática, mas acima de tudo para estudantes e professores de matemática que acreditam na capacidade de aprendizagem, na possibilidade de formação de cidadãos autônomos, conscientes e donos dos seus destinos.

Um belo trabalho, sem sombra de dúvidas.

Prof. Dr. Antonio Guedes Rangel Junior

Apresentação

É comum ver que pesquisadores em diversas partes do mundo, tenham dedicado e sigam dedicando muito tempo à pesquisa sobre o Cálculo e a Resolução de Problemas visando o ensino e a aprendizagem da Matemática, pois a Resolução de Problemas é essencial na construção do conhecimento do estudante e do desenvolvimento da Matemática. A fonte inicial e principal dos problemas é o fato de que, permanentemente o problema coloca desafios para o homem e ele responder, com sua inteligência, sua capacidade de abstração e intuição.

Este Produto Educacional (e-book) constitui-se na materialização de uma investigação que envolve aspectos matemáticos e metodológicos. A ideia é (re)construir conhecimentos de Limite e Derivada utilizando a Metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa metodologia, o problema é o ponto de partida para construção do conhecimento matemático, sendo o gerador de novos conceitos e procedimentos do Cálculo. Também é proposto aos leitores uma variedade de problemas, que estão praticamente todos resolvidos no último capítulo do e-book. Mesmo assim é importante tentar resolvê-los primeiro antes de "espiar" a resolução/solução, conforme George Polya descreveu: "Não se pode fazer Matemática sem sujar as mãos". Precisamente é este esforço de sujar as mãos, com ou sem êxito, que nos conduz à bons resultados no processo de aprendizagem.

A parte mais importante deste e-book são seus problemas planteados e resolvidos, que servem para fixar ideias, desenvolver alguns temas esboçados em muitos textos de Cálculo e também como uma oportunidade para que o leitor comprove a simplicidade de algumas resoluções. Deste modo, o e-book permitirá que os próprios estudantes avaliem suas respostas, ou seja, irão aprender respondendo, sem que o professor ocupe a posição de detentor do conhecimento. Para isso, os estudantes poderão perceber através da Resolução de Problemas que estarão fazendo Cálculo. E então, o que significa fazer Cálculo? O estudo do Cálculo através da Resolução de Problemas é uma chave essencial para entrar no edifício da Matemática avançada. Nesse sentido, a Resolução de Problemas tem sido abordada do ponto de vista da divulgação científica, que permite ao aluno a satisfação de vencer obstáculos e elaborar ideias, vivenciando dessa forma o "fazer Cálculo", pois os problemas são tomados como desafios, mas também, compreendendo os conceitos de Limite e Derivada através da Resolução de Problemas, é possível admitir aos estudantes o “fazer Cálculo”.

Sabe-se que as disciplinas de exatas possuem um conhecimento e uma coerência original. Especificamente no caso do Cálculo, no aspecto educacional existe uma condição especial à resolução de problemas. Pois como dizia René Descartes “Não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problema”.

Alguns leitores certamente perguntarão: por que mais um produto sobre Cálculo? Já não há tantos no mercado? Sim, mas nenhum deles toma como objeto de estudo os problemas relativos à compreensão do Limite e Derivada através da Resolução de Problemas. Essa ideia de trabalhar, ou seja, estudar através da Resolução de Problemas é justamente o que desenvolvemos neste e-book, pois consideramos o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem do Cálculo estudado na Licenciatura em Matemática, diversos cursos das Ciências Exatas, Tecnologias e Engenharias.

O estudo do Cálculo Diferencial foi criado a partir da Álgebra e da Geometria visando atender algumas necessidades básicas acerca do estudo dos movimentos e das variações. Na atualidade, apesar de ser uma das ferramentas mais completas e dinâmicas que existe no estudo da matemática, o cálculo e suas extensões na análise matemática estão muito mais abrangentes e, para entender tal feito, observa-se a quantidade de problemas que este resolve e a variedade de campos que utilizam o cálculo para modelar e resolver problemas.

Em matemática, o Cálculo é usualmente utilizado para manipular pequenas quantidades e, historicamente, um dos métodos desenvolvidos para realizar tal estudo advinha do conceito de limite, o qual é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, associando, assim, à noção de distância. Além disto, é possível estudar como é o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) converge ao infinito. Este conceito foi fundamental para a construção do Cálculo Diferencial e em outros ramos da análise matemática para definir, por exemplo, as derivadas e a continuidade de funções. O conceito de derivada, também chamado de “diferenciação”, é fundamentalmente mais avançado do que os conceitos encontrados em álgebra, por se tratar de um operador linear, o qual determina uma nova função a partir da função original, onde cada ponto desta nova função corresponde ao deslocamento da função original.

O objetivo deste e-book é ressaltar a importância da introdução dos conceitos básicos de cálculo diferencial de forma contextualizada, fazendo uma ponte entre a matemática clássica com os novos métodos de ensino aprendizagem, a saber, a Resolução de problemas. Para tanto, este material foi desenvolvido objetivando que os conceitos e resultados venham acompanhados de uma motivação ou interpretação física ou geométrica. Propiciando aos alunos uma compreensão clara dos conceitos, envolvendo funções reais e, a partir daí, possibilitando os alunos a desenvolverem a capacidade de modelar problemas matemáticos e provas envolvendo conceitos topológicos, bem como as noções intuitivas de limites, continuidade, derivadas, diferenciabilidade e comportamento de funções.

Nossa expectativa é que este texto assuma o caráter de espinha dorsal de uma nova perspectiva para o estudo de cálculo, esperando-se, portanto, que o estudante de cálculo tenha um conhecimento prévio em certas áreas da matemática, como funções (modular, exponencial, logarítmica, par, ímpar, afim e segundo grau, por exemplo), trigonometria, polinômios, geometria plana, espacial e analítica, pois são a base deste estudo.

Em geral, entendemos que os problemas movem a matemática, sejam problemas interiores à própria matemática, tornando possível a evolução da matemática pura, ou até mesmo problemas exteriores a matemática, tornando possível a evolução da matemática aplicada. Nessa perspectiva, enxergamos a possibilidade de unir a teoria de Resolução de Problemas ao Cálculo Diferencial, e dessa forma tornar possível uma melhor compreensão do Cálculo.

O e-book tem como objetivo geral abordar o Cálculo Diferencial sob a perspectiva da Resolução de Problemas. Neste material, o leitor encontrará uma distribuição bastante intuitiva dos capítulos e seções, desta maneira, o estudante terá uma boa experiência ao utilizar o presente material em seus estudos. O e-book está dividido precisamente em seis capítulos, dos quais dois (o segundo e o quarto) estão destinados a apresentar os problemas propostos, no entanto, o e-book possui 30 problemas, os quais são solucionados e comentados no sexto capítulo. O primeiro capítulo situa o leitor acerca da teoria de Resolução de Problemas, trazendo a gênese da pesquisa em resolução de problemas e teoria de Resolução de Problemas, bem como a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como já explicitado no início desta apresentação. O terceiro capítulo trata da teoria de Limite e Continuidade de funções, o texto possui demonstrações bem detalhadas da maioria dos teoremas apresentados. No quinto capítulo é desenvolvido a teoria de Derivadas desde a sua definição até os teoremas necessários para estudar problemas de otimização, novamente é possível encontrar as demonstrações da maioria dos teoremas apresentados.

Deve-se observar a conexão entre os capítulos, ou seja, a relação de dependência entre eles. O primeiro capítulo é de certa forma independente dos demais, apesar de sustentar a forma com que são apresentados os capítulos 2, 4 e 6. O segundo capítulo depende do terceiro, o quarto depende do quinto, e o sexto do segundo e do quarto. Por fim, temos a dependência entre os capítulos 3 e 5.

Diferentemente da maioria dos textos de Cálculo, este material possui uma pequena quantidade de exemplos, na verdade não foi adotado o termo "exemplo"durante o texto, e sim “problemas resolvidos”, os mesmos aparecem somente quando são indispensáveis. Pois bem, devemos explicar o porquê da pequena quantidade de problemas propostos, isto se dá pelo fato da facilidade de entrar problemas em diversos títulos de Cálculo, na realidade o que o texto traz de inovador são as chamadas resoluções comentadas dos problemas, nesta parte avançamos além dos textos já conhecidos quando se estuda Cálculo, visto que além da resolução do problema trazemos os conceitos envolvidos e os objetivos de cada problema, além disso são tecidos comentários específicos para cada um dos problemas apresentados, todos estes fatos devem ser de grande valor para o leitor interessado no presente texto.

Até o momento discorremos sobre este e-book e sua distribuição de conteúdos, mas não mencionado qual a origem deste Produto Educacional. Em síntese, esse é um dos frutos mais bonitos de uma pesquisa de Iniciação Científica, que foi desenvolvida/realizada em 2019-2020 com o apoio do CNPq. Através desta pesquisa constatamos que as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas aliada ao Cálculo Diferencial, podem influenciar de forma significativa a aprendizagem do estudante, que resultou na criação deste e-book.

Por fim, ressaltamos a relevante contribuição deste e-book, o qual, sem dúvida, auxiliará os estudantes na compreensão do Cálculo Diferencial sob a perspectiva da Resolução de Problemas que promovam a aprendizagem dos conceitos de Limite e Derivada nos primeiros anos do curso Superior. Acreditamos que as atividades aqui propostas também poderão auxiliar outros níveis de ensino, de modo a contribuir para a compreensão dos conceitos algébricos pelos estudantes em prol da constituição de uma formação crítica, científica e cidadã.

Os autores

1 Resolução de Problemas

Inicialmente, neste capítulo, será descrito sobre como deve dar-se a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sob a perspectiva da Resolução de Problemas. A seguir será realizada uma breve retrospectiva histórica sobre a Resolução de Problemas, destacando-se a gênese da pesquisa em Resolução de Problemas. Também, será apresentada aspectos Teóricos da Resolução de Problema e, por fim, destacaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, considerando algumas questões voltadas mais especificamente à implementação da Resolução de Problemas nos processos de ensino e aprendizagem, que será tomada como um dos principais referenciais teóricos deste e-book.

Na literatura, as denominações Problem-Solving e Solving-Problems são encontradas em inglês. Quando se referem à teoria, usam Problem-Solving mas, na ação de resolver problemas, usam solving-problems. Neste e-book, usa-se, em português, Resolução de Problemas, com **R** e **P** maiúsculos, quando se refere à teoria da Resolução de Problemas, e o termo resolução de problemas, com **r** e **p** minúsculos, quando se refere ao ato de resolver problemas.

1.1 A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sob a perspectiva da Resolução de Problemas

A aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), tem, ao longo dos últimos anos, configurado temáticas de pesquisas no contexto da Educação Matemática. Ademais, a disciplina de CDI ocupa um importante papel em cursos da área das Ciências Exatas e Tecnologias, pois representa um instrumento importante no que tange a interpretação de problemas relacionados ao cotidiano, fator este que impulsionou a composição desta área da Matemática.

Sabemos que, a disciplina de CDI é conhecida pelos altos índices de reprovação, de evasão e pela pouca compreensão dos conceitos de CDI por parte dos estudantes. Tais constatações são oriundas de diversas investigações sobre esse assunto, na busca por diminuir a reprovação e evasão na disciplina de CDI e tornar os conceitos mais compreensíveis aos estudantes articulado a metodologia de Resolução de Problemas.

O nosso interesse em pesquisar o CDI na perspectiva da Resolução de Problemas tem apontado e contribuído para uma maior preocupação com a construção de significados, em detrimento da manipulação algébrica e semiótica. Além disso, conceitos base do Cálculo tais como: Funções, Limite, Derivada e Integral que podem ser abordados de outras maneiras, a partir da exploração que a Resolução de Problemas possibilita.

A aprendizagem dos estudantes pode se desenvolver através da Resolução de Problemas. Para Huanca (2014), após a exploração, resolução e discussão tirando as dúvidas das soluções obtidas para o problema, os estudantes, juntamente com o professor, organizam a estrutura em linguagem matemática padronizando os conceitos, as representações matemáticas, conjecturas, simulações, validação de hipóteses, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. Nesse sentido, acontece o aprofundamento do conhecimento matemático.

Por outro lado, sabemos que, as abordagens mais frequentes dos conceitos de CDI estão pautadas fundamentalmente na abordagem algébrica, onde o professor formaliza alguns conceitos, demonstra alguns teoremas, e em seguida propõe aos estudantes que resolvam listas de exercícios. Com base nisso, a aprendizagem de CDI, na grande maioria das vezes, resume-se ao domínio de algumas técnicas de resolução que não transcendem a compreensão algébrica.

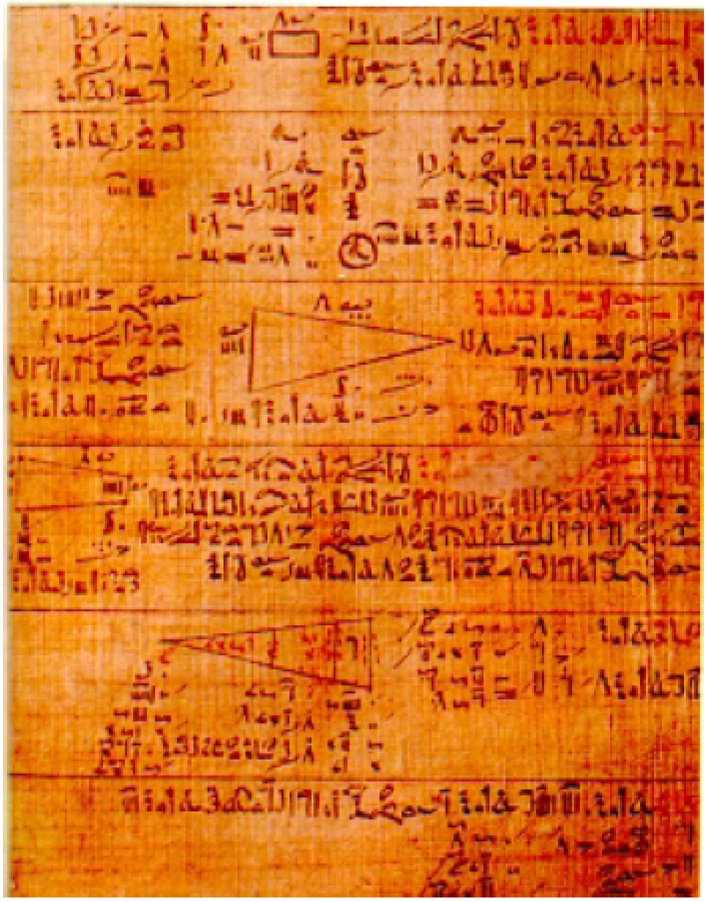
Sendo assim, aprender CDI é muito mais do que aplicar fórmulas e encontrar resultados, é pensar em estratégias para solucionar problemas. Pensando nisso, a seguir apresentaremos a Resolução de Problemas (RP) como um caminho alternativo e uma importante metodologia para a construção de conceitos e conteúdos do Cálculo Diferencial no processo de ensino e aprendizagem de CDI. Também, com esta metodologia pretendemos reverter o atual quadro relacionado a esta disciplina.

1.2 Retrospectiva históricos da resolução de problema

Segundo Huanca (2014), ao longo da história, matemáticos, filósofos, psicólogos, educadores e pesquisadores têm reconhecido a importância da resolução de problemas e da existência de diferenças pessoais na capacidade de se chegar a uma solução. Também, a história da matemática mostra que os avanços matemáticos quase sempre têm origem no esforço de resolver um problema específico, por exemplo,

> Resolver problemas faz parte da natureza humana. Bem antes da invenção dos números, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, para tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar, inferir os elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeia de Matemática (HUANCA, 2006, p.20).

Figura 1 – Papiro de Ahmes



Fonte: <http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Egipto/papiros.htm>

Stanic e Kilpatrick (1989), no artigo *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum*, publicado no livro *The Teaching and Assessing of Mathematics Problem Solving*, dizem que problemas de Matemática têm ocupado um lugar central nos currículos desde a Antiguidade. Também abordam nesse artigo, a história da resolução de problemas no currículo da Matemática, descrevendo o papel da resolução de problemas desde as primeiras civilizações até o fim do século XX.

Eles relatam sobre as escritas de antigos egípcios, chineses e gregos, apresentando problemas dessas épocas. Por exemplo, o Papiro de Ahmes, copiado, de um documento mais antigo, pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas matemáticos.

Num dos problemas, desse manuscrito, era pedido ao aluno "efetue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos iguais a 7". No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada da resolução do problema, com dois métodos de resolução e resposta. O fato de o problema se referir a casas, gatos, ratos, etc., a serem adicionados, sugere que este seria um problema recreativo ou um quebra-cabeça.

Stanic e Kilpatrick (1989), também citam um problema dos antigos gregos que é uma primeira versão do problema da cisterna: "Eu sou um leão de bronze; meus orifícios são meus dois olhos, minha boca e a planta do meu pé direito. Meu olho direito enche uma jarra em dois dias, meu olho esquerdo em três e meu pé em quatro. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas. Diga-me quanto tempo será preciso para enchê-la com os quatro juntos?". A resolução desse problema não é apresentada no texto, nem alguma sugestão é feita.

Os autores observam que alguns métodos particulares de resolução de problemas têm também uma longa história. Por exemplo, uma técnica, muito parecida com a Regra da Falsa Posição, aparece no Papiro de Ahmes. Eles dizem que Vera Sanford em 1927, em sua história sobre problemas de álgebra, deu um exemplo do uso dessa regra de falsa posição no seguinte problema, tirado de um trabalho do séc. XV, de autoria de Phillip Calandri: A cabeça de um peixe pesa $\frac{1}{3}$ do peso total dele, sua cauda pesa $\frac{1}{4}$ dele, e seu corpo pesa 30 libras. Qual é o peso total do peixe?

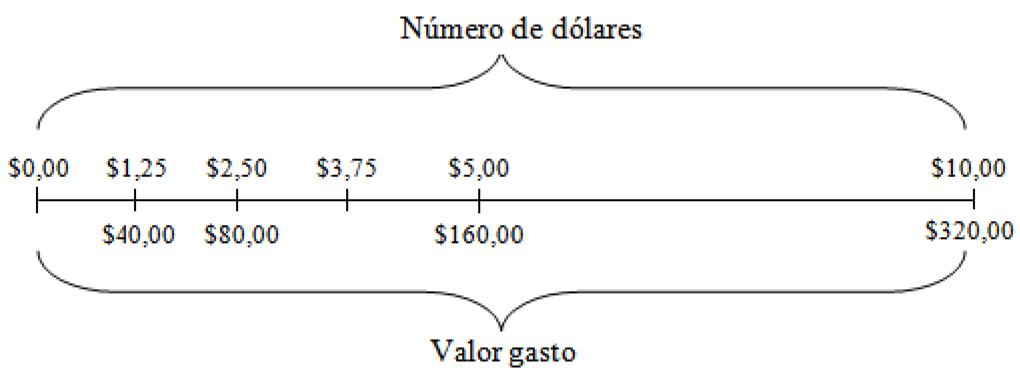
Sanford explicou que a regra da falsa posição foi usada para resolver esse problema do seguinte modo: Se o peixe todo pesasse l2 libras, então a cabeça pesaria 4, a cauda 3 e o corpo 5. Evidentemente, o peso do peixe é o mesmo múltiplo de 12 que 30 é de 5 e, então, o peso do peixe é 72 libras.

Seguindo no tempo, segundo Stanic e Kilpatrick (1989) encontram-se problemas tratados de forma semelhante a esses da Antiguidade, em livros de Matemática dos séculos XIX e XX. Eles chamam a atenção de que, nesses exemplos é assumida uma visão muito limitada de aprendizagem de resolução de problemas.

Onuchic (1999) diz que, até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica. Um exemplo disso é o problema, apresentado na página 97 do livro-texto de William J. Milne em 1897, A Mental Arithmetic: "Quanto custará arar 32 acres de terra se por um acre pagaremos \$ 3,75?".

Segundo Huanca (2014), nesse tempo a Matemática era trabalhada segundo a Teoria da Disciplina Mental e, possivelmente, poucas pessoas sabiam fazer uso dela. Tentando entender porque, como sugestão, Milne escreveu apenas: \$3,75 = $\frac{3}{8}$\$10,00, buscamos compreender como essa sugestão poderia levar à resolução dos onze outros problemas colocados.

Chegamos a acreditar que isso poderia ocorrer com os discípulos pensando assim:



Mas, $\$3,75 = \$2,50+\$1,25$. Como $\frac{1}{4}$ de \$10,00 = \$80,00 e $\frac{1}{8}$ de \$10,00 = \$40,00. Portanto

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\$10,00 = \left(\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\right)\$10,00 = \frac{3}{8}\$10,00 = \$80,00 + \$40,00 = \$120,00$$

Na solução apresentada eles dizem que \$3,75 = $\frac{3}{8}$\$10,00 e que, se se admitisse o custo \$10,00/acre, os 32 acres custariam \$320,00. Mas, como 1 acre custava $\frac{3}{8}$ de \$10,00, então, os 32 acres custariam $\frac{3}{8}$\$320,00 e, portanto, \$120,00.

Observamos que hoje dizer que \$3,75 = $\frac{3}{8}$\$10,00 não parece, de imediato, fácil de entender, ainda mais quando se fala em aritmética mental. Na verdade, eles conduziam essa igualdade fazendo, mais uma vez, o uso do conceito de proporcionalidade, pois uma proporção é uma igualdade entre duas razões e uma razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. Vejamos que fração de \$10,00 é \$3,75:

$$\$3,75 = \frac{\$375}{100} = \frac{\$3750}{1000} = \frac{375\$10,00}{1000} = \frac{3\times 125}{8\times 125}\$10,00 = \frac{3}{8}\$10,00$$

Tenho 32 acres para arar, se eu pagasse \$10,00/acre eu gastaria \$320,00. Mas, eu paguei $\$3,75 = \frac{3}{8}\$10,00$. Então meu gasto será $\frac{3}{8}\$320,00 = \$120,00$. Hoje sem cálculo mental fazendo apenas a multiplicação teríamos $\$3,75 \times 32 = \$120,00$.

Depois de esse problema ter sido colocado e resolvido mostraremos, no texto, uma lista com outros problemas que podem ser resolvidos segundo o mesmo modelo de resolução adotado para o primeiro.

No transcorrer dos séculos, problemas famosos de célebres matemáticos são encontrados, dando avanço à construção da Matemática.

Os três famosos problemas gregos: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo são aproximadamente do século V a.C. Esses problemas estimularam a atividade matemática entre matemáticos gregos e seus tratamentos rigorosos têm valiosas vinculações com a matemática moderna.

Outros problemas como: Achar a tangente a uma curva e a área de uma região delimitada por uma curva, são problemas que, no século XVII, levaram à construção do Cálculo Diferencial e Integral; O Problema da Braquistócrona, formulado por Johann Bernoulli em 1696 e que deu origem ao Cálculo das Funções de Variações; O Problema de Fermat, proposto no século XVII e resolvido somente depois de muitas tentativas e avanços teóricos, no final do século XX, por A. Wiles; Os 23 problemas de Hilbert formulados em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, estimularam grandemente o desenvolvimento da Matemática no século XX.

Fatos como esses e muitos outros na história da Matemática e da humanidade nos fazem afirmar que a Matemática é uma construção social dinâmica, um conjunto estruturado de conhecimentos, mas em permanente extensão, não somente com novos resultados, mas também com novos métodos (HUANCA, 2014). Sendo evidente a importância dos problemas e de suas resoluções no desenvolvimento da Matemática, é natural que também ocupe um lugar importante no campo da Educação Matemática, pois as raízes da Educação Matemática são a Matemática e a Psicologia.

A seguir, veremos vários temas que historicamente, caracterizaram o papel da resolução de problemas no currículo da matemática escolar, desde o antigo Egito até o final do século XX: mudanças de papel na resolução de problemas, resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte.

1.2.1 Mudanças de papel na resolução de problemas

Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que, como esses exemplos mostram, os problemas têm uma longa história no currículo da Matemática. Todavia, predominaram basicamente, neste último século, discussões sobre resolução de problemas para o ensino, em que se tem exigido, simplesmente, dos estudantes, que resolvam problemas com regras, resolvam problemas específicos e desenvolvam abordagens mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino e a aprendizagem estejam agora recebendo uma grande ênfase, os educadores matemáticos não têm examinado completamente a questão: Porque deveríamos ter que trabalhar resolução de problemas para todos?

> O papel da resolução de problemas nos currículos de matemática escolar é o resultado de forças conflitantes, ligadas e amarradas por ideias antigas e duradouras sobre os benefícios do conhecimento matemático e para uma variedade de eventos que interagiam mutuamente e que aconteceram perto do início do século XX (STANIC; KILPATRICK, 1989, p.4).

Os referidos autores dizem que a principal razão dos pesquisadores darem ênfase a resolução de problemas é que, até esse século, foi assumido que o conhecimento matemático de qualquer área da Matemática e não só o que consideraríamos um problema, deveria, de um modo geral, melhorar o modo pensar das pessoas. Nesse sentido, Platão (429 - 348 A.C) afirma que, aqueles que por natureza são bons em cálculo são, como se pode dizer, naturalmente aguçados em qualquer outro estudo e aqueles que são lentos em Matemática, se fossem educados e exercitados nesse estudo, não obstante melhorariam e se tornariam mais afiados do que são.

Partindo desse pensamento de Platão, Stanic e Kilpatrick (1989) aceitaram a ideia de que estudar Matemática melhorará a habilidade das pessoas em pensar, raciocinar e resolver problemas com os quais se confrontarão no mundo real. Nesse sentido, resolver problemas no currículo era simplesmente um meio para levar os estudantes a estudar Matemática. Os problemas eram um dado elemento do currículo de Matemática que contribuía, como todos os outros elementos, para o desenvolvimento de um raciocínio compreensível.

Nessa mesma perspectiva, no final do século XIX, novos pontos de vista sobre aprendizagem começaram a desenvolver uma corrida contrária à da Teoria da Disciplina Mental, ou seja, os críticos concordavam que a matemática era muito importante, mas argumentavam que muitas pessoas não precisavam saber mais do que a aritmética do 6º ano de escolaridade (STANIC; KILPATRICK, 1989).

Segundo esses autores, em relação à virada do século XIX para o século XX, Thorndike mostrou em 1924, que a Teoria da Disciplina Mental não desapareceu com a viragem do século. Contudo, o trabalho de Thorndike, combinado com outros desenvolvimentos, levou claramente ao declínio da importância dessa teoria. Cada vez mais, psicólogos, sociólogos e educadores iam tomando posição contra esta. Esses críticos olhavam para uma sociedade em mudança, sofrendo uma intensa industrialização, urbanização e imigração, estavam preocupados com a população escolar que cresceria vinte vezes entre 1890 e 1940 concluindo que o currículo escolar tinha que mudar.

Stanic e Kilpatrick (1989) dizem que, na época argumentavam que uma pessoa necessitava estudar só o que era diretamente funcional para o seu futuro papel na sociedade. Análises da atividade dos vários papéis na sociedade foram usadas para estabelecer objetivos específicos para os currículos escolares, e o movimento das medidas mentais cresceu à medida que as pessoas se voltavam para os testes de inteligência para decidir quem teria acesso a determinados conhecimentos nos currículos escolares.

> Então, o virar do século assistiu a duas maneiras muito diferentes de ver as pessoas, a educação e o currículo escolar. A Teoria da Disciplina Mental (que é, ironicamente, muitas vezes associada a uma visão elitista da educação) produziu uma visão fundamentalmente otimista de inteligência humana. Embora os defensores da Teoria da Disciplina Mental reconheçam as óbvias diferenças que existem entre as pessoas, o que era muito importante para eles era que todas as pessoas nasciam com as mesmas faculdades; e era tarefa da escola desenvolver estas faculdades que todos tinham. Porque todas as pessoas tinham as mesmas faculdades, os defensores da Teoria da Disciplina Mental argumentavam que, quando se ia decidir o que deveria ser ensinado e a quem, o que era bom para um estudante era bom para todos. Todos os alunos deviam ter acesso ao mesmo conhecimento e métodos de instrução (STANIC; KILPATRICK, 1989, p.6).

Neste sentido, os autores dizem que deixou de ser assumido que o estudo da Matemática promove, inevitavelmente, o pensamento das pessoas. Assim, essa visão estabelece as condições para uma maior ênfase da parte dos educadores matemáticos como, exatamente, os alunos devem melhorar sua capacidade de pensar, raciocinar, "resolver problemas", através do estudo da Matemática. Muitos dos nossos antecessores profissionais, estavam relutantes em desistir da tradição que vinha desde Platão e dava um lugar tão proeminente à Matemática no currículo escolar.

A maioria de nossos matemáticos, incluindo a Matemática de nível mais avançado, como apropriada para todos os estudantes, e como um veículo essencial para desenvolver a capacidade de raciocínio dos estudantes, tais como Felix Klein na Alemanha, John Perry na Inglaterra e Eliakim Hastings Moore nos Estados Unidos, discutiam a relação entre Matemática Pura e Aplicada no currículo escolar, advogando, em essência, um maior papel para as aplicações. Mas, muitos educadores matemáticos, particularmente Smith, não queriam dar um papel muito grande às aplicações, porque os críticos do currículo escolar que não eram matemáticos também pediam que a matemática escolar se tornasse mais relevante para a vida social de cada individuo. Obviamente a resolução de problemas no currículo de matemática escolar tem sido um tópico polêmico durante um longo tempo.

Onuchic (1999) enfatiza o trabalho de Felix Klein que, em 1892, se interessou pelo professor que deveria trabalhar Matemática com seus alunos, nas escolas. Começou a escrever monografias em que trabalhava a matemática elementar sob um ponto de vista avançado e, nelas, deixava aos professores a responsabilidade de desenvolver caminhos por ele sugeridos. Klein já sentia a preocupação com um ensino e aprendizagem de Matemática envolvendo a necessidade de professores melhor preparados e estudantes críticos.

1.2.2 Resolução de problemas como contexto

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), a resolução de problemas como contexto tem pelo menos cinco sub-temas: Resolução de Problemas como justificativa; Resolução de Problemas como motivação; Resolução de Problemas como recreação; Resolução de Problemas como veículo; e Resolução de Problemas como prática, todos os quais estão baseados sobre a ideia de que problemas e resolução de problemas são meios para alcançar outros fins importantes.

Historicamente, a resolução de problemas foi incluída no currículo de Matemática em parte porque os problemas fornecem uma justificativa para ensinar Matemática. Já o subtema da motivação está relacionado com o da justificativa, em que os problemas justificavam a matemática que se ensinava. Contudo, no caso da motivação, a conexão é muito mais específica e é procurado o objetivo de atrair o interesse dos alunos.

O subtema da recreação está relacionado com o da motivação porque o interesse dos alunos está envolvido, mas no caso da recreação os problemas são fornecidos não tanto para motivar os alunos a aprender, mas para lhes permitir ter algum divertimento com a matemática que eles já aprenderam. O problema do Papiro de Ahmes, anteriormente mostrado, é uma boa ilustração. O subtema da recreação também difere dos dois primeiros na medida em que puzzles ou problemas sem qualquer ligação ao mundo real são perfeitamente apropriados.

Na resolução de problemas como veículo, os problemas são muitas vezes fornecidos, não simplesmente para motivar os alunos a interessarem-se na aprendizagem direta de um tópico, mas como um veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os métodos de descoberta refletem em parte a ideia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas. Dos cinco subtemas, a resolução de problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de Matemática. Neste subtema, os problemas não provêm justificação, motivação, recreação ou veículo tanto como a prática necessária para reforçar habilidades e conceitos ensinados diretamente.

1.2.3 Resolução de problemas como habilidade

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), resolução de problemas é frequentemente vista como uma das muitas habilidades a serem ensinadas no currículo escolar. De acordo com esta visão, a resolução de problemas não é necessariamente uma habilidade unitária, mas há uma clara orientação de habilidade.

Embora a resolução de problemas como contexto permaneça um tema forte e persistente, esta como habilidade tem se tornado dominante para aqueles que a veem como um valioso fim curricular merecendo atenção especial, mais do que como simplesmente um meio para alcançar outros fins ou um inevitável resultado do estudo da Matemática.

Expor a resolução de problemas numa hierarquia de habilidades a serem adquiridas por estudantes, conduz a certas consequências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma consequência disto é que, dentro da habilidade geral da resolução de problemas, distinções hierárquicas são feitas entre resolver problemas rotineiros e não rotineiros. Isto é, a ação de resolver problemas não rotineiros é caracterizada como um nível de habilidade mais alto a ser adquirido depois da habilidade de resolver problemas rotineiros, o que, por sua vez, é ser adquirido quando os alunos aprendem conceitos e habilidades matemáticos básicos.

1.2.4 Resolução de problemas como arte

Para Stanic e Kilpatrick (1989), uma mais profunda e mais abrangente visão de resolução de problemas no currículo da matemática escolar - uma visão de resolução de problemas como arte - nasceu do trabalho de George Polya, com sua famosa ideia de heurística, a arte da descoberta, onde matemáticos como Euclides e Pappus, incluindo Descartes, Leibnitz e Bolzano, tinham discutido métodos e regras para descobertas e invenções na Matemática, mas suas ideias nunca haviam chegado até o currículo escolar. Também, foi criada a metodologia de Resolução de Problemas por Polya (2006) em 1945 e compreende quatro etapas: compreensão do problema, construção de um plano de resolução, execução do plano e revisão da solução. Isto sobrou para George Polya reformular, isto é, ampliar e ilustrar várias ideias sobre descobertas matemáticas de uma maneira que os professores pudessem entender e aplicar.

Segundo George Polya (2006, p.1),

> o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajuda demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos mas, de tal modo que, ao estudante, caiba uma parcela razoável do trabalho.

Na formulação de George Polya, o professor é a figura chave. Ou seja, somente um professor sensível consegue determinar o tipo certo de problema a ser trabalhado e providenciar a quantidade apropriada de orientação. Porque o ensino ou a aprendizagem também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar a resolução de problemas.

Hoje, há ainda aqueles que seguem o trabalho de George Polya, mas que reduzem, a grosso modo, a heurística a habilidades de procedimento, quase que tomando uma visão algorítmica de heurística (isto é, heurísticas específicas ajustadas a situações específicas). Uma heurística torna-se uma habilidade, uma técnica, mesmo, paradoxalmente, um algoritmo. De certa forma, resolução de problemas como arte fica reduzida à resolução de problemas como habilidade quando tentativas são feitas para implementar ideias de George Polya enfocando os passos e colocando-os em livros-texto. Este reconhece que essas técnicas de resolução de problemas precisam ser ilustradas pelo professor e discutidas pelos estudantes, e praticadas de uma maneira não mecânica.

Por outro lado, Onuchic (1999, p.203) diz que a importância dada à Resolução de Problemas é recente e que, somente nas últimas décadas, é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção especial. Nesse sentido, é citado uma Agenda para a Ação, do NCTM (1980), pedindo que "resolução de problemas seja o foco da matemática escolar durante os anos oitenta". Nessa agenda, a resolução de problemas foi caracterizada como uma das dez áreas de habilidade básica[1] e assume-se que há uma relação direta entre resolução de problemas nas aulas de Matemática e resolução de problemas encontrados em nossa vida.

1.3 Aspectos Teóricos e Práticos da Resolução de Problemas

Souza (2010) diz que, a partir de 1990, a abordagem "ensinar **via** Resolução de Problemas" (Teaching via Problem Solving) passou a ser "ensinar **através** da Resolução de Problemas" (Teaching through Problem Solving) que é uma metodologia bastante nova na pesquisa em Resolução de Problemas no currículo de Matemática. Segundo essa autora, a diferença entre essas duas abordagens é que a expressão "através de" significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado como pedia a expressão "via" que significa "por meio de".

Entendemos que estudar Matemática através da Resolução de Problemas corresponde a construção de um novo conhecimento para abordar conteúdos matemáticos. Onuchic e Allevato (2011, p.81) apontam que, "o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da Resolução de Problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos".

Huanca (2014, p. 92-93) diz que,

> Embora pouco se conheça sobre os mecanismos atuais que os estudantes usam para aprender e dar sentido à matemática através da Resolução de Problemas, os pesquisadores concordam que no ensinar através da Resolução de Problemas permanece a promessa de aprendizagem nos estudantes. Muitas das ideias tipicamente associadas a essa abordagem - mudança nos papéis do professor, projetar e selecionar problemas para o ensino, aprendizagem colaborativa, e problematizar o currículo - têm sido extensivamente estudadas, resultando em respostas baseadas em pesquisa para as várias questões frequentemente levantadas sobre a aprendizagem com resolução de problemas.

Nesse sentido, é necessário conhecer e apreender os encaminhamentos que se referem a aprendizagem através da Resolução de Problemas para ser abordado neste e-book, ou seja,

[1] Documento posicional sobre as competências básicas: resolução de problemas; aplicar matemática em situações do dia a dia; alerta para a razoabilidade dos resultados; estimativa e aproximação; habilidades computacionais adequadas; geometria; medida; ler, interpretar e construir tabelas, quadros e gráficos; usar a matemática para prever; e conhecimento de informática.

destaca-se que a Resolução de Problemas implica em uma habilidade cognitiva complexa que seria o topo da aprendizagem de um estudante (GAGNÉ, 1983; CHI; GLASER, 1992). Dessa forma, o desenvolvimento da capacidade para a resolução de problemas pode ser favorecido por meio de uma aprendizagem que conduza os estudantes a construírem, por exemplo, uma organização mental para compreensão de problemas.

Para tal, entendemos que o professor ou o estudante, inicialmente, precisa ter conhecimentos sobre o que é um problema e também sobre como ocorre o processo de Resolução de Problemas. Em seguida, utilizar a metodologia para construir os conhecimentos sobre o Cálculo através da Resolução de Problemas.

Van de Walle (2001, p.42) diz que um problema é "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta".

Para Chi e Glaser (1992, p.251), "um problema é uma situação na qual você está tentando alcançar algum objetivo e deve encontrar um meio de chegar lá". Na visão de Klausmeier e Goodwind (1997, p.347), "os indivíduos deparam-se com um problema quando se encontram numa situação que devem solucionar um problema e não possuem informações, conceitos, princípios ou métodos específicos disponíveis para chegar à solução".

Também segundo Echeverría (1998), o significado de problema é como sendo qualquer atividade matemática e, ao mesmo tempo, como uma situação difícil. Na visão desta autora, "para que possamos falar da existência de um problema, o estudante que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta" (ECHEVERRÍA, 1998, p.48). Assim, ser um problema:

> Não é uma propriedade inerente de uma tarefa matemática. Antes, é uma relação particular entre o indivíduo e a tarefa que faz da tarefa um problema para ele. A palavra problema é usada aqui nesse sentido relativo, como uma tarefa que é difícil ao indivíduo que tenta resolvê-la (SCHOENFELD, 1985, p.74).

Sintetizando as ideias anteriores, Onuchic (1999, p.215) define que "problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver".

Quando a pessoa se depara com uma situação que para ela é um problema, precisará buscar um caminho que a ajude a encontrar uma resposta. A busca desse caminho vai depender de todo um processo de Resolução de Problemas que envolve etapas organizadas de forma sequencial, porém não linear. Vários pesquisadores apontaram etapas da resolução de problemas (DEWEY, 1910; POLYA, 2006; MAYER, 1992; BRITO, 2010; STERNBERG, 2000), dentre eles destacamos inicialmente para este e-book as descritas por Proença (2018), baseadas nas quatro etapas seguintes: representação, planejamento, execução, monitoramento.

- Representação – corresponde à compreensão do problema, ou seja, à compreensão que o estudante realiza do problema com base em seus conhecimentos da língua portuguesa e seus conhecimentos sobre os termos matemáticos que aparecem no enunciado, gerando uma representação mental e simbólica. No entanto, essa compreensão não é absoluta, pois pode ser prejudicada pela má formação de conceitos e procedimentos trazidos pelo estudante no sentido de dificultar seu entendimento de termos matemáticos e até mesmo de perceber informações incompletas e supérfluas;

- Planejamento – corresponde ao uso de uma estratégia de resolução, ou seja, um caminho a ser seguido que deriva das preferências do estudante, podendo optar por meios algébricos, aritméticos, geométricos ou outras formas de representação e organização dos dados;
- Execução – trata-se de executar a estratégia, ou seja, realizar os cálculos devidos, bem como desenhar as figuras, construir gráficos ou outras formas de representação viso-pictórico;
- Monitoramento – corresponde à verificação da resposta. Se está de acordo com a pergunta do problema e, se é condizente ao contexto. Também implica em rever o processo seguido, o que permite que o estudante possa reestruturar ou modificar a estratégia seguida.

Olhando os aspectos Teóricos e Práticos da Resolução de Problema e sabendo o significado de "problema" e que para resolvê-lo o estudante desenvolve um processo de pensamento que segue etapas, apresentaremos a seguir as três abordagens da Resolução de Problemas que foram identificadas por Schroeder e Lester Jr (1989) no final dos anos 1980, as quais refletiam e ainda refletem como a Resolução de Problemas acaba sendo tratada no ensino e na aprendizagem de Matemática. Essas abordagens estão relacionadas ao momento em que um problema é utilizado para abordar determinados conteúdos, em nosso caso o Cálculo Diferencial.

A abordagem **ensinar/aprender sobre Resolução de Problemas** é aquela que busca introduzir um problema após ter explicado aos alunos as etapas de resolução de problemas, além de um trabalho com heurísticas e estratégias. "No melhor de suas hipóteses, ensinar sobre Resolução de Problemas também incluía experiências com, de fato, resolver problemas, mas sempre envolveu muito da discussão explícita de, e ensinar sobre, como problemas são resolvidos" (SCHROEDER; LESTER Jr, 1989, p.32). Dessa forma, Schroeder e Lester Jr (1989) evidenciaram que a aprendizagem decorre de que os estudantes terem ciência dessas etapas e que sejam capazes de aplicá-las na resolução de problemas.

Já na abordagem **ensinar para resolver problemas**, o uso do problema é feito após já se ter explicado o conteúdo. Conforme explicaram Schroeder e Lester Jr (1989, p.34), "resolução de problemas é vista como uma atividade em que os alunos somente se engajam depois da introdução de um novo conceito ou para seguir uma habilidade de cálculo ou um algoritmo". Dessa forma, esses autores destacaram que a preocupação do professor com a aprendizagem da Matemática é que os estudantes consigam transferir o que aprenderam para outras situações, ou seja, para resolver "problemas".

Por último, a abordagem **ensinar/aprender através da Resolução de Problemas** implica no uso do problema como o início (problema gerador) do trabalho (em sala de aula ou pesquisa), ou seja, antes de explicar determinado conteúdo (defini-lo), o professor deve apresentar aos estudantes uma situação que seja um problema para eles. De acordo com Schroeder e Lester Jr (1989, p.33), "o ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis." Dessa forma, o que se favorece aos estudantes é que se engajem na resolução do problema, desenvolvendo as etapas anteriormente mencionadas por Proença (2018). A aprendizagem decorrente do ensino através da Resolução de Problemas é reflexo, portanto, do "[...] movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar)" (SCHROEDER; LESTER Jr, 1989, p.33).

Portanto, a abordagem ensinar/aprender sobre Resolução de Problemas é entendido pelos autores como limitante porque o estudante pode considerar a Resolução de Problemas como um tópico que acaba sendo tratado de forma isolada do conteúdo matemático a ser abordado, bem como das relações matemáticas. Já na abordagem ensinar para resolver problemas, esses autores enfatizaram que apresenta um limite grande no ensino, uma vez que o que se exige dos alunos é a aplicação do que acabaram de aprender em problemas do mundo real, o que não corresponde à resolução de problemas. Por fim, a abordagem ensinar/aprender através da Resolução de Problemas é a mais coerente e a que deveria ser tratada no ensino e na aprendizagem de Matemática, pois possibilita estabelecer relações matemáticas entre as ideias dos estudantes e os aspectos importantes dos problemas geradores de um novo conhecimento.

Diante disso, há outra proposta de trabalho que pode ser implementada na sala de aula ou no estudo auto didático do estudante e que evidencia encaminhamentos importantes a serem realizados pelo professor ou estudante. Essa proposta é a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

1.4 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas implica o envolvimento numa atividade, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os estudantes deverão explorar os seus conhecimentos e através desse processo, desenvolvem com frequência, novos conhecimentos matemáticos. A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pela qual os estudantes aprendem matemática (NCTM, 2008).

Considerando o estudo da Matemática através da Resolução de Problemas,

> Os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas, baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida

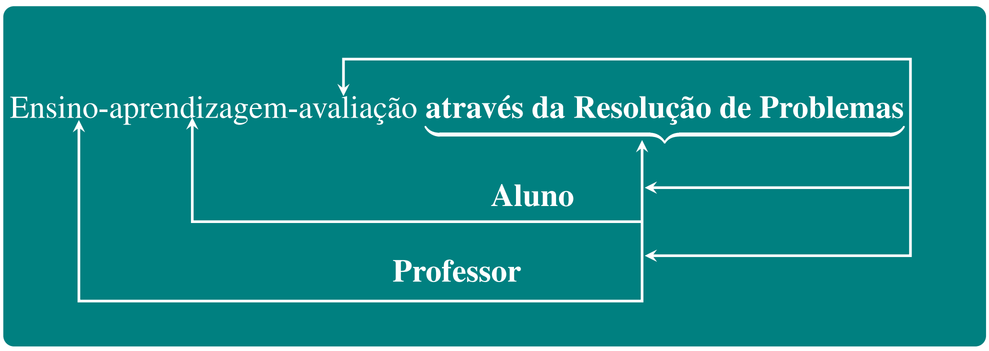
> na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas (VAN DE WALLE, J. A., 2009, p.57).

Nesse contexto, se insere a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nela, o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção de conhecimento, através da resolução do problema, devem fazer conexões com outras ciências e entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Assim, para que haja ensino,aprendizagem e avaliação, é importante “saber fazer Matemática”, pois esta mais do que qualquer outra disciplina tem o poder de minar a confiança dos estudantes, ou seja, pode-se ter dificuldade por um tempo, a cada passo, para trabalhar com o mesmo processo ou ideia a partir de um problema. Mas, depois de realmente compreender o problema e ter a perspectiva mental para vê-lo como um todo, estaremos apreciando a beleza da Matemática, para explorar o rico conjunto de conexões que a compõem ou mesmo aprender sobre a sua aplicabilidade. Ainda, estudar um conteúdo novo através da Resolução de Problemas é uma forte recomendação na atualidade por vários documentos.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), o ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica de trabalho/estudo, tornou-se uma metodologia. Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que esses três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o estudante, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos e para ambos. O estudante analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de novos conhecimentos. Essa forma de trabalho do estudante é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. As autoras chamam a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver Resolução de Problemas. Podemos perceber também isto na Figura 2:

Figura 2 – A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem



Fonte: Huanca (2014, p.96)

Para Onuchic e Allevato (2011), implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos estudantes novas posturas e atitudes com relação ao trabalho/estudo de um tópico matemático. O professor precisa preparar ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Passando para os estudantes a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os estudantes, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, mudanças de atitudes e posturas, o que, nem sempre acontece.

Assim, a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num caminho para aprender Matemática e não apenas para se resolver problemas. Sendo assim é possível enfatizar que:

- A Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as ideias matemáticas e sobre o dar o sentido aos conceitos matemáticos;

- A Resolução de Problemas desenvolve o poder matemático nos estudantes, ou seja, a capacidade de pensar matematicamente, de utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão de conteúdos e de conceitos matemáticos;

- A Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os estudantes são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; e a partir disto a confiança e a autoestima dos estudantes aumenta;

- A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, trabalhadas passa a fazer mais sentido para os estudantes.

Trabalhar sobre partes e pedaços de Matemática não é fazer Matemática e nunca resultaria em compreensão. Exercícios resultantes de testes tradicionais podem produzir resultados a curto-prazo, mas os efeitos de longo-prazo devem produzir cidadãos capazes de admitir que não sabem Matemática. O simples domínio de habilidades não significa saber fazer Matemática.

Nesse sentido, Romanatto (2008, p.1) diz que,

> A resolução de problemas se apresenta como um dos caminhos mais promissores para o "fazer matemática" em nossas salas de aula. Sabemos que toda disciplina tem um corpo de conhecimento e uma lógica peculiar (a sua especificidade). No caso da Matemática, essa especificidade é a resolução de problemas. É o que postulava Descartes: "(...) não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problema".

Uma proposta apresentada sobre essa metodologia por Onuchic e Allevato (2011), a qual Allevato e Onuchic (2014) indicam como sugestão atual a organização de um roteiro de atividades em dez etapas: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso, formalização do conteúdo, proposição e resolução de novos problemas.

- *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É importante ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- *Leitura em conjunto* - Solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos;

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, consultar um dicionário.

- *Resolução do problema* - A partir da compreensão do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- *Observar e incentivar* – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- *Formalização do conteúdo* – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), a Resolução de Problemas como metodologia, trata de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a construção de novo conhecimento faz-se presente através de sua resolução.

Nesse sentido, para o desenvolvimento deste e-book selecionamos problemas sobre o Cálculo Diferencial, que talvez no início o estudante sinta dificuldade e precise encontrar um caminho de resolução, ou seja, que se torne um problema para ele. Tal dificuldade fará com que o estudante valorize seus conhecimentos prévios para que este possa utilizá-lo na busca de uma resposta.

2

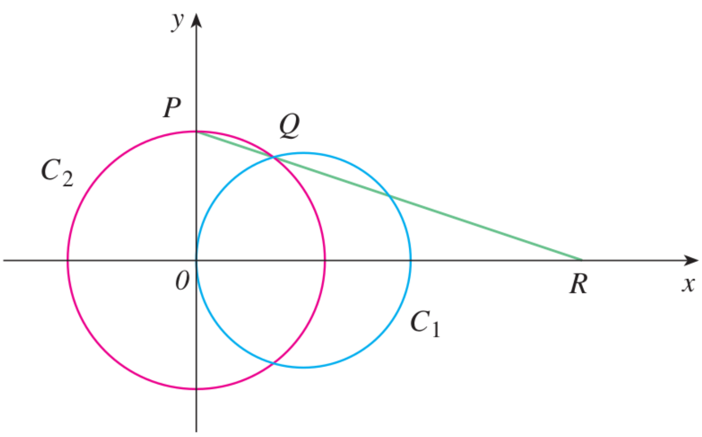
Problemas sobre limite e continuidade

2.1 Problemas

Neste capítulo são propostos dez problemas, os quais englobam os conteúdos de Limites e continuidade. As resoluções dos problemas se encontram no capítulo 6, mas pedimos ao leitor que consultem as resoluções apenas quanto for trabalhado o problema. Para mais problemas o leitor pode consultar a bibliografia de Cálculo referenciada.

Problema 2.1 A Figura 3 mostra um circulo fixo C_1 de equação $(x-1)^2+y^2=1$ e um circulo C_2, a ser escolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0,r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?(STEWART, 2016).

Figura 3 – Figura do Problema 1



Fonte: Stewart (2016)

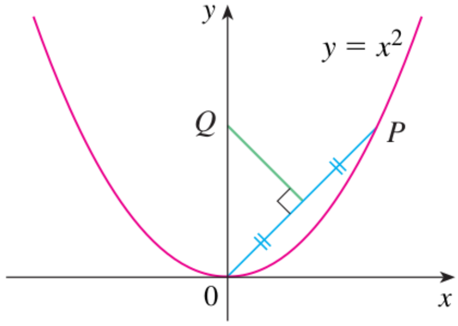
Problema 2.2 Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.(STEWART, 2016).

Problema 2.3 Encontre números a e b tais que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$.(STEWART, 2016).

Problema 2.4 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$.(STEWART, 2016).

Problema 2.5 A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP intersepta o eixo y. À medida que P tende a origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.(STEWART, 2016).

Figura 4 – Figura do Problema 5



Fonte: Stewart (2016)

Problema 2.6 Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c ele fica fixo.)

a) Esboce o gráfico de uma função continua com o domínio $[0, 1]$ cuja imagem também esta $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f

b) Tente fazer o gráfico de uma função continua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ que não tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

c) Use o teorema do valor intermediário para demonstrar que toda função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.(STEWART, 2016)

Problema 2.7 Se $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$. (STEWART, 2016).

Problema 2.8 **A contração de Lorentz** De acordo com a teoria da relatividade, o comprimento de um objeto – por exemplo, de um foguete – parece a um observador depender da velocidade com que o objeto se desloca com relação ao próprio observador. Se ele medir o comprimento L_0 do foguete em repouso, depois medir com a velocidade v, o comprimento parecerá

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Essa é a equação da contração de Lorentz. Nela, c é a velocidade da luz no vácuo cerca de $3 \times 10^8 m/s$. O que acontece com L a medida que v aumenta? Calcule $\lim_{v \to c^-} L$. Por quê foi necessário aplicar o limite lateral a esquerda?(THOMAS et al., 2009)

Problema 2.9 **Expansão térmica em equipamentos de precisão** Sabemos que os materiais, em sua maioria, se expandem quando aquecidos e se contraem quando resfriados. As dimensões de certos equipamentos de laboratório podem ser tão críticas que os locais onde são fabricados precisão ser mantidos a mesma temperatura dos laboratórios onde vão ser instalados. Uma típica barra de alumínio de $10cm$ de largura, a $70°F$, terá

$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

centímetros de largura a uma temperatura t próxima. Suponha que você vá usar uma barra como esta em um detector de ondas gravitacionais, no qual a largura da barra deve variar no máximo $0,0005cm$ em relação aos $10cm$ ideais. Qual a variação máxima de temperatura (em relação aos $70°F$ originais) permitida para que a barra se mantenha dentro das especificações?(THOMAS et al., 2009)

Problema 2.10 Calcule $\lim_{x \to 5} \left[(x^2 - 25) \cos\left(\frac{4x^3 - 2x + 5}{x^2 - 25} \right) + \frac{\sin(x^2 - 25)}{x - 5} \right]$

3

Limite e Continuidade de funções

Devemos observar que um dos conceitos básicos que o Cálculo se apoia é o de limite de funções. A noção de limite será utilizada posteriormente para se falar de continuidade e definir derivada e integral. Neste sentido, trabalharemos neste capitulo o conceito de limite desde sua noção intuitiva até a sua definição formal.

3.1 Limite

Inicialmente a noção de limite pode ser algo bem intuitivo, por exemplo no ensino básico quando estudava-se sobre dízimas periódicas foi provado que $1 = 0,999999\cdots$, no entanto por vezes, não é enxergado o número $0,999999\cdots$ como sendo a soma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} \tag{3.1}$$

O que é feito na maioria dos casos é o seguinte:

Chamemos o número representado pela soma acima de x, ou seja,

$$x = 0,999999\cdots .$$

Multiplicando (3.1) por 10 segue,

$$10x = 9,999999\cdots . \tag{3.2}$$

Agora, subtraindo (3.1) de (3.2) temos, $9x = 9$, o que implica, $x = 1$. Se o número fosse visto como a soma $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}$, poderíamos nos perguntar o que acontece quando o n se torna suficientemente grande, em outras palavras o que acontece com a soma quando o n tende a infinito.

Mas isto até o momento trata-se apenas de um início de conversa, o nosso objetivo é pensar em limites de funções, se temos uma função $f : A \to B$, e fixarmos um ponto $x \in A$, podemos nos perguntar o que acontece com a imagem de pontos próximos do A pela função f. Ou seja, suponha o número a próximo de x, com $x \neq a$, isto é, $|x - a| > 0$, podemos nos perguntar o que acontece com $f(a) \in B$, será que podemos afirmar que $f(x)$ está próximo de $f(a)$? tais questionamentos nos motivam a pensar no conceito de limite.

Tomemos agora o seguinte exemplo: considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que , $f(x) = x^2$, o que acontece com a imagem da função quando x se aproxima de 2? Vamos usar uma tabela para responder a este questionamento.

x	1	1,5	1,9	1.91	2	2,01	2,1	2,5	3
$f(x) = x^2$	1	2,25	3,61	3,6481	4	4,0401	4,41	6,65	9

Nota-se que quanto mais próximos ficamos de 2, mais a imagem se aproxima de 4. Com isto, mesmo que não olhemos para o número 2 podemos afirmar que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 é 4, simbolicamente escrevemos

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

onde as notações "$x \to 2$" significa "x tende a 2" e, "lim" significa "o limite de".

Podemos generalizar o conceito, consideremos $f(x)$ uma função, $a \in D(f)$ e $L \in Im(f)$, números genéricos, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e lê-se, "o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L".

Um outro exemplo que podemos considerar é o chamado problema da reta tangente, assim como se segue:

Problema Resolvido 3.1. *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.*

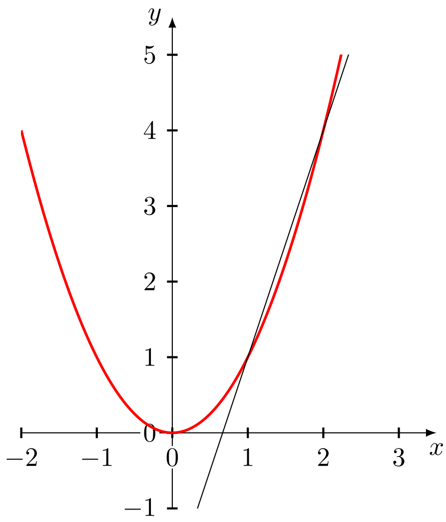
Resolução.

O nosso problema se encontra no fato de possuirmos apenas um ponto pelo qual deve-se passar a reta procurada. Sendo assim considere um segundo ponto $Q(x, x^2)$ pertencente ao gráfico de f. Da geometria analítica sabemos que a inclinação da reta, m_{PQ}, que passa pelos pontos P e Q é dada pela expressão

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \tag{3.3}$$

a figura a seguir ilustra a situação.

Figura 5 – Reta secante



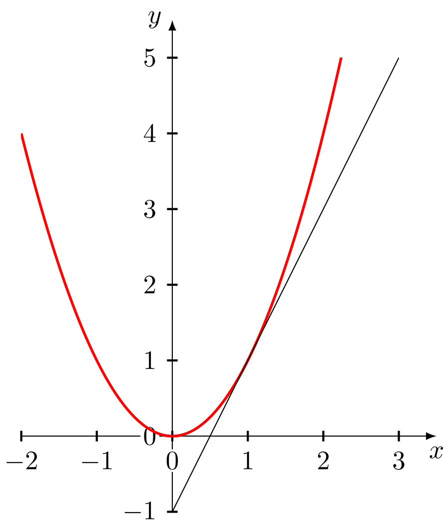
Se atribuirmos valores a x próximos de 1, no entanto diferentes de 1, observaremos que o valor dado na expressão (3.3) se aproxima cada vez mais de 2. Ou seja, a medida que o ponto Q se aproxima do ponto P, a reta secante "tende" a se tornar uma reta tangente, cujo coeficiente angular será o "limite" dos valores de (3.3).

Tomando o coeficiente angular como sendo 2 (o valor aproximado quando x está próximo de 1)[1], temos a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto P

$$y = 2x - 1 \tag{3.4}$$

o gráfico é ilustrado a seguir:

Figura 6 – Reta tangente



Em resumo, podemos imaginar que o ponto Q caminha sobre o gráfico da função f em direção ao ponto P, enquanto estes pontos se tornam cada vez mais próximos, a reta secante

[1] Fica a cargo do leitor fazer a aproximação do valor e constatar que realmente é o 2 como afirmamos

que passa pelos pontos P e Q se aproxima cada vez mais de uma reta tangente até que isto ocorra na posição limite. $\square$

A situação anterior pode ser expressada através da equação

$$\lim_{P \to Q} m_{PQ} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \tag{3.5}$$

onde o operador "lim" representa as aproximações sucessivas que devem ser feitas em torno do 1, mas desconsiderando o próprio 1.

Observação 3.1. *Ainda podemos representar a mesma situação expressa por (3.5) da seguinte maneira. Considere um número $h > 0$, e além do ponto $P(1, 1)$ considere $Q(1 + h, (1 + h)^2)$, é obvio que Q é um ponto sobre a parábola representadas nas Figuras (5) e (6). Sendo assim se fizermos $h \to 0$, h se aproximar de zero, então o ponto Q irá se aproximar do ponto P. Com isto podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola no ponto P através da seguinte expressão,*

$$\lim_{P \to Q} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \tag{3.6}$$

As expressões dadas em (3.5) e (3.6), serão de grande importância mais adiante quando formos estudar o conceito de derivada. Mas, por hora, voltemos a ideia de limite.

Em uma grande quantidade de funções veremos que o número que chamamos de limite quando x se aproxima de a, coincide com a imagem $f(a)$, estas funções são chamadas de continuas no ponto a (este conceito será aprofundado mais adiante), no entanto existem funções que não estão definidas em um certo ponto. Por exemplo, $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{x - 2}.$$

Não é difícil ver que f não está definida para $x = 2$ e, neste caso, o que dizer do limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2? Note que $f(x)$ pode ser vista da forma $\frac{h(x)}{g(x)}$, onde $g(x) = x - 2$ e

$$h(x) = x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) = g(x)(x - 7),$$

desta forma podemos reescrever $f(x)$ da seguinte maneira,

$$f(x) = \frac{g(x)(x - 7)}{g(x)} = (x - 7).$$

Em resumo, calcular

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x - 2}$$

é o mesmo[2] que calcular $\lim\limits_{x \to 2} x - 7$, que de imediato temos o resultado -5.

Para trabalharmos de maneira a obedecer o rigor matemático é necessário uma formalização do conceito de limite, e é isto que a seção seguinte traz.

[2] é o mesmo em um sentido intuitivo não podemos esquecer do rigor matemático embutido nas manipulações algébricas

3.1.1 Definição Formal de Limite

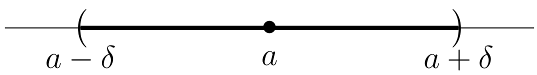
Inicialmente consideremos algumas definições e conceitos sobre a topologia da reta ($\mathbb{R}$) os quais devem ser estudados mais precisamente em um curso de análise real.

Definição 3.1 (Ponto interior). *Consideremos $X \subset \mathbb{R}$, um subconjunto dos números reais, diremos que $a \in X$ é um ponto interior a X se existir $\epsilon > 0$ de forma que o intervalo $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ esteja contido em X, o conjunto de todos os pontos interiores é chamado de interior de X e denotado por $int\ X$.*

Definição 3.2 (Vizinhança). *Quando $a \in int\ X$ diz-se que X é uma vizinhança do ponto a. Em outras palavras, chamamos vizinhança (ou entorno) de centro em a e raio δ o intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$, onde $\delta > 0$.*

Notação: $V(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - a| < \delta\}$.

Representação gráfica:

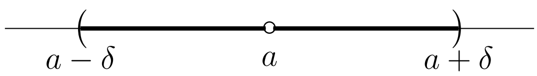


Definição 3.3 (Vizinhança perfurada). *É o intervalo $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. Ou seja, é um entorno de raio δ onde o centro a não está incluído.*

Notação: $V_p(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$

$$V_p(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R};\ \ a - \delta < x < a + \delta \ \ e \ \ x \neq a\}.$$

Representação gráfica:



Um ponto a será chamado ponto de acumulação de X se toda vizinhança V de a contêm pontos de X diferentes do próprio a, isto é, $V \cap X \backslash \{a\} \neq \emptyset$. Ou ainda podemos definir ponto de acumulação em termos de distância entre pontos da seguinte forma:

Definição 3.4 (Ponto de acumulação). *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se para todo $r > 0$ existe $x \in X$ tal que $x \neq a$ e $|x - a| < r$.*

Observação 3.2. *Dizer que a é ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}$ é o mesmo que dizer que podemos nos aproximar tanto quanto queiramos de a, sem que precisemos alcançar o próprio a.*

Definir limites de forma intuitiva deixa muito a desejar do ponto de vista do rigor matemático, pra resolver este problema temos a seguinte definição, conhecida como definição formal ou definição precisa de limite:

Definição 3.5 (Limite)**.** *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de I . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos*

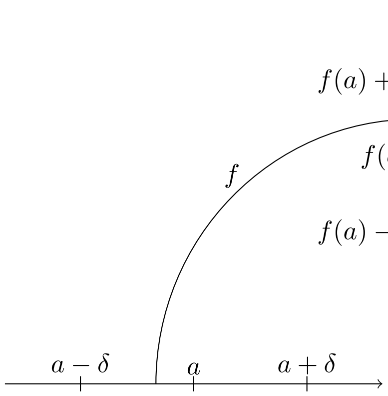
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, *tal que* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Observação 3.3. *A partir de agora todas as vezes que se falar do limite de uma função tendendo a um número a, será omitido a informação de a ser ponto de acumulação no entanto isto deve ser considerado.*

Observação 3.4. *A indicação $0 < |x - a|$ na definição de limite significa que estamos considerando o número x diferente de a.*

Figura 7 – Comportamento do limite



Podemos representar a escrita matemática através de um diagrama (ver Figura 7). A definição afirma que se for dado qualquer intervalo, $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ em torno de L, então podemos encontrar um intervalo, $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a de tal forma que f leve todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente o próprio a) em $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

No problema resolvido a seguir, utilizaremos a equação de uma reta para ilustrar o que ocorre com os números ϵ e δ no processo de limite.

Problema Resolvido 3.2. *Dada a função $f(x) = 2x + 1$ e $\epsilon = 0,001$, encontre δ que satisfaça $|f(x) - 3| < 0,001$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.*

Resolução.

O que o problema nos pergunta é o quão próximo de 1 devemos tomar o número x para que a distância da sua imagem $f(x)$ diste menos de 0,001 do número $f(1) = 3$.

Assim para que possamos obter o número δ procurado, primeiro devemos admitir que $|f(x) - 3| < 0,001$, e então trabalhamos sobre esta expressão

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= |2x + 1 - 3| \\ &= |2x - 2| \\ &= 2|x - 1| \\ &< 0,001 = \epsilon \end{aligned}$$

e isto resolve o nosso problema pois, obtemos $2|x - 1| < \epsilon$ então, basta tomar $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ ou seja obtemos $\delta = 0,0005$. □

Teorema 3.1 (Unicidade do limite)**.** *Seja f uma função, se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ então, $L_1 = L_2$.*

Demostração. Ora, se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta_1$$

analogamente se $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta_2$$

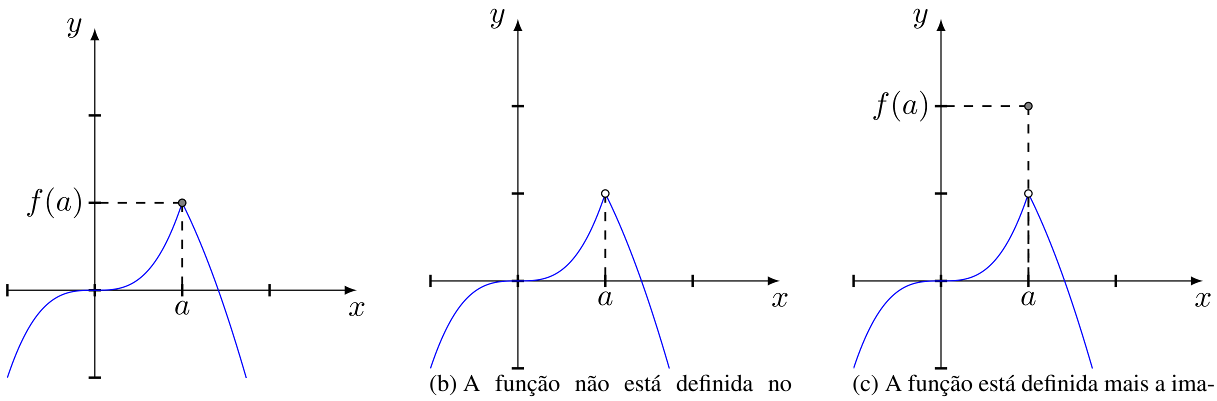
Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, de modo que, sempre que $|x - a| < \delta$ tenhamos $|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Supondo que seja $L_1 \neq L_2$, temos $|L_1 - L_2| > 0$ como épsilon é arbitrário podemos supor $\epsilon = |L_1 - L_2| > 0$, daí

$$\begin{aligned} \epsilon &= |L_1 - L_2| \\ &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

absurdo, com isto só resta $L_1 = L_2$. ■

A seguir na Figura 8, ilustramos três casos onde ocorre a existência de um limite. Na Figura 8a devemos ter o limite da função quando x se aproxima de a coincidindo com a imagem da função neste ponto. Na Figura 8b devemos ter o limite da função exatamente igual a do caso anterior mas a função não está definida no ponto de abscissa a, e finalmente na Figura 8c temos os limites iguais aos anteriores e a função está definida para $x = a$, no entanto este número é diferente do limite.

Figura 8 – Diferentes representações da existência de um limite



(a) Limite coincide com a imagem

(b) A função não está definida no ponto

(c) A função está definida mais a imagem do ponto não é o limite

Após esta análise fica claro que a função não precisa estar definida no ponto para que o limite exista, isto é, quando estamos falando de limite só nos interessa o que ocorre próximo ao ponto, ainda mais, estas obervações levam a seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Sejam f e g funções, com $f(x) \neq g(x)$ apenas para $x = a$ então,* $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$.

Demostração. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sendo assim para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente existe $\delta > 0$ de tal forma que $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Mas se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $x \neq a$ assim $f(x) = g(x)$ e podemos escrever, $|g(x) - L| < \epsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, ou seja, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. Isto mostra o resultado. ■

Problema Resolvido 3.3. *Mostre que* $\lim_{x \to a} mx + n = ma + n$.

Resolução.

Existem duas possibilidades. Primeiro podemos ter $m = 0$, daí ficamos com $\lim_{x \to a} n$, onde n é constante e devemos mostrar que o resultado deste limite é n. Neste caso, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente não nos interessa o número δ tomado que teremos $|f(x) - n| = |n - n| = 0 < \epsilon$.

Em um segundo caso temos $m \neq 0$, daí, para todo $\epsilon > 0$, considere $\delta = \dfrac{\epsilon}{|m|}$, então temos,

$$
\begin{aligned}
0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| &= |mx + n - (ma + n)| \\
&= |m(x - a)| \\
&= |m||x - a| \\
&< |m|\delta \\
&= |m|\frac{\epsilon}{|m|} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

isto mostra o resultado. □

3.1.2 Propriedades dos limites

A definição formal de limite é bastante útil em conteúdos mais avançados, como um curso de análise real por exemplo. Em Cálculo, os limites são geralmente calculados através de propriedades, a saber:

Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, $k \in \mathbb{R}$. Daí tem-se

1. $\lim_{x\to a} k = k$
2. $\lim_{x\to a}(kf)(x) = kL$
3. $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L \pm M$
4. $\lim_{x\to a}(fg)(x) = LM$
5. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$; $g(x) \neq 0$ e $M \neq 0$.

Antes de demostrar estas propriedades consideremos o seguinte lema:

Lema 3.1. *Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então existe $\delta_1 > 0$ e $N > 0$ tais que*

$$|f(x)| < N \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1$$

Demostração. Com efeito, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Desta forma, considere $\delta_1 = \delta$ e $N = \epsilon + |L|$. Daí,

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| < \epsilon + |L| = N.$$

isto mostra o resultado. ■

Agora provaremos as propriedades operatórias propostas para o cálculo de limites.
Demostração.

1. Esta propriedade segue do Problema Resolvido 3.3.
2. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ temos que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}$

   Sendo assim para este mesmo delta devemos ter

$$|kf(x) - kL| = |k(f(x) - L)| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$$

   ou seja $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$, como devíamos demonstrar.

3. Provaremos o caso do limite da soma, o caso da diferença fica a cargo do leitor interessado.

   Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe δ_1, δ_2 tais que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

   e

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

   Sendo assim tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, com isto sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |f(x) - L + g(x) - M| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

   ou seja, $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$, como deveríamos demonstrar.

4. Por hipótese $\lim_{x\to a} f(x) = L$, sendo assim pelo Lema 3.1 existem $\delta_1 > 0$ e $N > 0$ tais que

$$|f(x)| < N \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

   Por outro lado, como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, para todo $\epsilon > 0$, exitem $\delta_2, \delta_3 > 0$ tais que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2(1 + |M|)} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

   e

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2N} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_3$$

   Com isto tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, devemos ter

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\ &\leq |f(x)(g(x) - M)| + |M(f(x) - L)| \\ &= |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\ &< N\frac{\epsilon}{2N} + |M|\frac{\epsilon}{2(1 + |M|)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$ como deveríamos demostrar.

5. Como consequência do item anterior basta mostrar que $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$, onde $g(x)$ e M são ambos diferentes de zero.

   Por hipótese $\lim_{x \to a} g(x) = M$, ou seja, pelo lema (3.1) , $\exists \delta_1 > 0$ e $N > 0$ tais que

$$|g(x)| < N \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

   por outro lado para todo $\epsilon > 0$ podemos considerar $\delta = \delta_1$, de forma que tenhamos

$$|g(x) - M| < \epsilon N |M| \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

   com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \left| \frac{M - g(x)}{g(x)M} \right| \\
&= \frac{|M - g(x)|}{|g(x)||M|} \\
&< \frac{\epsilon N |M|}{N|M|} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

   ou seja, $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$, como deveríamos demonstrar.

■

Ainda para que possamos calcular limites com uma certa facilidade consideremos a seguinte proposição

Proposição 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \sum_{i=0}^{n} k_i x^i$, isto é, f é uma função polinomial de grau n, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja,*

$$\lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n} k_i x^i = \sum_{i=0}^{n} k_i a^i$$

Antes de prosseguir com a prova da proposição demonstremos o seguinte lema

Lema 3.2. *Para cada monômio $g(x) = x^m$ devemos ter $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x^m = a^m$.*

Demostração. Usaremos indução sobre m. Para $m = 1$ temos $g_1(x) = x$, mas pelo Problema Resolvido 3.3 sabemos que $\lim_{x \to a} x = a$. Suponha que seja válido para $m = k$, isto é, temos

$g_k(x) = x^k$ e $\lim\limits_{x\to a} x^k = a^k$. Com isto, definimos a função $g(x) = x^{k+1}$. Note que $g(x) = (g_1 g_k)(x)$, isto é,

$$g(x) = x^k \cdot x = x^{k+1},$$

nos resta mostrar que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} x^{k+1} = a^{k+1}.$$

Então façamos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} x^{k+1} &= \lim_{x\to a} x^k \cdot x \\
&= \lim_{x\to a} x^k \cdot \lim_{x\to a} x \\
&= a^k \cdot a \\
&= a^{k+1}
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. ■

Agora provemos a proposição,

Demostração. A propriedade da soma de limites pode ser estendida por indução a qualquer número finito de funções (a demonstração desse fato fica a cargo do leitor interessado), sendo assim o limite do polinômio fica da da seguinte forma

$$\lim_{x\to a} \sum_{i=0}^{n} k_i x^i = \lim_{x\to a} k_0 + \lim_{x\to a} k_1 x + \lim_{x\to a} k_2 x^2 + \cdots + \lim_{x\to a} k_n x^n$$

com isto invocamos as propriedades (1) e (2) dos limites e o lema (3.2) e obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \sum_{i=0}^{n} k_i x^i &= k_0 + k_1 a + k_2 a^2 + \cdots + k_n a^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} k_i a^i
\end{aligned}$$

e a proposição está demonstrada. ■

Observação 3.5. *Toda a teoria abordada até o momento nos permite calcular limites com uma certa facilidade. A Proposição 3.2 mostra que para calcular o limite de uma função polinomial quando x tende a um certo número a, resume-se ao cálculo da imagem da função no ponto de abcissa a. Além disso, o limite de funções racionais, na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ também se resume a cálculo de imagem, no seu domínio.*

Podemos ilustrar a observação anterior com o seguinte

Problema Resolvido 3.4. *Seja $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ uma função racional. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.*

Resolução.

Devemos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x-2}$, note que $0 \in D(f)$, com isto basta que utilizemos as propriedades e ficamos com

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^2+1}{\lim\limits_{x\to 0} x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^2 + \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

ou ainda poderíamos ter feito

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x-2} = \frac{0^2+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

e conseguimos o resultado de maneira direta, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. □

3.1.3 Limites indeterminados

É muito comum durante o cálculo de limites nos depararmos com quocientes indeterminados ou impossíveis, por exemplo os quocientes da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ são chamados de indeterminados, nota-se isso pelo fato de poderem assumir qualquer valor desejado sem que ocorra absurdos, e o quociente $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}$ é impossível[3], ainda é possível que ocorram outras situações complicadas, por exemplo $\infty - \infty$ ou 1^∞, e estas devem ser trabalhadas cuidadosamente.

Olhemos inicialmente para funções racionais onde ocorre "problemas" da forma $\frac{0}{0}$. Consideremos, a critério de exemplo, a função $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$, se tentarmos calcular $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, da forma que é apresentado no Problema Resolvido 3.4 encontraremos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim para ilustrarmos como devemos proceder considere o seguinte

Problema Resolvido 3.5. *Determine* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *onde,* $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$.

Resolução.

Inicialmente tentamos proceder como no Problema Resolvido 3.4, assim obtemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 2x + \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} x+1} = \frac{0}{0} \quad \textbf{[indeterminado]}$$

pode-se observar que desta maneira não conseguimos determinar o limite. Sendo assim, optemos por uma segunda abordagem. Note que f não está definida em $x = -1$, podemos definir uma segunda função, g, de modo que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Para definir g trabalhemos algebricamente com a lei de formação de f, daí

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)} = x+1$$

[3] Estudaremos mais precisamente o porquê, quando discutirmos os limites infinitos

com isto definimos $g(x) = x + 1$. Note que $g(x)$ assim definida é idêntica a f para todos os pontos com exceção de $x = -1$, invocando a Proposição 3.1, concluímos que $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} g(x)$, mas o limite de g quando $x \to -1$ é facilmente calculado,

$$\lim_{x \to -1} x + 1 = 0$$

assim concluímos que $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$. □

Observação 3.6. *O procedimento feito anteriormente pode ser desenvolvido de forma imediata sem a necessidade de alertar sobre a utilização da Proposição 3.1. No entanto, o estudante deve conhecer a teoria que sustenta tais manipulações.*

3.1.4 Limites laterais

Para falarmos de limites laterais é interessante entendermos o que é uma restrição de uma função.

Definição 3.6 (Restrição)**.** *Considere uma função $f : A \to B$ e S um conjunto tal que $S \subset A$. A restrição de f a S, denotada por $f|_S$, é a função $f|_S : S \to B$ tal que*

$$(f|_S)(x) = f(x),$$

para todo $x \in S$.

Em outras palavras, uma restrição é função com domínio restrito a um subconjunto do domínio. A partir de agora, tomaremos o cuidado de trazer para conhecimento do leitor, além das definições e resultados dos limites de funções considerando todo o seu domínio, também sobre a definição e propriedades de limite em restrições de funções.

Teorema 3.2 (Limite da restrição)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $X \subset \mathbb{R}$. Sejam S um subconjunto de X e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de S. Nesse caso, a também é ponto de acumulação de X. Além do mais, se f possui limite no ponto a, então $f|_S$ também possui limite no ponto a e o limite de $f|_S$ no ponto a é igual ao limite de f no ponto a.*

Demostração. Dado $\epsilon > 0$, o mesmo $\delta > 0$ que existe em virtude do fato que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, nos mostra que $\lim_{x \to a} (f|_S)(x) = L$. ■

Por vezes uma função pode não estar definida a esquerda ou a direita de um certo número a, isto é, não esta definida para números $x < a$ ou $x > a$, mas pode ser necessário estudar o comportamento de tais funções. Considere o exemplo da função $f(x) = \sqrt{x}$, sendo f uma função real, é possível observar que f não está definida para $x < 0$. Sendo assim, como devemos proceder se quisermos calcular $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$? Neste caso é fácil perceber que se nos aproximarmos do zero tomando valores de x maiores que o zero, a imagem $f(x)$ fica cada vez mais próxima do zero e assim obtemos o resultado do limite, $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

O processo de limite executado anteriormente exige que os leitores percebam que só podemos nos aproximar do zero tomando valores maiores que o zero, neste caso dizemos que calculamos o limite a direita do zero. Os conceitos de limites laterais são definidas precisamente a seguir:

Definição 3.7 (Limites laterais)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $X \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Se a é ponto de acumulação de $(a, +\infty) \cap X$, então o limite a direita de f em a, denotado por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, é definido como o limite no ponto a da restrição de f a $(a, +\infty) \cap X$. Simultaneamente, se a é um ponto de acumulação de $(-\infty, a) \cap X$, então o limite a esquerda de f em a, denotado por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, é definido como o limite do ponto a da restrição de f a $(-\infty, a) \cap X$.*

Ou ainda podemos escrever a definição anterior como é mais comumente utilizada nos textos de Cálculo.

Definição 3.8 (Limite a direita)**.** *Seja f uma função, diremos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela direita é L, simbolicamente*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L \tag{3.7}$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal modo que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad a < x < \delta + a.$$

Analogamente temos a definição de limite a esquerda,

Definição 3.9 (Limite a esquerda)**.** *Seja f uma função, diremos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela esquerda é L, simbolicamente*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L \tag{3.8}$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal modo que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad -\delta + a < x < a.$$

Observação 3.7. *As notações para os limites das equações (3.7) e (3.8), podem ser substituídas respectivamente por*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \tag{3.9}$$

e

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L. \tag{3.10}$$

Ainda com intuito de avaliar os limites laterais, agora sob uma restrição em f devemos considerar o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $X \subset \mathbb{R}$ e seja a um ponto de acumulação de X. Seja S um subconjunto de X com a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$:*

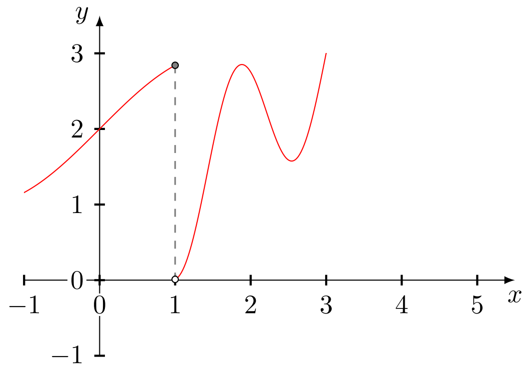
$$0 < |x - a| < r \Rightarrow x \in S.$$

Neste caso a também é um ponto de acumulação de S. Além do mais, f possui limite no ponto a se, e somente se, $f|_S$ possui limite no ponto a. Em virtude do Teorema 3.2, esses dois limites são iguais se existirem.

Demostração. Dado $\epsilon > 0$, se tomamos $\delta > 0$ que existe em virtude do fato que $\lim_{x\to a}(f|_S)(x)$ existe, então $\delta' = \min\{\delta, r\}$ nos mostra que o limite existe. Basta notar que se $x \in X$ e se $0 < |x - a| < \delta'$ então $0 < |x - a| < r$ e portanto $x \in S$, pela nossa hipótese. ∎

Ainda podem surgir situações como a ilustrada da Figura 9, onde podemos calcular limites a esquerda e a direita de uma certo número mas estes são diferentes, neste caso dizemos que o limite (bilateral) não existe neste número.

Figura 9 – Limites laterais diferentes



O seguinte teorema expressa o que esta ilustrado na Figura 9,

Teorema 3.4. *Seja f uma função real. O $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se,*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = L = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

Este teorema será estabelecido como corolário do seguinte teorema mais forte,

Teorema 3.5. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $X \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Sejam $S_1, S_2, \cdots, S_n$ subconjuntos de X tais que*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

e tais que a seja ponto de acumulação de S_i, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Se para um certo $L \in \mathbb{R}$ os limites em a de $f|_{S_i}$ existem e são iguais a L para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, então o limite de f em a existe e é igual a L.

Demostração. Dado $\epsilon > 0$, se δ_i existe em virtude do fato que

$$\lim_{x\to a}(f|_{S_i})(x) = L,$$

então $\delta = \min\{\delta_1.\delta_2, \cdots, \delta_n\}$ nos mostra que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ■

3.1.5 Teorema do confronto

Apresentaremos e provaremos o conhecido e importante teorema do Cálculo que é o chamado Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche), mas antes precisamos estabelecer alguns resultados.

Teorema 3.6. *Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.*

Corolário 3.1. *Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x exceto possivelmente em a então $L \leq M$.*

Teorema 3.7 (Teorema do confronto)**.** *Sejam f, g e h funções e suponha $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, quando x está próximo de a, exceto possivelmente no próprio a. Se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$$

então,

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Demostração. Para todo $\epsilon > 0$ dado existem δ_1 e δ_2 ambos positivos tais que,

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

e

$$|g(x) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

isto é,

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

e

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, com isto ambas as desigualdades anteriores são satisfeitas sempre que $0 < |x - a| < \delta$. E, desta forma, $L - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \epsilon$, ou seja, $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Logo $\lim_{x\to a} h(x) = L$. ■

Em grande parte dos casos em que necessitamos utilizar o Teorema 3.7, o nosso problema se concentra em encontrar as funções $f(x)$ e $g(x)$ que tornem a desigualdade do teorema verdadeira. O seguinte problema ilustra como devemos proceder

Problema Resolvido 3.6. *Determine o limite da função $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, quando x tende a zero.*

Resolução:

Ora sabemos que a função seno é limitada e

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

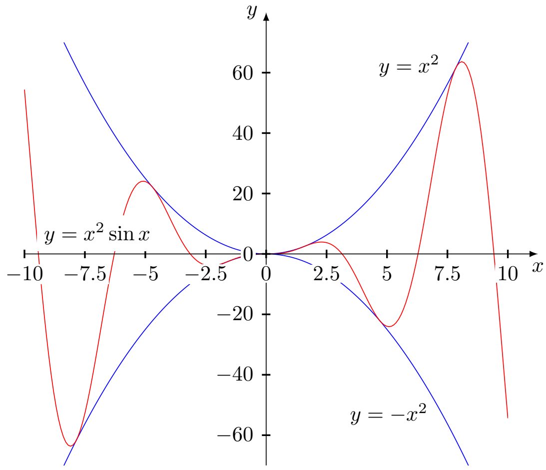
para todo x real. Por outro lado a função $g(x) = x^2$ é sempre não negativa, sendo assim não há problema em multiplicar a desigualdade anterior por $g(x)$, sendo assim obtemos

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} x \leq x^2.$$

Note que $\lim_{x \to 0} -x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$ e, portanto, pelo Teorema 3.7 segue que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} x = 0$, isto é, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Este resultado pode ser enxergado claramente no seguinte gráfico

Figura 10 – Exemplo para o teorema do confronto



onde as curvas em azul são as parábolas $y = -x^2$ e $y = x^2$, e a curva em vermelho é a nossa função $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, nota-se que o comportamento de tais funções se torna idêntico quando estamos suficientemente próximos do zero. □

Além desse relevante resultado, o teorema do confronto nos fornece um corolário de grande utilidade que envolve funções limitadas. Mas, para apresentá-lo precisamos antes do seguinte:

Teorema 3.8. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $X \subset \mathbb{R}$, e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Temos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.*

Demostração. De acordo com a definição, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ equivale dizer que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon.$$

Novamente, de acordo com a definição, $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ é o mesmo que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - 0| < \epsilon$$

Obviamente essas duas coisas são equivalentes, já que:

$$|f(x) - 0| = ||f(x)| - 0|.$$

■

Antes de passarmos adiante, lembremos da definição de função limitada.

Definição 3.10 (Função limitada)**.** *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in X$. Dizemos que f é limitada inferiormente se existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq N$, para todo $x \in X$. Finalmente, dizemos que f é limitada se for ao mesmo tempo limitada superiormente e inferiormente.*

Agora podemos apresentar o corolário mencionado anteriormente.

Corolário 3.2 (do teorema do Confronto)**.** *Sejam*

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ e } g : X \to \mathbb{R}$$

funções com $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se f é limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Demostração. Seja $K \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in X$, esse K existe pelo fato de f ser limitada. Temos então

$$|f(x)g(x)| \leq K|g(x)|$$

e portanto

$$-K|g(x)| \leq f(x)g(x) \leq K|g(x)|,$$

para todo $x \in X$. Como $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, o Teorema 3.8 nos dá:

$$\lim_{x \to a} K|g(x)| = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} -K|g(x)| = 0.$$

A conclusão segue do teorema do confronto. ■

3.1.6 Limites fundamentais

Nesta seção, estudaremos limites importantes que são necessários no cálculo de derivadas de funções elementares pela definição.

Limite fundamental trigonométrico

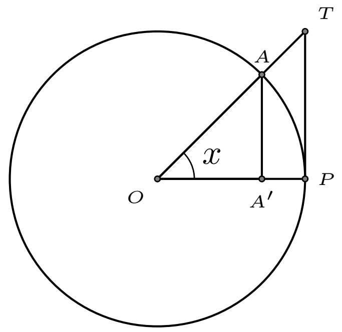
Neste momento, iremos fazer uso do Teorema 3.7 combinado com argumentos geométricos para estudarmos o limite fundamental trigonométrico, o qual relaciona um ângulo com o seu seno nas proximidades de 0 radianos.

Proposição 3.3. *O limite da função $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ quando x tende a zero é 1, isto é,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Demostração. Para darmos inicio a demonstração consideremos a seguinte figura

Figura 11 – Demonstração de $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$



A circunferência representada na Figura 11 possui raio 1. Consequentemente temos os pontos $O = (0,0), A = (\cos x, \text{sen } x), A' = (\cos x, 0), P = (1,0)$ e $T = (1, \tan x)$. Sejam k_1 a área do triângulo $OA'A$, S a área do setor circular OPA e k_2 a área do triângulo OPT. Observando a Figura 11 obtemos a desigualdade,

$$k_1 < S < k_2 \tag{3.11}$$

explicitando as respectivas áreas, (3.11) se torna

$$\frac{\cos x \,\text{sen } x}{2} < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \tag{3.12}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x. \tag{3.13}$$

Tomando os limites na desigualdade acima quando $x \to 0$ obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x \tag{3.14}$$

isto é,

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \tag{3.15}$$

assim segue do teorema do confronto (Teorema 3.7) que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

como deveríamos demonstrar. ■

Limite fundamental exponencial

Em matemática uma sequência numérica é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um único numero real $a(n)$. Em geral muda-se a notação de tal função, a imagem $a(n)$ do $n-$ésimo número natural chamamos $n-$ésimo termo da sequência e escrevemos a_n, a_n também será chamado termo geral da sequência. Uma sequência ficará inteiramente determinada se escrevemos o seu conjunto imagem, da forma,

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\geq 1},$$

quando não houver risco de confusão ainda poderá ser escrito apenas, $\{a_n\}$. Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$, dizemos que ela possui limite $a < \infty$, e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, se para todo $\epsilon > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$, de tal forma que, sempre que $n > p$ tivermos $|a_n - a| < \epsilon$. Se tal número a existe dizemos que a sequência é convergente, caso contrário dizemos que a sequência é divergente.

Estas breves considerações a respeito de sequências serão suficientes, para que possamos definir o número e de forma precisa. Dada a sequência,

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$$

é possível provar que ela é convergente, então podemos definir

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

neste caso, para que possamos obter aproximações para o número e, basta que tomemos um n suficientemente grande na sequência anteriormente citada. Apesar do limite não ser algo trivial, é possível provar que $e \in [2, 3]$.[4]

O limite tratado na definição do número e é tratado inicialmente para valores naturais, mas pode ser estendido para valores reais, onde obtemos,

$$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ou ainda,

$$e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}\ .$$

Limite fundamental logarítmico

Lema 3.3 (Limite fundamental logarítmico)**.** *O limite da função* $f(\sigma) = \dfrac{a^\sigma - 1}{\sigma}$*,* $a > 0$ *e* $a \neq 1$*, quando* $\sigma \to 0$ *existe, e vale* $\ln a$*, isto é,*

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{a^\sigma - 1}{\sigma} = \ln a.$$

[4] Isto não será demonstrado no momento pois fugiria do objetivo do texto.

Demostração. Basta que façamos $\lambda = a^\sigma - 1$ de onde obtemos $\sigma = \dfrac{\ln(\lambda+1)}{\ln a}$, ainda quando $\sigma \to 0$ teremos $\lambda \to 0$, e com isto ficamos com

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 0}\frac{a^\sigma - 1}{\sigma} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{\dfrac{\ln(\lambda+1)}{\ln a}} \\
&= \ln a \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda+1)} \\
&= \ln a \frac{\lim_{\lambda\to 0} 1}{\ln \lim_{\lambda\to 0}(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} \\
&= \ln a \frac{1}{\ln e} \\
&= \ln a
\end{aligned}$$

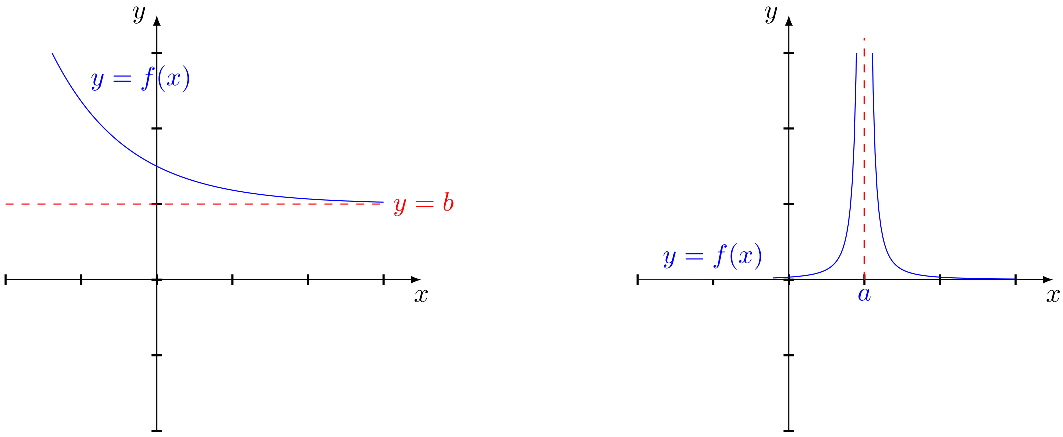
e o lema fica assim demonstrado. ■

3.1.7 Limites infinitos, limites no infinito e assintotas

Nesta seção vamos estudar a ideia de comportamento final da função ou limite no infinito (do mesmo modo no infinito negativo), também será estudado a ideia de limite infinito. Neste caso, podemos dizer que a função se torna tão grande (ou pequena no caso do infinito negativo) quanto queiramos especialmente quando estamos próximos de um certo número.

Para ilustrar essa ideia podemos considerar os gráficos da Figura 12.

Figura 12 – Limites infinitos e no infinito



(a) Limite no infinito

(b) Linite infinito

Observando o gráfico (12a) podemos notar que quanto maior é o valor de x mais próximo do número b se torna a imagem $f(x)$, sendo assim podemos dizer que o limite da função f quando x tende a infinito é b, simbolicamente escrevemos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Já no gráfico (12b) nota-se que quanto mais próximo do número a estão os valores de x maior se torna a imagem $f(x)$, neste caso dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito, simbolicamente escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Apesar das noções apresentadas serem bastante intuitivas, é necessário a apresentação das definições formais em termos de ϵ e δ. Dessa maneira, temos:

Definição 3.11 (Limite no infinito)**.** *Seja f uma função definida em uma semi-reta $(a, +\infty)$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a infinito é L, simbolicamente*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $N > 0$ tal que, $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > N$.

Analogamente é possível definir o limite de uma função quando x tende ao infinito negativo

Definição 3.12. *Seja f uma função definida em uma semi-reta $(-\infty, a)$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende ao infinito negativo (ou "menos infinito") é L, simbolicamente*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $N > 0$ tal que, $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x < -N$.

Ainda é possível mostrar que as propriedades operatórias dos limites ainda continuam válidas para os limites no infinito. Para o cálculo de tais limites o seguinte teorema é de grande utilidade

Teorema 3.9. *Se r for um número inteiro positivo qualquer temos*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Demostração. Provaremos o primeiro item, o segundo deve ser verificado pelo leitor interessado.

Para fazermos a demonstração de (i) devemos exibir $N > 0$ de tal modo que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente tenhamos, $|\frac{1}{x^r} - 0| = \frac{1}{|x|^r} < \epsilon$ sempre que $x > N$.

Então para todo $\epsilon > 0$ tome $N = \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$. Daí se $x > N$ temos

$$\begin{aligned} x &> \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}} \Rightarrow \\ |x| &> \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}} \Rightarrow \\ \frac{1}{|x|} &< \epsilon^{\frac{1}{r}} \Rightarrow \\ \left|\frac{1}{x^r}\right| &< \epsilon \end{aligned}$$

isto mostra o resultado. ∎

Deste teorema decorre a seguinte proposição

Proposição 3.4. *Seja* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$*, onde* p *e* q *são polinômios com* q *não identicamente nulo. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ *se, os sinais dos coeficientes dos termos de maior grau farem iguais e* $\partial p > \partial q$*;*

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *se, os sinais dos coeficientes dos termos de maior grau forem diferentes e* $\partial p > \partial q$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *se,* $\partial p < \partial q$*;*

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{k}{r}$ *se,* $\partial p = \partial q$*; onde* k *e* r *são respectivamente os coeficientes dos termos de maior grau de* p *e* q*.*

Demostração. Comecemos por definir $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} k_i x^i$ e $q(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} r_i x^j$, e suponhamos ao menos k_n e r_m diferentes de zero. Com isto obtemos $\partial p = n$ e $\partial q = m$. Desta maneira f se escreve como sendo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i=0}^{n} k_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} r_i x^j} \\ &= \frac{k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_0}{r_m x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_0} \\ &= \frac{k_n x^{n-m} + k_{n-1}x^{n-1-m} + k_{n-2}x^{n-2-m} + \cdots + k_0 x^{-m}}{r_m + r_{m-1}x^{-1} + r_{m-2}x^{-2} + \cdots + r_0 x^{-m}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Agora tomemos o limite quando x tende a infinito na equação (3.16)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k_n x^{n-m} + k_{n-1}x^{n-1-m} + k_{n-2}x^{n-2-m} + \cdots + k_0 x^{-m}}{r_m + r_{m-1}x^{-1} + r_{m-2}x^{-2} + \cdots + r_0 x^{-m}}$$

Agora devemos analisar as três possibilidades exibidas na proposição.

(i) se $\partial p > \partial q$ teremos $n > m$ ou seja $n - m > 0$, com isto temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k_n x^{n-m} + k_{n-1}x^{n-1-m} + k_{n-2}x^{n-2-m} + \cdots + k_0 x^{-m}}{r_m + r_{m-1}x^{-1} + r_{m-2}x^{-2} + \cdots + r_0 x^{-m}} = \frac{+\infty}{r_m} = +\infty.$$

Supondo k_n e r_m ambos positivos ou ambos negativos. Isto prova a primeira afirmação.

Em (ii) basta notar que o limite anterior se torna $-\infty$ desde que tenhamos os sinais dos coeficientes opostos, ou seja, $k_n > 0$ e $r_m < 0$ ou $k_n < 0$ e $r_m > 0$.

Para mostrarmos (iii) notemos que, se $\partial p < \partial q$ então $n < m$ e consequentemente $n - m < 0$, com isto temos o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k_n x^{n-m} + k_{n-1}x^{n-1-m} + k_{n-2}x^{n-2-m} + \cdots + k_0 x^{-m}}{r_m + r_{m-1}x^{-1} + r_{m-2}x^{-2} + \cdots + r_0 x^{-m}} = \frac{0}{r_m} = 0.$$

Isto prova a terceira afirmação. Por fim, para mostrar (iv) temos que, se $\partial p = \partial q$ então, $n = m$ daí, $n - m = 0$ e ficamos com o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k_n x^{n-m} + k_{n-1}x^{n-1-m} + k_{n-2}x^{n-2-m} + \cdots + k_0 x^{-m}}{r_m + r_{m-1}x^{-1} + r_{m-2}x^{-2} + \cdots + r_0 x^{-m}} = \frac{k_n}{r_m}.$$

Basta que chamemos k_n e r_m de k e r respectivamente, e o resultado está demonstrado.

■

Agora olhemos novamente para a Figura 12a, a reta $y = b$ representada na figura é o que chamamos de assintota horizontal da função f, podemos definir uma assintota horizontal precisamente da seguinte forma

Definição 3.13 (Assintota horizontal). *Dizemos que a reta $y = b$ é uma assintota horizontal de uma função f se ao menos uma das seguintes afirmações é satisfeitas,*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

Agora vamos estudar a ideia de limite infinito[5]. Para uma noção intuitiva devemos observar a Figura 12b, a medida que x se aproxima do número a a imagem $f(x)$ se torna extremamente grande, podemos dizer que $f(x)$ tende a infinito quando x se aproxima de a. Mais precisamente dado qualquer número $M > 0$, deve ser possível encontrar um intervalo em torno de a de forma que, se x pertence ao intervalo e $x \neq a$ então, $f(x) > M$, e isto é o que diz a definição a seguir:

Definição 3.14 (Limite infinito). *Seja f uma função definida em um intervalo contendo o número a exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é infinito, simbolicamente*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se, dado qualquer número $M > 0$, existir $\delta > 0$ de tal modo que $f(x) > M$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Ainda quando uma função f se torna tão pequena quanto se queira próximo de um número a dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é $-\infty$ (menos infinito), e definimos precisamente da seguinte forma,

Definição 3.15. *Seja f uma função definida em um intervalo contendo o número a exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é menos infinito, simbolicamente*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

se, dado qualquer número $M > 0$, existir $\delta > 0$ de tal modo que $f(x) < -M$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

[5] Precisamente tal limite não existe pois ∞ não é um número real

Devemos também definir os limites laterais cujo resultado é mais infinito ou menos infinito,

Definição 3.16. *Seja f uma função, diremos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela direita é infinito (respectivamente menos infinito), simbolicamente*

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \infty \quad \left(resp.\ \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty\right)$$

se, $\forall M > 0$, $\exists\delta > 0$ de tal modo que

$$f(x) > M\ (resp.\ f(x) < -M)\ \textit{sempre que}\ a < x < a + \delta.$$

De modo análogo definimos o limite a esquerda

Definição 3.17. *Seja f uma função, diremos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela esquerda é infinito (respectivamente menos infinito), simbolicamente*

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \infty \quad \left(resp.\ \lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty\right)$$

se, $\forall M > 0$, $\exists\delta > 0$ de tal modo que

$$f(x) > M\ (resp.\ f(x) < -M)\ \textit{sempre que}\ a - \delta < x < a.$$

Diremos que uma função tem limite mais infinito ou menos infinito se os limites laterais forem respectivamente iguais, a critério de exemplo consideremos a Figura 12b podemos observar que

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Neste momento, se torna conveniente discutir um conceito importante que é a noção de assintota vertical. Para termos uma noção de tal ente matemático podemos novamente observar a Figura 12b, devemos notar que a função f nunca toca a reta $x = a$, neste caso diremos que $x = a$ é uma assintota vertical da função f, mais precisamente temos:

Definição 3.18 (Assintota vertical)**.** *Dizemos que a reta $x = a$ é uma assintota vertical de uma função f se ao menos uma das seguintes afirmações é satisfeita*

1. $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \infty$
2. $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \infty$
3. $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$
4. $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$

Os conceitos de assintotas verticais e horizontais são de grande utilidade quando necessitamos fazer o esboço de um gráfico por exemplo, pois podemos saber o comportamento final da curva, no caso de uma assintota horizontal, ou como se comporta a curva próximo a um ponto onde a função não está definida.

3.2 Funções contínuas

Uma importante classe de funções que deve ser estudada são as funções continuas. Intuitivamente podemos imaginar que em uma função deste tipo podemos desenhar o seu gráfico sem tirar o lápis do papel. Por exemplo, imaginamos o gráfico da parábola $y = x^2$, e percebemos que nele não há nenhum tipo de “salto”, notamos que seu traço é continuo em todos os pontos.

Então, é possível identificar facilmente descontinuidades em gráficos de funções, isto se tivermos acesso de forma relativamente fácil a estes objetos, a exemplo do gráfico ilustrado na Figura 9 podemos notar um “salto” considerável no traçado de gráfico no ponto de abscissa 1, e é neste local onde temos a descontinuidade mencionada.

Mas nem sempre é fácil obter o gráfico de uma função, então, para que possamos estudar funções continuas temos a definição a seguir que caracteriza tal objeto matemático.

Definição 3.19 (Continuidade em um ponto)**.** *Dizemos que uma função f é continua em um ponto $x = a$ se as três condições a seguir forem satisfeitas*

1. $f(a)$ *existe.*
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe.*
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Uma função é dita continua se for continua em todos os pontos de seu domínio.

Podemos ainda recorrer a formalidade através do ϵ e δ, e obtemos a seguinte caracterização de função continua, que se torna útil em algumas demonstrações

Definição 3.20. *Dizemos que uma função f é continua em $x = a$ se, dado qualquer $\epsilon > 0$ for possível encontrar $\delta > 0$ de forma que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$.*

Ainda para a análise da continuidade de funções devemos observar o teorema abaixo:

Teorema 3.10. *Se f e g são funções continuas em um número a então as seguintes funções são continuas em a*

1. $(f + g)(x)$
2. $(f - g)(x)$
3. $(fg)(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x); g(x) \neq 0, \forall \in \mathbb{R}$

A demonstração deste teorema será omitida, no entanto, esta é de fácil verificação, basta aplicar as propriedades de limites.

Toda função polinomial é continua em qualquer ponto, uma forma imediata de verificar este fato é fazendo uso da Proposição 3.2, e de maneira semelhante podemos verificar que toda função racional é uma função continua em seu domínio. Para ver isto, basta utilizar o teorema anteriormente enunciado e o fato das funções polinomiais serem continuas.

3.2.1 Continuidade da função composta e continuidade em um intervalo

Devemos aqui relembrar o conceito de função composta. Se tomarmos $g : A \to B$ e $f : \mathrm{Im}(g) \subset B \to C$ duas funções, é definido a função composta $f \circ g : A \to C$ como sendo $f(g(x))$, de forma intuitiva a função g leva os elementos do conjunto A para o conjunto B, e a função f leva os elementos de $g(A) \subset B$ para o conjunto C enquanto que a função composta leva os elementos de A diretamente a C.

Para estudarmos a continuidade de funções compostas comecemos com o seguinte teorema acerca de limites de tais funções.

Teorema 3.11. *Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ e f é continua em b então $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(b)$.*

Demostração. Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ então, para qualquer $\epsilon_1 > 0$ dado arbitrariamente existe $\delta_1 > 0$ de tal modo que, $|g(x) - b| < \epsilon_1$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Se f é continua em b temos que para qualquer $\epsilon_2 > 0$ dado arbitrariamente existe $\delta_2 > 0$ de tal modo que $|f(y) - f(b)| < \epsilon_2$ sempre que $|y - b| < \delta_2$. Ponha $y = g(x)$, como ϵ_1 é arbitrário tomemos $\epsilon_1 = \delta_2$ e obtemos a seguinte implicação

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - b| < \epsilon_1 = \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_2$$

Fazendo $\delta = \delta_1$ e $\epsilon = \epsilon_2$, podemos dizer que para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente existe $\delta > 0$ de tal forma que $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ ou seja $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(b)$. ■

O teorema a seguir diz respeito a composição de funções continuas,

Teorema 3.12. *Se g é uma função continua em a e f é uma função continua em $g(a)$ então $f \circ g$ é continua em a.*

Demostração. Se g é continua em a, temos que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, f é continua em $g(a)$ assim do teorema anterior segue que $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$, ou seja $f \circ g$ é continua em a. ■

Se temos, por exemplo, uma função $g : A \to B$ com g continua em A, isto é, g é continua em todo ponto de A, e uma segunda função $f : B \to C$ com f continua em $g(A)$. Podemos olhar para a restrição $\bar{f} = f\big|_{g(A)}$, $\bar{f}$ é uma função continua, e desta forma a função $\bar{f} \circ g$ é continua em A. Em síntese, podemos dizer que em casos convenientes teremos a composição de funções continuas ainda sendo uma função continua.

Por várias vezes estamos trabalhando com funções que não estão definidas em toda a reta, ou que estamos interessados apenas em estudar o comportamento de uma função restrita a um intervalo. É a partir destas necessidades que surge o conceito de continuidade em um intervalo, tal conceito permite a apresentação de alguns resultados bastante interessantes a exemplo do teorema do valor intermediário e teorema do valor médio, teoremas estes que serão apresentados mais adiante, ambos dependem da ideia de continuidade em um intervalo assim como veremos a seguir:

Definição 3.21 (Continuidade em um intervalo aberto)**.** *Dizemos que uma função f é continua em um intervalo $I = (a, b)$, se f for continua em todos os pontos de I.*

Uma observação necessária, é que quando nos referimos a continuidade em um intervalo aberto como exibe a definição anterior não nos preocupamos com os extremos do intervalo, isto será necessário apenas para a continuidade no intervalo fechado, pois neste caso teremos $\{a, b\} \subset [a, b]$. Para definirmos este caso, necessitamos antes das definições de continuidades laterais a seguir:

Definição 3.22 (Continuidade a esquerda)**.** *Dizemos que uma função f é continua a esquerda de um número a, se $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$*

Definição 3.23 (Continuidade a direita)**.** *Dizemos que uma função f é continua a direita de um número a, se $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.*

O leitor mais atento neste caso, pode se questionar se não seria necessário explicitar as condições 1), 2) e 3) da definição (3.19) ajustadas para os limites laterais das definições anteriores, e a resposta é que tais condições servem apenas para facilitar a compreensão da definição. Devemos notar que no expressão "$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$" (analogamente em $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$), estão implícitas tais condições, pois o fato do limite poder assumir o valor $f(a)$ significa que a função está definida em a e que o limite existe, a condição do limite coincidir com a imagem do ponto pela função é óbvia.

Agora podemos definir a continuidade em um intervalo fechado

Definição 3.24. *Dizemos que uma função f é continua no intervalo $I = [a, b]$ se, f for continua em (a, b), a direita de a e a esquerda de b.*

Um importante teorema o qual exige como condição a continuidade em um intervalo fechado é o seguinte, conhecido como teorema do valor intermediário:

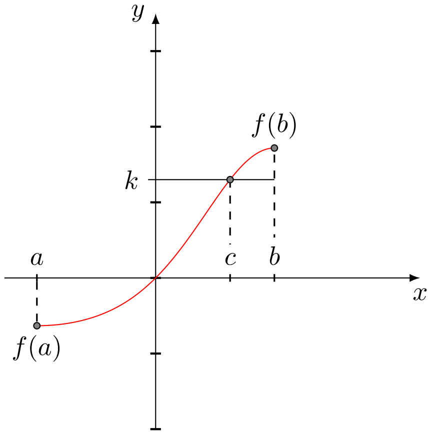
Teorema 3.13 (Teorema do valor intermediário)**.** *Seja f uma função continua em um intervalo fechado $[a, b]$, suponha $f(a) < f(b)$ ou $f(b) < f(a)$ então, para todo número k com, $f(a) < k < f(b)$ ou $f(b) < k < f(a)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Uma demostração deste teorema pode ser feita utilizando-se o teorema dos intervalos encaixados[6], tal demostração será omitida, pois, os conceitos fogem ao escopo deste texto. Para os leitores mais interessados uma demonstração pode ser vista em (LIMA, 2018). No entanto,

[6] Ver teorema dos intervalos encaixados em (LIMA, 2018)

podemos explorar o teorema a partir de uma ideia geométrica do mesmo, para prosseguir consideremos a Figura 13, neste caso supomos sem perca de generalidade, que dada a função f continua em $[a, b]$ temos $f(a) < f(b)$, é possível observar que dada qualquer reta $y = k$, com k entre $f(a)$ e $f(b)$ esta deve interceptar f em ao menos um ponto, isto é, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$. Neste caso especifico, ainda devemos notar que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, com isto como 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ de tal modo que $f(c) = 0$, em outras palavras a função f possui ao menos uma raiz no intervalo (a, b).

Figura 13 – Representação geométrica do Teorema 3.13



Ainda devemos observar que o teorema trata de uma condição de existência, por exemplo quando temos $f(a)$ negativo e $f(b)$ positivo, assim como é exibido na Figura 13, o teorema afirma que a função possui uma raiz no intervalo (a, b), no entanto ele não exibe nenhuma forma de encontrar tal raiz. Todavia com um conhecimento básico de alguma linguagem de programação e um bom entendimento do teorema é possível elaborar um algoritmo que aproxime tal raiz.

Além do teorema do valor intermediário, temos um importante teorema a cerca de funções continuas, este é o teorema da conservação de sinal, que afirma que se uma função é continua ela não pode mudar repentinamente de sinal. O teorema se enuncia da seguinte maneira:

Teorema 3.14 (Teorema da conservação de sinal)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, uma função continua. Se $f(a) > 0$, $a \in D$, então existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-r, a+r)$.*

Demostração. Como f é continua então, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ de forma que, se $x \in X$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, então podemos escolher $\epsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$, daí existe $r > 0$ tal que, se $x \in X$ temos

$$|x - a| < r \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}.$$

Ora, $f(x) > 0$ se $|x - a| < r$, ou seja, $f(x) > 0$ se $x \in (a - r, a + r)$, isto conclui nossa prova. ■

Observação 3.8. *O Teorema 3.14 pode ser enunciado de forma equivalente se considerarmos $f(a) < 0$.*

Quando é necessário investigar a continuidade de funções, além de conhecer a teoria, é também de fundamental importância conhecer algumas funções continuas. Baseados nisto, apresentaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.15. *As seguintes funções são continuas em seu domínio:*

- *Polinômios*
- *Funções racionais*
- *Funções raízes*
- *Funções trigonométricas*
- *Funções trigonométricas inversas*
- *Funções exponenciais*
- *Funções logarítmicas*

A prova de tal teorema será omitida.

4

Problemas sobre Derivadas

Neste capítulo são propostos vinte problemas, os quais englobam os conteúdos de Derivadas e seus principais teoremas. As resoluções dos problemas se encontram no capítulo 6, mas pedimos ao leitor que consulte as resoluções apenas quanto for trabalhado o problema. Para mais problemas o leitor pode consultar a bibliografia de Cálculo referenciada.

4.1 Problemas

Problema 4.1 Utilize a definição para calcular a derivada de função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Problema 4.2 Utilize a definição de derivada para determinar a equação da reta tangente a curva $y = x^3 - 1$, que seja perpendicular a reta $y = 1 - x$.

Problema 4.3 Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.(STEWART, 2016).

Problema 4.4 Suponha que f seja uma função que satisfaça a equação

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos os números reais x e y. Suponha também que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

a) Encontre $f(0)$.
b) Encontre $f'(0)$.
c) Encontre $f'(x)$.

(STEWART, 2016)

Problema 4.5 Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha x_0 um ponto crítico de g. Prove que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

Problema 4.6 Ache as equações das retas que passam pelo ponto $(2,-3)$ e são tangentes a parábola $y = x^2 + x$.

Problema 4.7 Prove que $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 4.8 Calcule, caso exista:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p \ln x \;; p > 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\frac{1}{\sin x}}$

Problema 4.9 Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja: (a) máxima?; (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo.

Problema 4.10 Mostre que $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ é estritamente decrescente para $x > 0$, e conclua que $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

Problema 4.11 Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$, determinando explicitamente: os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente, os intervalos nos quais a função tem concavidade para cima ou para baixo e os limites em $\pm\infty$, caso existam.

Problema 4.12 Encontre, caso existam, os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em que a soma das distâncias a $(-2,0)$ e $(2,0)$ é miníma e os pontos em que a referida soma é máxima.

Problema 4.13 Seja $f(x) = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}}$.

a) Determine o domínio da função f.

b) Calcule $\lim f(x)$ no infinito e limites laterais nos pontos $x = -2$, $x = 1$.

c) Esboce o gráfica dessa função.

d) Determine a imagem da função f.

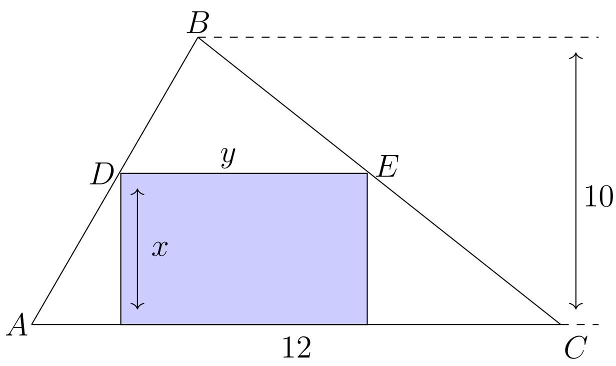
Problema 4.14 Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?(STEWART, 2016).

Problema 4.15 Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

onde k é uma constante positiva. Qual nível de nitrogênio da melhor produção?

Problema 4.16 Considere um triângulo acutângulo de base $12m$ e altura $10m$ e um retângulo inscrito conforme a figura a seguir. Determine o retângulo de área máxima.



Problema 4.17 **A rota mais rápida** Jane está em um barco a remo a 2 mi da costa e deseja chegar a uma cidade litorânea que está a 6 mi em linha reta do ponto (na costa) mais próximo do barco. Ela rema a 2 mi/h e caminha a 5 mi/h. Onde ela deve aportar para chegar à cidade no menor tempo possível?(THOMAS et al., 2009).

Problema 4.18 Demonstre que, entre todos os retângulos com perímetro de $k\ u.c$, o de maior área é um quadrado.(THOMAS et al., 2009).

Problema 4.19 Um retângulo tem sua base no eixo x e seus dois vértices superiores na parábola $y = 12 - x^2$. Qual a maior área que esse retângulo pode ter? Quais são suas dimensões?(THOMAS et al., 2009).

Problema 4.20 Você planeja fechar um conto do primeiro quadrante com um segmento de reta de 20 unidades de comprimento, que vai de $(a, 0)$ a $(0, b)$. Demonstre que a área do triângulo determinado pelo segmento é máxima quando $a = b$.(THOMAS et al., 2009).

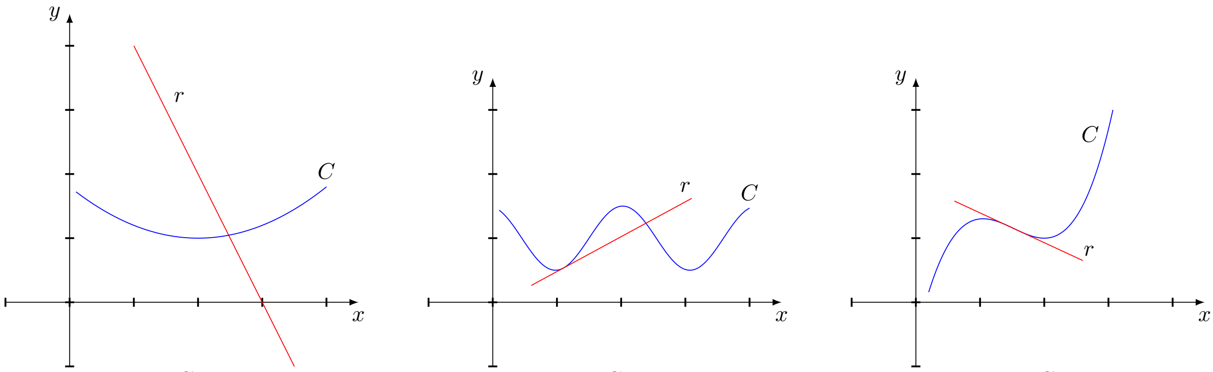
5 Derivadas e derivação

Antes de definirmos diretamente a derivada, devemos analisar o problema relacionado à reta tangente ao gráfico de uma função, e da física, o estudo de velocidade instantânea de uma partícula.

5.1 Interpretação geométrica

De forma intuitiva, podemos dizer que uma reta tangente a uma curva em um ponto, é uma reta que possui a propriedade de tocar a curva em apenas um ponto. No entanto esta definição podem causar algumas contradições, coincidiremos a Figura 14 abaixo:

Figura 14 – Contradições sobre a noção de reta tangente a uma curva



(a) r intersepta C em apenas um ponto mas não é tangente

(b) r é tangente a C mas toca a curva em dois pontos

(c) r é tangente a C e esta dos dois lados da curva

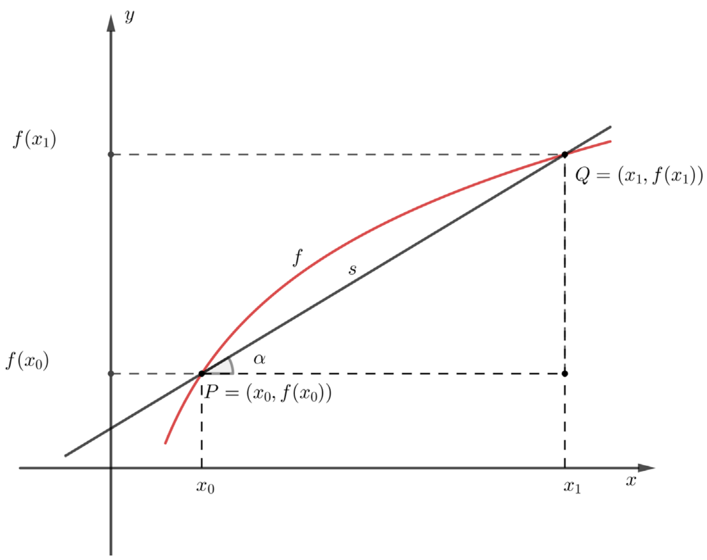
A primeira contradição que pode existir na ideia de que uma reta tangente toca em apenas um ponto da curva é representada na Figura 14a, onde podemos notar que a reta r toca em apenas um ponto da curva C mas r não é tangente a C. Ainda, como é visto na Figura 14b, podemos ter uma reta r tangente a curva C em um ponto, com r interceptando C em um segundo ponto. E um terceiro caso que é visto na Figura 14c, é o caso em que r é tangente a curva C em um ponto e pode-se notar que r "fura" a curva C.

Com estas observações feitas, podemos utilizar nossos conhecimentos de limite para definirmos a reta tangente por meio de um processo dinâmico.

De início utilizemos a Matemática do ensino médio para determinar o coeficiente angular de uma reta secante a curva de um gráfico.

Considere a curva f e a reta s passando por $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$. Por definição dizemos que s é reta secante a f. Considere a Figura 15.

Figura 15 – Reta secante



Da geometria analítica, podemos escrever o coeficiente angular da reta secante à curva,

$$m_s = \tan \alpha$$

onde α é o ângulo que s faz com à reta $y = 0$ e $\tan \alpha$ é a razão incremental de f relativa ao ponto x.

Da trigonometria é sabido que a tangente de um ângulo α em um tiângulo retângulo, é dado pelo quociente, cateto oposto sobre cateto adjacente, e escrevemos:

$$\tan \alpha = \frac{C.O}{C.A}.$$

Sendo assim, de acordo com a Figura 15, podemos calcular o coeficiente angular (m_s) da reta secante a curva assim como se segue

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{5.1}$$

Agora em (5.1) façamos o ponto Q tender ao ponto P, isto é, devemos fazer x_1 tender a x_0, nestas condições obtemos o limite,

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{5.2}$$

se o limite em (5.2) existe, a este chamamos de coeficiente angular da reta tangente a curva f no ponto P, e denotamos por m_t, isto é,

$$m_t = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Desta forma, sempre podemos determinar a reta tangente a uma curva passando por um ponto P da mesma, basta que tomemos um segundo ponto Q genérico que pertença a curva, e então fazemos o processo de limite expresso em (5.2), se este existir, ele é o coeficiente angular da reta procurada e com isto podemos determiná-la.

Devemos notar que a utilização do limite é de fato essencial. Caso fosse utilizado a fórmula do coeficiente angular da reta secante diretamente, esta resultaria em uma indeterminação, pois é necessário dois pontos para utilizar tal fórmula.

O que o processo de limite faz, é tornar um segundo ponto escolhido sobre a curva tão próximo do primeiro, quanto necessário. Nestas condições, quando o segundo ponto assume posição de limite com relação ao primeiro, então a reta que era inicialmente secante torna-se uma reta tangente.

Ainda podemos na equação (5.2) fazer, $h = x_1 - x_0$. Se $x_1 \to x_0$, então $h \to 0$, ainda $x_1 = x_0 + h$. E escrevemos o coeficiente angular da reta tangente à curva da seguinte forma:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5.3}$$

Em resumo, estudar a derivada de uma função f no ponto x_0 é equivalente a estudar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

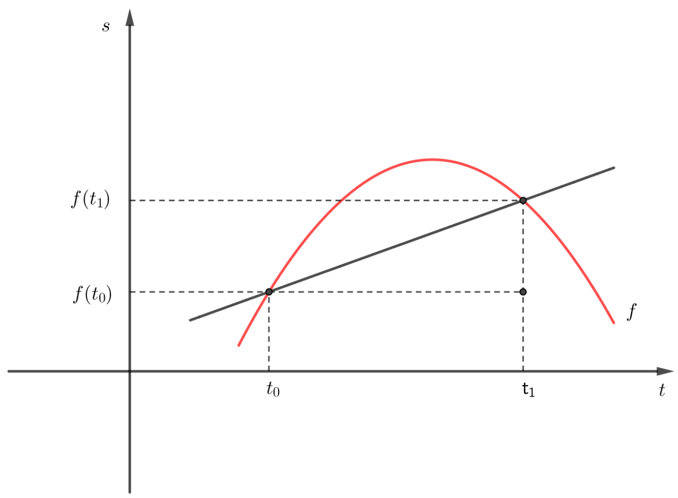
5.2 Interpretação Física

Vamos agora analisar o gráfico de uma curva, onde temos o deslocamento em função do tempo, escrevemos

$$s = f(t)$$

Da física sabemos, que a velocidade média de uma partícula é dada pelo quociente entre a

Figura 16 – Velocidade média



variação de espaço e a variação de tempo, ou seja

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{5.4}$$

Observando da Figura 16, calculemos a velocidade média de uma partícula que se deslocou da posição $f(t_0)$ para a posição $f(t_1)$, no intervalo de tempo de t_0 a t_1

$$V_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{5.5}$$

Devemos observar que, a equação que nos dá à velocidade média de uma partícula que se moveu do instante t_0 até o instante t_1, representa também o coeficiente angular da reta secante a curva passando por $(t_0, f(t_0))$ e $(t_1, f(t_1))$, como representado na Figura 16.

No entanto, nosso objetivo é determinar a velocidade instantânea da partícula em um dado instante, digamos t_0. Para isso utilizaremos nossos conhecimentos de limite sobre a equação (5.5). Fazendo $t_1 \to t_0$, segue que $f(t_1)$ se aproxima de $f(t_0)$. Escrevemos

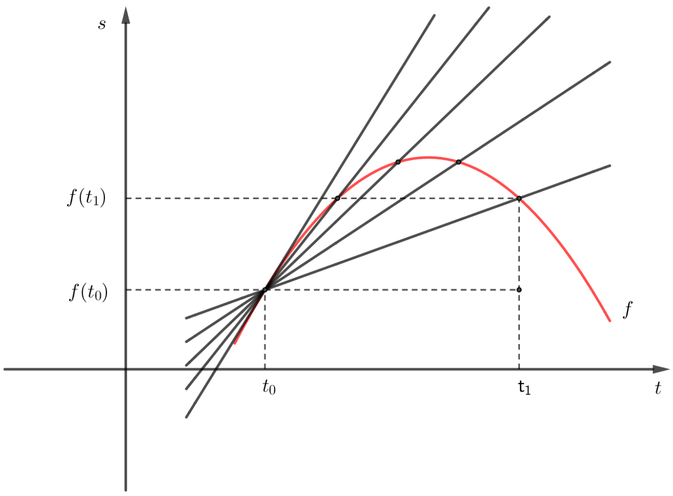
$$v_i = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{5.6}$$

ou ainda fazendo, $t_1 - t_0 = h$, se $t_1 \to t_0$, então $h \to 0$, ainda $t_1 = t_0 + h$. E desta forma obtemos

$$v_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \tag{5.7}$$

Se t_1 assume posição de limite sobre t_0, a velocidade média se torna velocidade instantânea, e a esta chamamos de v_i. Vale a pena salientar que a velocidade instantânea em um instante t_0,

Figura 17 – Velocidade instantânea



é representado graficamente como o coeficiente angular da reta tangente a curva $s = f(t)$ no ponto $(t_0, f(t_0))$, como mostra a Figura 17.

5.3 Definição formal de derivadas

Finalmente, daremos uma definição precisa de derivada!

Até agora falamos apenas de retas secantes e retas tangentes ao gráfico de funções. Pode ter surgido os questionamentos, cadê a derivada? O que é derivada?

Bom, está na hora de conectarmos tudo o que foi falado até o momento.

Nas seções anteriores apareceram limites bastante especiais, mais especificamente nas equações (5.3) e (5.7). Estes limites chamaremos de derivada aplicada a x_0 (sem perda de generalidade)[1], escrevemos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5.8}$$

e lemos “efe” linha de x_0.

Devemos observar que o limite expresso em (5.8) é conhecida como quociente de Leibniz. Uma outra forma de definir a derivada em um ponto é via o quociente de Newton, e isto é feito da seguinte maneira: dada uma função f a sua derivada em um ponto de abcissas x_0 é obtida pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \tag{5.9}$$

Observe que as duas formas de definir são iguais a menos de uma mudança de variável, desta forma devemos notar que, dada uma função f devemos ter

$$f'(x_0) = \lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

para verificar isto basta tomar $h = z - x_0$.

Retornando a ideia de reta tangente, podemos dizer que o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva de uma função em um ponto, é a derivada da função no ponto. E a respeito de conceitos físicos, se tivermos uma função que determina a posição de uma partícula em dado instante, a derivada desta função aplicada no tempo representará sua velocidade instantânea.

Mas a derivada em um ponto trata-se apenas de um número. O nosso objetivo é definir, neste momento, a derivada como uma função. Sem perda de generalidade tomemos uma função $f(x)$ qualquer. Já sabemos que a derivada de f em um ponto, é dada pela equação (5.8) (ou (5.9) mas por simplicidade continuemos com apenas um limite), para encontrarmos uma função derivada de f devemos aplicar a equação (5.8) em todos os elementos do domínio de f (onde o limite 5.8 existir). Assim substituindo x_0 por x, temos que a derivada de f é a seguinte função

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{5.10}$$

Outras notações que representam a derivada da função f são

$$Df(x) \, , \frac{df}{dx}(x)$$

[1] Utilizaremos x_0 apenas para generalização mas, a variável depende apenas das grandezas trabalhadas.

ou para a derivada aplicada em um ponto

$$Df(x_0)\,,\ \frac{df}{dx}(x_0)\ \text{ e }\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Observação 5.1. *Eventualmente é possível que sejam usadas duas notações distintas para representar a derivada de uma função real no corpo do texto, a saber: f' e $\frac{df}{dx}$. Esse fato ocorrerá quando houver necessidade de explicitar a variável a qual estamos derivando ou apenas por uma questão de uniformidade no texto.*

Observação 5.2. *Sendo y uma função de x devemos observar que quando avaliamos sua derivada $\frac{dy}{dx}$, este ente matemático não deve, inicialmente, ser visto como um quociente entre dois termos. Podemos ainda visualizar o simbolo $\frac{d}{dx}$ como sendo o operador de derivação.*

Tendo definido a função derivada, devemos observar que $D(f') \leq D(f)$, o caso de igualdade ocorre quando $\exists\, f'(x)$, $\forall x \in D(f)$, caso contrário $D(f') < D(f)$. Se $D(f') = D(f)$ e f' é continua então dizemos que f' é de classe C^1.

Com respeito aos conceitos de função derivada e continuidade temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Seja f uma função. Se f derivável em um número a, então f é continua em a.*

Demostração. Se f é uma função derivável em a, então o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe, e suponhamos que seja igual a $k \in \mathbb{R}$.

Devemos notar que f está definida no numero a pois se não o fosse, a expressão da derivada não faria sentido. Observando $\lim_{x\to a} f(x)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \Big(\lim_{x\to a} f(x) - f(a)\Big) + f(a) \\
&= \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right) + f(a) \\
&= \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \lim_{x\to a}(x-a) + f(a) \\
&= k\cdot 0 + f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

com isto mostramos que f é continua em a. ■

Devemos observar que a reciproca do teorema anterior não é sempre válida, e isto será mostrado mais quando falarmos de derivadas laterais.

5.3.1 Derivadas laterais

Anteriormente falamos que uma função que possui derivada em todos os pontos de seu domínio, chama-se derivável. Em geral, podemos tomar o domínio da função como sendo um intervalo aberto, seja ele finito ou infinito, a definição de função derivada não se altera dizemos que a função será derivável no intervalo aberto se possuir derivadas em todos os seus pontos.

No entanto, com respeito a um intervalo fechado $[a, b]$, temos o problema dos extremos, nestas condições torna-se necessário a

Definição 5.1 (Derivadas laterais)**.** *Seja f uma função. Dizemos que f possui derivada lateral a direita em um ponto a de seu domínio, denotada por $f'_+(a)$, se o limite*

$$f'_+(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existir. De modo análogo, dizemos que f possui derivada lateral a esquerda em um ponto a de seu domínio, denotada por $f'_-(a)$, se o limite

$$f'_-(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existir.

Com isto, podemos dizer que uma função f é derivável no intervalo fechado $[a, b]$, se é derivável em (a, b), à esquerda de a e a direita de b.

Com respeito aos limites laterais devemos observar que a derivada de uma função só existe, se as derivadas laterais existirem e coincidirem , isto é, $f'(x)$ existe se, e somente se, $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ existirem e $f'_+(x) = f'_-(x)$, nestas condições $f'(x)$ será igual as derivadas laterais.

Vamos agora discutir sobre a não validade da reciproca do Teorema 5.1. Coincidiremos a função $f(x) = |x|$, ou ainda

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0 \\ x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

a continuidade de f, como pode-se observar, é obvia. Mostraremos que f não é derivável em $x = 0$. Para fazer isto utilizaremos as derivadas laterais no ponto desejado. Daí, com relação a derivada pela direita temos

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = 1$$

ou seja $f'_+(0) = 1$. Com relação a derivada lateral a esquerda temos

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-h}{h} = -1$$

isto, é $f'_-(0) = 1$. Mas devemos notar que $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, como as derivadas laterais não coincidem notamos que a função não é derivável no ponto $x = 0$, assim como queríamos mostrar.

Observação 5.3. *Devemos notar que a função f anteriormente definida não é derivável no ponto de abscissa 0, no entanto f é derivável em todos os demais pontos do domínio, ou seja, f é derivável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. f não é de classe C^1 mas, a restrição $\bar{f} = f\big|_{\mathbb{R}\backslash\{0\}}$, é de classe C^1.*

5.4 Regras de derivação

Anteriormente definimos a derivada de uma função via limite, o que na maioria das vezes é complicado de ser calculado. Se quiséssemos por exemplo calcular a derivada da função $f(x) = x$, deveríamos calcular o limite,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

que neste caso é bastante simples. Mas se tivéssemos a função, $g(x) = e^{\sin(x)}$, o nosso limite seria,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\sin(x+h)} - e^{\sin(x)}}{h}$$

o que com certeza não é algo trivial.

Neste sentido se torna necessário a utilização de regras de derivação para facilitar os cálculos. Algumas das principais regaras de derivação são exibidas a seguir,

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções e k uma constante, temos:

1. **Derivada da função constante:**

$$[k]' = 0$$

2. **Derivada da multiplicação de uma função por uma constante:**

$$[kf(x)]' = k[f(x)]'$$

3. **Derivada da soma algébrica de funções:**

$$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$$

4. **Derivada do produto de funções:**

$$[f(x)g(x)]' = f(x)[g(x)]' + [f(x)]'g(x)$$

5. **Derivada do quociente:**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

6. **Derivada da potência:**

$$[x^n]' = nx^{n-1}$$

Existem várias outras regras de derivação para diferentes funções, mas estas 6 são as mais elementares. A seguir, faremos a demonstração das regras de derivação anteriormente apresentadas.

Demostração.

1. Dada a função $f(x) = k$, vamos calcular sua derivada utilizando o quociente de Newton, fixando x no domínio da função f obtemos
$$[k]' = [f(x)]' = \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z\to x} \frac{k - k}{z - x} = \lim_{z\to x} \frac{0}{z - x} = 0,$$
ou seja, $[k]' = 0$.

2. Dada a função $g(x) = kf(x)$, calculemos sua derivada,
$$\begin{aligned}[kf(x)]' = [g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\ &= k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\end{aligned}$$
ou seja, $[kf(x)]' = k[f(x)]'$.

3. Provaremos a propriedade apenas para o casa da adição de funções o caso da diferença fica a critério do leitor interessado. Dada a função $s(x) = g(x) + f(x)$, calculemos sua derivada
$$\begin{aligned}[g(x) + f(x)]' = [s(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) + f(x+h)) - (g(x) + f(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x) + f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x))}{h},\end{aligned}$$
ou seja, $[g(x) + f(x)]' = [g(x)]' + [f(x)]'$.

4. Dada a função $s(x) = f(x)g(x)$, calculemos sua derivada
$$\begin{aligned}&[f(x)g(x)]' = [s(x)]' \\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x)) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &\quad = \lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},\end{aligned}$$

ou seja, $[f(x)g(x)]' = g(x)[f(x)]' + f(x)[g(x)]'$.

5. Dada a função $s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$, calculemos sua derivada

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= [s(x)]' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x+h)-f(x))-f(x)(g(x+h)-g(x))}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \frac{g(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)},
\end{aligned}$$

ou seja, $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)[f(x)]' - f(x)[g(x)]'}{[g(x)]^2}$.

6. Seja $f(x) = x^n$, então por definição sua derivada é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Trabalhando algebricamente sobre o limite temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p}h^p\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1} \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

■

Devemos observar que a regra de derivada de uma potência foi demonstrada apenas para $n \in \mathbb{N}$. No entanto, ela é válida para qualquer $n \in \mathbb{R}$, mas este fato, apesar de não ser demonstrado neste texto, poderá ser amplamente utilizado.

Derivadas de funções trigonométricas

Com respeito às funções trigonométricas, temos as seguintes regras de derivação:

1. **Derivada da função seno:**

$$[\sin(x)]' = \cos(x)$$

2. **Derivada da função cosseno:**

$$[\cos(x)]' = -\sin(x)$$

As respectivas demonstrações são feitas a seguir,

Demostração.

1. Aplicando diretamente a definição de derivada obtemos,

$$[\sin(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

e usando a identidade trigonométrica

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$$

é possível reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned}
[\sin(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\
&= \cos(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $[\sin(x)]' = \cos(x)$.

2. Analogamente, aplicando diretamente a definição de derivada obtemos,

$$[\cos(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

e usando a identidade trigonométrica

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
[\cos(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 \\
&= -\sin(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$.

■

Como consequência das regras da derivada do seno e da derivada do cosseno, obtemos as regras das demais funções trigonométricas:

1. **Derivada da função tangente:**

$$[\tan(x)]' = \sec^2(x)$$

2. **Derivada da função cotangente:**

$$[\cot(x)]' = -\csc^2(x)$$

3. **Derivada da função secante:**

$$[\sec(x)]' = \sec(x)\tan(x)$$

4. **Derivada da função cossecante:**

$$[\csc(x)]' = -\csc(x)\cot(x)$$

Demostração. Não é difícil verificar as regras acima, basta combinar a regras de derivação usual com as derivadas do seno e cosseno. De fato,

1. Sabemos que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Sendo assim, para derivarmos a tangente, aplicaremos a regra do quociente, desta forma temos,

$$\begin{aligned}[\tan(x)]' &= \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' \\ &= \frac{\cos(x)\,[\sin(x)]' - \sin(x)\,[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \sec^2(x),\end{aligned}$$

ou seja, $[\tan(x)]' = \sec^2(x)$.

2. Podemos escrever $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, com isto apliquemos a regra de derivação do quociente para obter a derivada, temos,

$$\begin{aligned}[\cot(x)]' &= \left[\frac{1}{\tan(x)}\right]' \\ &= \frac{-\sec^2(x)}{\tan^2(x)} \\ &= -\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} \\ &= -\csc^2(x),\end{aligned}$$

ou seja, $[\cot(x)]' = -\csc^2(x)$.

3. Por definição sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, a partir disto podemos calcular a derivada

$$\begin{aligned}[\sec(x)]' &= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]' \\ &= \frac{-[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \sec(x)\tan(x),\end{aligned}$$

ou seja, $[\sec(x)]' = \sec(x)\tan(x)$.

4. Por definição sabemos que $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, daí podemos calcular a derivada

$$\begin{aligned}[\csc(x)]' &= \left[\frac{1}{\sin(x)}\right]' \\ &= \frac{-[\sin(x)]'}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -\csc(x)\cot(x),\end{aligned}$$

ou seja, $[\sec(x)]' = -\csc(x)\cot(x)$.

■

Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

Após demostrado as regras de derivação para funções trigonométricas, devemos comentar a respeito das derivadas das funções exponenciais e logarítmicas. Começando inicialmente a trabalhar com a função exponencial natural, a saber, $y = e^x$, onde e é conhecido como número de Euler. Desta forma, temos a regra derivação para a função exponencial, $f(x) = e^x$.

Proposição 5.1. *A derivada da função exponencial é a própria exponencial, isto é,*

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x.$$

Demostração. Dada a função $f(x) = e^x$, apliquemos a definição de derivada, donde devemos obter,

$$f'(x) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

do Lema 3.3 segue que

$$f'(x) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \ln e = e^x$$

assim como deveríamos mostrar. ■

Neste momento trataremos da derivada das funções logarítmicas, mais especificamente, da função logarítmica natural. Para isto temos a seguinte proposição:

Proposição 5.2. *A derivada da função* $f(x) = \ln x$ *é,* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostração. Seja $f(x) = \ln x$, para obtermos a derivada de f apliquemos diretamente a definição de derivada,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \ln \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\end{aligned}$$

fazendo $\dfrac{h}{x} = t$, obtemos $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{tx}$, além disso quando $h \to 0$ temos $t \to 0$, daí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{tx}} \\ &= \ln \left(\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \ln \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{x} \ln e \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

assim como deveríamos demonstrar. ■

Observação 5.4. *Devemos observar que nas Proposições 5.1 e 5.2, não abordamos a função exponencial de uma base $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$ qualquer, ou também a função logarítmica da mesma forma. Isto ocorre pois sempre podemos escrever $a^x = e^{x \ln a}$ e $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, e então, com respeito ao $\log_a x$ já temos ferramentas para fazer tal derivada. Em relação a a^x, adiante veremos um teorema que permitirá obter sua derivada, mas a saber, esta será $\dfrac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$.*

5.5 Regra da cadeia

Na seção anterior apresentamos várias regras de derivação, no entanto, não consideramos o caso de derivação de funções compostas. Nesta seção, será apresentado o teorema que nos mostra como derivar funções compostas. Mas antes disto, vejamos um exemplo em que surge a necessidade de uma forma para se derivar a composição de funções.

Problema Resolvido 5.1. *Determine a derivada da função $f(x) = (x+a)^3$, onde a é uma constante.*

Resolução.

Devemos observar que a função assim como se encontra não se encaixa em nenhuma das regras de derivação conhecidas até o momento. Então, usando produto notável, podemos reescrever f obtendo

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^2$$

e agora podemos derivar, de onde obtemos

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a^2 = 3(x^2 + 2ax + a^2) = 3(x+a)^2$$

□

Observação 5.5. *É importante observar que no exemplo anterior não foi difícil expandir a nossa função, mas se tivéssemos por exemplo a função $f(x) = (x+a)^{10}$, deveríamos fazer uso do binômio de Newton e as contas se tornariam mais complicadas.*

Mas podemos notar que, se definirmos $u = x + a$, f deverá ser escrita como sendo $f(u) = u^{10}$, que na realidade é uma função composta, uma vez que u depende de x.

Vamos enunciar o teorema conhecido como regra da cadeia, que nos ensina como derivar a composição de funções.

Teorema 5.2 (Regra da cadeia)**.** *Se a função g é derivável em x e a função f é derivável em $g(x)$, então a função composta, $f \circ g$, será derivável em x e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Demostração. Sejam, f e g funções, x_0 um ponto qualquer do domínio da g onde está é derivável. Tomemos $t_0 = g(x_0)$ e seja $t = g(x)$. Definimos a função

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0), & \text{se} \quad t \neq t_0 \\ 0, & \text{se} \quad t = t_0 \end{cases}$$

h está bem definida, visto que $f'(t_0)$ existe. De fato, por hipótese, f é derivável em $g(x)$, em particular, f é derivável em $g(x_0)$, ou seja,

$$f'(g(x_0)) = f'(t_0)$$

existe e, portanto, h está bem definida.

Além disso, h é continua em t_0, uma vez que $h(t_0) = 0$. Com efeito,

$$\lim_{t \to t_0} h(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) = 0,$$

a última igualdade segue do fato de que f é derivável em t_0 e, portanto, $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = h(t_0)$. Sempre que $t \neq t_0$ temos a igualdade,

$$f(t) - f(t_0) = (h(t) + f'(t_0))(t - t_0)$$

note que se $t = t_0$ a igualdade ainda será válida. Substituindo $t = g(x)$ e $t_0 = g(x_0)$ na equação anterior, obtemos

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = [h(g(x)) + f'(g(x_0))][g(x) - g(x_0)]$$

dividindo ambos os lados da equação por $x - x_0$ temos

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = [h(g(x)) + f'(g(x_0))]\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

tomando em ambos os lados o limite quando $x \to x_0$ obtemos,

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

como x_0 é qualquer o teorema fica demonstrado. ■

Devido às posições que f e g ocupam na expressão $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ podemos ver uma função composta como sendo uma função externa aplicada em uma segunda função que podemos chamar de função interna. E, por sua vez, a regra da cadeia diz que a derivada da composição será a derivada da função externa aplicada na interna multiplicado por a derivada da função interna.

Fazendo uso da regra da cadeia podemos reescrever as regras de derivação da seção anterior, assim como se segue.

Seja $u = u(x)$ uma função, por meio da regra da cadeia podemos escrever

1. $[f(u)]' = f'(u)u'$
2. $[u^n]' = nu^{n-1}u'$
3. $[\sin(u)]' = \cos(u)u'$
4. $[\cos(u)]' = -\sin(u)u'$
5. $[\tan(u)]' = \sec^2(u)u'$
6. $[\cot(u)]' = -\csc^2(u)u'$
7. $[\sec(u)]' = \sec(u)\tan(u)u'$
8. $[\csc(u)]' = -\csc(u)\cot(u)u'$
9. $[e^u]' = e^u u'$
10. $[\ln u]' = \dfrac{u'}{u}$

Agora é possível demonstrar que $[a^x]' = a^x \ln a$. Com efeito, podemos escrever $a^x = e^{x \ln a}$, fazendo $u = x \ln a$ obtemos $a^x = e^u$, derivando ambos os lados da expressão obtemos

$$[a^x]' = e^u u' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

5.5.1 Derivação implícita

Em matemática estamos constantemente nos referindo às funções, em especial em Cálculo, onde as estudamos como objeto central. No entanto, sempre nos deparamos com certas equações que não são funções, mas estas podem definir funções. Um exemplo bastante simples que pode ser observado é a equação de uma circunferência de raio r centrada na origem de um plano coordenado xy,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

esta equação claramente não é uma função, mas define implicitamente as funções

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

cujos os gráficos representam respectivamente a metade superior e inferior da circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = r^2$.

Mas geralmente podemos considerar a equação $F(x, y) = 0$, se F define implicitamente uma função sobre algum subconjunto de $\mathbb{R}$, então $F(x, f(x)) = 0$ é uma identidade sobre o subconjunto, o gráfico de f é uma porção do gráfico da equação $F(x, y) = 0$. Dizemos que F

define explicitamente y em função de x se podemos escrever $y = f(x)$, o que nem sempre é possível, por isto a necessidade do processo de derivação implícita.

No processo de derivação implícita devemos derivar ambos os lados de uma equação $F(x, y) = 0$ supondo y uma função diferenciável da variável x, e então devemos isolar o termo $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ desejado.

Observação 5.6. *Quando estivermos trabalhando com derivação implícita, é necessário supormos y uma função derivável de x. Neste caso, devemos tomar um cuidado a mais, pois se temos durante o processo de derivação algo do tipo $[g(y)]'$ onde g é uma função diferenciável, não podemos escrever simplesmente $[g(y)]' = g'(y)$, uma vez que consideremos y uma função diferenciável de x devemos utilizar a regra da cadeia para escrever corretamente $[g(y)]' = g'(y)y'$.*

Para que possamos fixar as ideias aqui expostas consideremos o seguinte problema resolvido,

Problema Resolvido 5.2. *Seja $c : y^2 + x^2 = 1$ a circunferência unitária centrada na origem do plano coordenado xy. Determine a equação da reta que tangencia c, no primeiro quadrante, no ponto de abscissa $x = \frac{1}{2}$.*

Resolução.

Seja P o ponto de abscissa $x = \frac{1}{2}$ sobre c, é claro que P tem coordenadas $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Supondo $y = f(x)$ uma função diferenciável de x podemos determinar y' aplicando o processo de derivação implícita assim como se segue,

$$\left[y^2 + x^2\right]' = 0 \Rightarrow \left[y^2\right]' + \left[x^2\right]' = 0 \Rightarrow 2yy' + 2x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

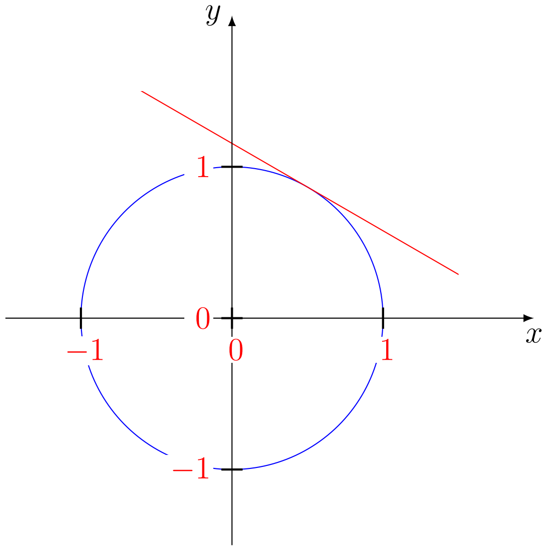
Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente é dado pela derivada no ponto, com isto o coeficiente angular da reta procurada é

$$y'\big|_P = y'\big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por fim, temos a equação da reta procurada,

$$r : y = -\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Graficamente obtemos



∎

5.5.2 Derivadas de ordem superior

As derivadas de ordem superior consistem apenas em derivar as derivadas da função. Mas precisamente, se temos uma função $f : X \to \mathbb{R}$, $x \subset \mathbb{R}$, se f é derivável, ou seja f é de classe C^1, então temos a função derivada $f' : X \to \mathbb{R}$. Se f' ainda for uma função derivável, então dizemos que f é de classe C^2 e e escrevemos a derivada segunda de f como sendo a função $f'' : X \to \mathbb{R}$. Mas geralmente se f é derivável k vezes, então dizemos que f é de classe C^k, e a $k-$ésima derivada de f é denotada por, $f^{(k)} : X \to \mathbb{R}$. Sendo $y = f(x)$, uma outra notação para a $k-$ésima derivada de f é $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} f(x)$.

Observação 5.7. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se f não for derivável em X, isto é, f derivável apenas em $S \subset X$ ainda podemos olhar para as derivadas superiores nas restrições do domínio de f, isto é, embora que a função $f' : X \to \mathbb{R}$ não esteja definida pois f não é derivável em $X \backslash S$, ainda podemos trabalhar com a derivada $f' : S \to \mathbb{R}$. Uma função será de classe C^k se o domínio da $k-$ésima derivada for igual ao domínio da função original.*

Para fixarmos ideias consideremos os seguintes problemas resolvidos:

Problema Resolvido 5.3. *Determine a terceira derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Resolução.

Ora utilizando as regras de derivação e observando que a, b e c são constantes obtemos,

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = [f'(x)]' = 2a \text{ e } f'''(x) = [f''(x)]' = 0$$

∎

Notemos que a terceira derivada da função dada pelo problema é a função constante zero. É fácil observar que qualquer função polinomial de grau n terá a derivada de de ordem $n+1$ igual a zero. Mas isto não se estende a todas as funções, assim como podemos ver no seguinte problema resolvido:

Problema Resolvido 5.4. *Determine a derivada segunda da função $f(x) = ke^x$.*

Resolução.

Não é difícil ver que usando as regras de derivação que a derivada procurada é $f''(x) = ke^x$. Em particular, para as funções do tipo $f(x) = ke^x$, a derivada de qualquer ordem será ela mesma, uma vez que f é um múltiplo constante da exponencial. □

5.6 A derivada como taxa de variação

Se x e y denotam quantidades, ou grandezas, associadas de forma que y tenha uma dependência funcional de x, de forma que podemos escrever

$$y = f(x)$$

onde y é inteiramente determinada como função de x. Se x sofre uma perturbação Δx se tornando $x + \Delta x$ então y sofre uma perturbação associada e expressa por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Se estamos interessados na taxa de variação de y com relação a x, devemos olhar para o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Suponha, por exemplo, que x seja o raio de um circulo e y seja sua área e, além disso, x e y estejam relacionados através da expressão

$$y = \pi x^2$$

Então, a taxa de variação da área com relação ao raio se escreve como sendo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2}{\Delta x}$$

ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\pi x \Delta x + \pi(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

notamos que nossa expressão não fica tão interessante, pois dependemos agora da perturbação Δx. Algo que podemos fazer para melhorar este estudo é considerar apenas perturbações muito pequenas de x, ou seja, devemos olhar para o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

fica claro que o limite anterior trata-se da derivada de y com relação a x, ou seja,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Então, se temos $y = f(x)$ define-se a taxa de variação instantânea de y com relação a x como sendo o valor de $f'(x)$.

Retornando ao nosso exemplo, quando temos $y = \pi x^2$, expressando a área y de um circulo de raio x, podemos escrever que a variação instantânea da área com relação ao raio é precisamente $2\pi x$.

Neste contexto, surge o que chamamos de taxa relacionada. Tomando o mesmo exemplo anterior, supomos que $x = x(t)$ represente o raio do circulo em função do tempo (t). Se x está variando a $p\, m/s$, podemos determinar a que velocidade varia a área y quando o raio vale $q\, m$. Basta notar que

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}$$

uma vez que estamos observando quando $x = q\, m$ e a variação de x no tempo é $p\, m/s$, então a variação de y é

$$\frac{dy}{dx} = 2\pi pq\, m^2/s.$$

Este exemplo ilustra a importância do estudo de taxas de variação em aplicações do Cálculo. Pois sempre que estamos estudando fenômenos da vida real temos quantidades de interesse associadas, por exemplo

- em Física, podemos estudar o sistema que consiste de uma partícula em movimento. Nesse caso, quantidades de interesse são o tempo, a posição, a velocidade, a aceleração, o momento linear, a energia cinética a e a energia potencial.

- Em Economia, o sistema sendo estudado pode ser um País e quantidades de interesse são o produto interno bruto, a taxa de inflação, a taxa de juros básica e a taxa de desemprego.

- Em Epidemiologia, o sistema sendo estudado pode ser uma população afligida por uma epidemia e quantidades de interesse são o tempo, o número de infectados, o número de suscetíveis e o número de recuperados.[2]

Em grande parte dos fenômenos que desejamos estudar, o nosso objetivo é observar sua evolução no tempo. Por exemplo, a velocidade de um móvel, sua aceleração, a taxa de contágio de uma doença, etc. Nestes casos, temos a seguinte estratégia para o estudo de taxas relacionadas

[2] Estes apontamentos foram adaptados das notas de aulas de Tausk (2020)

Estratégias para a resolução de problemas de taxas relacionadas

- Desenhe uma figura e identifique as variáveis e as constantes. Use t para o tempo. Suponha que todas as variáveis são funções deriváveis do tempo t.
- Escreva as informações numéricas (em termos dos símbolos que você escolheu).
- Escreva aquilo que você deve encontrar (geralmente uma taxa, expressa como uma derivada).
- Escreva uma equação que relacione as variáveis. Talvez você possa combinar duas ou mais equações para conseguir uma única, relacionando as variáveis que você quer com as variáveis que conhece.
- Derive com relação a t. Em seguida, expresse a taxa que você quer em termos das taxas e variáveis cujos valores você conhece.
- Calcule. Use os valores conhecidos para encontrar a taxa desconhecida.[3]

Embora essas estratégias estejam em forma de roteiro, não é necessário que este seja seguido detalhadamente, o importante é ter as ideias bem fixadas.

5.7 Derivação e os extremos de uma função

Nesta seção serão apresentados e discutidos os principais resultados que tratam sobre os extremos de funções. De início segue

Definição 5.2. *Seja c um número no domínio X de uma função f. Então $f(c)$ é o*

- *valor máximo absoluto de f em X se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em X.*
- *valor mínimo absoluto de f em X se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em X.*

Na definição anterior, o número c é chamado respectivamente de ponto de máximo ou mínimo absoluto. É sempre interessante saber se uma função admite máximo ou mínimo. O resultado a seguir garante a existência de máximos e mínimos de uma função cujo domínio é um intervalo fechado.

Teorema 5.3 (Teorema do valor extremo)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função continua sobre $[a, b]$. Então existe x_0, x_1 tais que, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in [a, b]$. Em outras palavras f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.*

[3] Adaptado do livro de (THOMAS et al., 2009)

A demonstração deste teorema será omitida, pois exige resultados que fogem do escopo deste texto. No entanto, podemos observar que a hipótese de que o domínio de f no Teorema 5.3 ser um intervalo fechado é essencial. Por exemplo, podemos considerar as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, que leva x em x e $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ que também leva x em x. É fácil observar que f tem máximo e mínimo bem definidos, a saber $f(b)$ e $f(a)$ respectivamente, e g, por ter um domínio aberto, não assume máximo e nem mínimo.

Além de extremos absolutos, podemos ter extremos locais em uma função. Então temos a seguinte definição:

Definição 5.3. *Sejam f uma função e $c \in D(f)$. Dizemos que o número $f(c)$ é:*

- *valor máximo local de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c.*
- *valor mínimo local de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c.*

Consideremos a seguinte definição

Definição 5.4 (Ponto crítico)**.** *Um ponto crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

O seguinte teorema apresenta critérios para determinar se um número c no domínio de uma função é ponto de máximo ou mínimo

Teorema 5.4 (Fermat)**.** *Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.*

Demostração. Suponhamos, para fixar ideias que f assume máximo local em $x = c$ (a prova é análoga quando f assume mínimo local). Como f assume máximo local em $x = c$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - f(c) \leq 0$, sempre que $|x - c| < \delta$. Existem duas possibilidades para x. Se $x > c$ temos que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, e se $x < c$ temos $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Se $f'(c)$ existe, então $f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c)$. Daí temos

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ou seja $0 \leq f'(c) \leq 0$, então segue que $f'(c) = 0$ como queríamos demonstrar. ∎

O Teorema 5.4 afirma simplesmente que c é um ponto extremo de uma função f, então o gráfico de f possui tangente horizontal neste ponto.

Observação 5.8. *Se f possui máximo ou mínimo em um número c, então c é número crítico de f.*

Com estes teoremas e definições já enunciados, somos capazes de determinar os máximos e os mínimos de uma função em um intervalo fechado. Basta que avaliemos a função nos extremos do intervalo e em seus números críticos, em seguida o menor destes números será o mínimo absoluto no intervalo e o maior deles será o máximo absoluto no intervalo.

Dando continuidade aos nossos estudos, temos um dos mais importantes teoremas do Cálculo diferencial de uma variável que é:

Teorema 5.5 (Teorema de Rolle)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função.* f *continua em* $[a, b]$*, derivável em* (a, b) *e* $f(a) = f(b)$*. Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demostração. Para provarmos o Teorema de Rolle devemos analisar três casos. Primeiro devemos analisar o caso em que f é constante em (a, b), este caso é trivial uma vez que a derivada de f será zero para qualquer número em (a, b). Se tivermos $f(x) > f(a)$ para algum $x \in (a, b)$, segue do Teorema 5.3 que f assume máximo em $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$ segue que existe $c \in (a, b)$ com c sendo o máximo de f, daí segue do Teorema 5.4 que $f'(c) = 0$. Por fim, se $f(x) < f(a)$ para algum $x \in (a, b)$, segue do Teorema 5.3 que f assume mínimo em $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$ segue que existe $d \in (a, b)$ com d sendo o mínimo de f, daí segue do Teorema 5.4 que $f'(d) = 0$, o que conclui nossa prova. ∎

Como consequência deste teorema temos o seguinte

Teorema 5.6 (Teorema do valor médio)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função.* f *continua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b)*. Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a).$$

Demostração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Considere a função

$$\begin{array}{rccl} h: & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - \left(f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - b)\right) \end{array}$$

Devemos notar que h satisfaz as condições do Teorema 5.5, pois h é continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), em virtude de que f satisfaz tais condições. Além disso é fácil ver que $f(a) = f(b) = 0$. Assim, aplicando o Teorema 5.5, sabemos que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, ou seja

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

com isto concluímos que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$

o que conclui nossa prova. ∎

Podemos interpretar o Teorema do Valor Médio do ponto de vista físico, ou seja, se $s = f(t)$ descreve a posição de uma partícula em função do tempo, a derivada $f'(t)$ descreve a velocidade instantânea da partícula em um certo instante t. Se a partícula se move durante um intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, a velocidade média da partícula será $v_m = \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$. Nestas condições é possível afirmar que em algum instante a velocidade média é igual a velocidade instantânea, o que é bem razoável de se pensar.

Ainda, como consequência do Teorema do Valor Médio, temos dois corolários que serão de grande importância para o cálculo de diferencial.

Corolário 5.1. *Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).*

Demostração. Consideremos $x_1 < x_2 \in (a, b)$ dois números quaisquer em (a, b). Como f é derivável em (a, b), f será derivável em (x_1, x_2) e continua em $[x_1, x_2]$, nestas condições $f|_{[x_1,x_2]}$ satisfaz as condições do Teorema 5.6, com isto, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

uma vez que $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, temos que $f'(c) = 0$, donde segue

$$f(x_1) = f(x_2)$$

uma vez que $x_1, x_2 \in (a, b)$ foram escolhidos arbitrariamente concluímos que f é constante em (a, b). ■

Corolário 5.2. *Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b).*

Demostração. Seja $F(x) = f(x) - g(x)$, daí $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, segue o corolário anterior que F é constante em (a, b). ■

Agora vamos estudar a relação entre o comportamento dos gráficos de funções e suas derivadas.

5.7.1 Funções crescentes e decrescentes e o teste da primeira derivada

Iniciamos relembrando as definições de função crescente e função decrescente.

Definição 5.5 (Função crescente)**.** *Uma função f definida em um intervalo não degenerado será crescente se*

$$f(x_0) < f(x_1)$$

sempre que $x_0 < x_1$, com x_0, x_1 números quaisquer do intervalo.

Definição 5.6 (Função decrescente)**.** *Uma função f definida em um intervalo não degenerado será decrescente se*

$$f(x_1) < f(x_0)$$

sempre que $x_0 < x_1$, com x_0, x_1 números quaisquer do intervalo.

O seguinte teorema nos mostra como encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função através de sua derivada

Teorema 5.7. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, f continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então*

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$

Demostração. Provaremos o item (i), a prova do item (ii) é análoga. Tomemos $x_0 < x_1 \in (a, b)$. Como f é derivável em (a, b) temos que f será continua em $[x_0, x_1] \subset (a, b)$ e derivável em $(x_0, x_1) \subset (a, b)$, ou seja $f|_{[x_0, x_0]}$ satisfaz as condições do Teorema 5.6. Com isto existe $c \in (x_0, x_1)$ de tal forma que

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$

Por hipótese $f'(c) > 0$ e como escolhemos $x_0 < x_1$ segue que $x_1 - x_0 > 0$, com isto temos que $f(x_1) - f(x_0) > 0$, ou seja, mostramos que $f(x_0) < f(x_1)$ sempre que $x_0 < x_1$, como x_0 e x_1 foram escolhidos arbitrariamente o teorema esta demonstrado. ■

Se sabemos onde uma função cresce e onde uma função decresce, então podemos determinar seus extremos locais. A ideia essencial é que, se uma função é crescente a esquerda de um número c e decrescente a direita, é conveniente imaginar que c seja um ponto de máximo. Reciprocamente, se uma função é decrescente a esquerda de um número c e crescente a direita deste mesmo, então é conveniente que c seja um ponto de mínimo da função. E isto é o que explica precisamente o seguinte teorema:

Teorema 5.8 (Teste da primeira derivada)**.** *Seja f uma função continua em um intervalo (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista para todos os pontos de (a, b) exceto possivelmente em c:*

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo $(d, c) \subset (a, b)$, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo $(c, e) \subset (a, b)$, então f terá um valor máximo local em c*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo $(d, c) \subset (a, b)$, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo $(c, e) \subset (a, b)$, então f terá um valor mínimo local em c.*

Demostração. Provaremos o item (i), a prova do item (ii) se faz de forma análoga. Primeiro se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (d, c)$ segue do Teorema 5.7 que f é crescente em (d, c), desta forma qualquer que seja $x_0 \in (d, c)$ temos $f(x_0) < f(c)$. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, e)$ segue do Teorema 5.7 que f é decrescente em (c, e), desta forma qualquer que seja $x_1 \in (c, e)$ temos $f(x_1) < f(c)$. Ou seja $f(c) > f(x)$ para todo $x \in (d, c) \cup (c, e)$, isto é, por definição $f(c)$ é um máximo local, isto conclui nossa prova. ■

Devemos observar que mesmo que c seja um número crítico no domínio de uma função f, pode ocorrer que c não seja máximo e nem mínimo, para que isto ocorra basta que a derivada não mude de sinal em uma vizinhança de c.

A seguir trabalharemos o conceito de concavidade do gráfico de uma função.

5.7.2 Concavidades e o teste da segunda derivada

A ideia de concavidade de uma função é de grande importância, pois possuem resultados que nos ajudam a determinar extremos de uma função, e além disso nos mostra como varia a função derivada.

Definição 5.7 (Concavidade para cima e para baixo)**.** *Sejam I um intervalo não degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I.*

1. *O gráfico de $f(x)$ é dito* ***concavo para cima*** *em I se f' é uma função crescente em I.*

2. *O gráfico de $f(x)$ é dito* ***concavo para baixo*** *em I se f' é uma função decrescente em I.*

É importante sabermos determinar os intervalos onde o gráfico de uma função é concavo para baixo, e os intervalos onde o gráfico é concavo para cima. E isto é o que apresenta o seguinte teorema

Teorema 5.9 (Teste de concavidade)**.** *Sejam I um intervalo não degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2.*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de $f(x)$ é concavo para cima em I.*

2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de $f(x)$ é concavo para baixo em I.*

Demostração. A prova é imediata a partir do Teorema 5.7. ■

Definição 5.8 (Ponto de inflexão)**.** *Um ponto P sobre o gráfico de uma função f, é chamado ponto de inflexão, se o gráfico de f admite reta tangente em P, e muda de concavidade em P*

O seguinte teorema nos mostra que é fácil identificar um candidato a ponto de inflexão

Teorema 5.10. *Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se, $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.*

Demostração. Seja g uma função tal que $g(x) = f'(x)$, desta forma $g'(x) = f''(x)$. Se $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão de f, então $f'' = g'$ muda de sinal em c. Então segue do Teorema 5.8 que g' assume extremo em c. Portanto, do Teorema 5.4 obtemos $g'(c) = f''(c) = 0$, o que conclui nossa prova. ■

Devemos observar que a reciproca do teorema anterior não é necessariamente verdadeira, isto é, podemos exibir uma função f tal que, existe um número c em seu domínio com $f''(c) = 0$, mas c não é ponto de inflexão. O que o teorema afirma precisamente, é que todo ponto de inflexão é um ponto de máximo da primeira derivada, com isto a segunda derivada no ponto será zero.

A segunda derivada também nos ajuda a determinar extremos locais de uma função. O seguinte teorema nos mostra como proceder

Teorema 5.11 (Teste da derivada segunda)**.** *Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponha que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c, e além disso f'' é continua em um intervalo aberto que contem c. Se $f''(c)$ existe e*

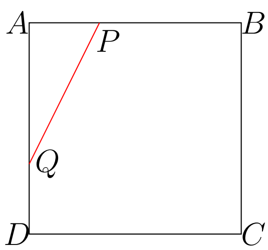
(i) *se $f''(c) < 0$, então f tem valor máximo local em c.*

(ii) *se $f''(c) > 0$, então f tem mínimo local em c.*

Demostração. Faremos a demostração do item (i), a prova do item (ii) se faz de forma análoga. Por hipótese f'' é continua em uma vizinhança de c, desta forma, uma vez que $f''(c) < 0$ segue do Teorema 3.14 que existe $\delta > 0$ de forma que $f''(x) < 0$ para todo $x \in I_\delta = (c-\delta, c+\delta)$. Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I_\delta$ segue do Teorema 5.7 que f' é decrescente em I_δ, com efeito o gráfico de f é concavo para baixo em I_δ. Afirmamos que, se o gráfico de f é concavo para baixo em I_δ e existe $c \in I_\delta$ que é tal que $f'(c) = 0$ então c é ponto de máximo de f em I_δ. De fato, como f' é decrescente em I_δ, então será também decrescente em (d, c) e em (c, e), $c - \delta < d < c < e < c + \delta$, com efeito se $x_0 \in (d, c)$ temos $f'(c) < f'(x_0)$ e se, $x_1 \in (c, e)$ temos $f'(c) > f'(x_1)$. Como por hipótese $f'(c) = 0$ temos a desigualdade $f'(x_0) > 0 > f'(x_1)$, segue do Teorema 5.8 que c é ponto de máximo local de f. Isto conclui nossa prova. ■

Todos os resultados apresentados dessa seção serão de grande importância para o estudo dos chamados problemas de otimização. Para ilustrar como devemos proceder em tais problemas, consideramos o seguinte problema resolvido:

Problema Resolvido 5.5. *Seja $ABCD$ um quadrado de área unitária, são tomados dois pontos $P \in AB$ e $Q \in AD$, tais que $|AP| + |AQ| = |AD|$. Calcule o maior valor para a área do triângulo APQ. Como seria tratado esse problema, se fosse pedido para calcular a menor área?*



Resolução.

Sejam $x = \overline{AP}$ e $y = \overline{AQ}$. Sabendo que a área do triângulo APQ é a semisoma da bese e autura. Podemos escrever a função de duas variáveis,

$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \tag{5.11}$$

Além disso, temos que $x + y = 1$ assim $y = 1 - x$. Com esta informação escrevemos 5.11 em função de x da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x \cdot (1-x)}{2} \\ A(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ainda $A'(x) = \frac{1}{2} - x$. Fazendo $A'(x) = 0$ para investigarmos pontos crítico da curva, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - x &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Como $A(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo podemos afirmar que $x = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo. Assim a área máxima do tiângulo APQ será $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\, u.a.$

Se estivéssemos buscando a área mínima trataríamos do seguinte limite

$$A_{\text{min}} = \lim_{x \to 0} A(x) \tag{5.14}$$

embora que intuitivamente e analiticamente o resultado seja 0. □

5.8 A regra de L'Hôptal para limites indeterminados

Muitas vezes no cálculo de limites aparecem formas indeterminadas do tipo, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, as quais são contornadas, na maioria dos casos, por meio de manipulações algébricas. O teorema que será enunciado nesta seção mostra essencialmente que, sob certas condições, o limite de um quociente de funções será igual ao limite do quociente das derivadas. Mas antes de enunciar o teorema vejamos o seguinte exemplo, que trata-se de uma versão mais simples do teorema que será enunciado a diante.

Consideremos f e g duas funções deriváveis em um certo número a, com $g'(a) \neq 0$ e $f(a) = g(a) = 0$, é fácil notar que o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esta seria a prova imediata da versão mais simples do Teorema de L'Hôptal, que pode ser enunciada da seguinte maneira:

Teorema 5.12 (L'Hôptal–versão simples)**.** *Sejam f e g funções deriváveis em um certo número a com $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$. Então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Muitos problemas podem ser resolvidos com a versão anterior do teorema. No entanto, é mais importante a versão mais completa

Teorema 5.13 (L'Hôptal)**.** *Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contêm a (exceto possivelmente em a). Suponha que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for igual a ∞ ou $-\infty$).

Observação 5.9. *O teorema anterior também será válido para limites laterais ou os limites no infinito.*

Esta versão do teorema é um pouco mais complicada de ser demonstrada, a saber, necessita de um resultado conhecido como Teorema do Valor Médio de Cauchy. Uma demostração do teorema do valor médio de Cauchy e da versão anterior do teorema (Regra de L'Hôptal), pode ser vista em Stewart (2016)[4].

O teorema que leva o nome de *Regra de L'Hôptal*, foi apresentado pela primeira vez em um texto publicado pelo marquês de L'Hôptal em 1696[5], embora que o teorema leve o nome do marquês, este foi descoberto por Johann Bernoulli em 1694.

Para fixarmos ideias consideremos os seguintes problemas resolvidos:

Problema Resolvido 5.6. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Resolução.

Devemos notar que o limite satisfaz as condições da Regra de L'Hôptal, desta forma temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

□

Observação 5.10. *O limite anterior já havia sido definido por meio do Teorema 3.7, é possível observar que obtemos o mesmo resultado (o que não poderia ser diferente),*

Problema Resolvido 5.7. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin(3x)\cot(5x)$

Resolução.

Devemos observar que podemos utilizar a definição de cotangente pra escrever o limite em termos de seno e cosseno, ou seja:

4 Mais especificamente nas páginas 40 e 41 do apêndice

5 A saber o nome do texto é *Analyse des infinement petits*

$$\lim_{x\to 0} \sin(3x)\cot(5x) = \lim_{x\to 0} \sin(3x)\frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}$$

e então podemos reorganizar o limite assim como se segue,

$$\lim_{x\to 0} \sin(3x)\cot(5x) = \lim_{x\to 0} \cos(5x) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}.$$

Note que na segunda parte do produto obtemos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, e então aplicamos a regra de L'Hôptal para obter o resultado,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \sin(3x)\cot(5x) &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \cos(5x) \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{5\cos(5x)} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$\square$

Observação 5.11. *Devemos notar que em alguns casos devemos manipular o limite a ser calculado. Com tais manipulações é possível calcular o limite de produtos indeterminados (*$\pm\infty \cdot 0$*) e diferenças indeterminadas (*$\infty - \infty$*).*

6

Resoluções comentadas dos problemas

Neste capítulo trazemos soluções comentadas para os problemas propostos nos Capítulos 2 e 4. Acreditamos que elas podem ser de grande ajuda aos estudantes. Tais soluções podem ter dois usos distintos. Primeiro o estudante pode sentir dificuldades em solucionar os problemas, então através dos comentários, e a própria solução, este estudante pode encontrar um norte. Segundo, o estudante que conseguir solucionar os problemas, poderá comparar as suas soluções com as nossas para um maior desenvolvimento.

6.1 Problemas sobre limites e continuidade

Problema 2.1
Objetivos do problema:

- Trabalhar o conceito de limite lateral.
- Trabalhar equações da circunferência.
- Trabalhar a obtenção de equações de uma reta sob circunstancias não favoráveis.

Conceitos abordados: O problema aborda como conceito principal, olhando do ponto de vista do Cálculo, o cálculo de limite , mas precisamente o dos limites laterais. No entanto no decorrer da resolução do problema é possível enxergar a necessidade de de utilizar manipulações algébricas interessantes para tal cálculo. Além de conhecer o cálculo de limites, o estudante que deseja solucionar tal problema deve ter também um bom conhecimento das equações da circunferência, da reta e saber resolver sistemas não lineares.
Resolução do problema: Inicialmente devemos olhar para as equações das circunferências dadas. Para C_1 temos

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

e para C_2 devemos ter

$$x^2 + y^2 = r^2$$

onde devemos escolher um $r > 0$. Devemos agora determinar a equação da reta que passa pelos pontos P e Q, como já temos as coordenadas de P definidas, a saber $P = (0, r)$, devemos encontrar as coordenadas de Q. De forma trivial devemos observar que as coordenadas do ponto Q é uma das soluções do sistema não linear

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \tag{6.1}$$

Solucionando o sistema (6.1) temos,

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{r^2}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{4r^2 - r^4}}{2} \end{cases}$$

como Q, por hipótese, trata-se da intersecção superior das circunferências, temos suas coordenadas,

$$Q = \left(\frac{r^2}{2}, \frac{\sqrt{4r^2 - r^4}}{2}\right)$$

Para determinar a equação da reta que passa pelos pontos P e Q, devemos determinar o coeficiente angular de tal reta. Como a reta é claramente decrescente temos o coeficiente angular,

$$m = -\left(\frac{r - \frac{\sqrt{4r^2-r^4}}{2}}{\frac{r^2}{2}}\right) \Rightarrow m = \frac{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r}{r^2}$$

desta forma obtemos a equação da reta que passa pelos pontos P e Q,

$$y = \left(\frac{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r}{r^2}\right) x + r.$$

Estamos agora interessados no ponto $R = (x_R, 0)$, onde x_R é a raiz da reta que passa pelos pontos P e Q. Fazendo $y = 0$ na equação de tal reta obtemos,

$$x = \frac{-r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r} = x_R$$

para sabermos o que ocorre com o ponto R, quando $r \to 0^+$, basta que olhemos para o limite

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{-r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r}$$

reorganizando obtemos

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{-r^2}{\sqrt{4 - r^2} - 2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{-r^2(\sqrt{4 - r^2} + 2)}{4 - r^2 - 4} = \lim_{r \to 0^+} \sqrt{4 - r^2} + 2 = 4.$$

Com isto, concluímos que a medida que contraímos a circunferência C_2, devemos ter o ponto R tendendo para o ponto $(4, 0)$.

Comentários: Apesar de a grande maioria dos conceitos utilizados para a solução do problema serem elementares, o mesmo torna-se complicado, pois tais conceitos devem ser aplicados com uma certa precisão. A respeito do cálculo do limite propriamente dito, observa-se que em geral quando nos deparamos com radicais, se torna necessário a utilização de produtos notáveis para simplificar as expressões. E isto, para uma grande parte dos estudantes iniciantes de Cálculo é um pouco distante.

Problema 2.2
Objetivos do problema:

- Trabalhar o cálculo de limites através da mudança de variáveis.
- Trabalhar o cálculo de limites envolvendo radicais.
- Trabalhar a fatoração, utilização de produtos notáveis.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado, a principio, é a mudança de variáveis para o cálculo de limites. Para isto deve-se observar os domínios das funções e suas respectivas restrições. Um outro conceito abordado é a fatoração de expressões algébricas, tal conteúdo é apresentado ao estudante geralmente no oitavo ano do ensino fundamental, no entanto, não é fora do comum estudantes do nível superior não os dominarem.

Resolução do problema: Para resolver este problema, devemos trabalhar com mudança de variáveis. Inicialmente devemos fazer $x = t^2$, como $x \to 1$ podemos escolher $x > 1$ e então teremos $t = \sqrt{x}$, além disso quando $x \to 1$ temos $t \to 1$ e então o limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ se torna

$$\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^2}-1}{t-1}$$

Façamos agora uma segunda mudança de variável. Tome $h = t-1$, com isto teremos $t = h+1$, e quando $t \to 1$ temos que $h \to 0$, e então o limite $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t^2}-1}{t-1}$ se torna,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(h+1)^2}-1}{h}$$

.

Trabalhado sobre o último limite temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(h+1)^2}-1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(h+1)^2}-1}{h} \cdot \left[\frac{(\sqrt[3]{(h+1)^2})^2 + \sqrt[3]{(h+1)^2}+1}{(\sqrt[3]{(h+1)^2})^2 + \sqrt[3]{(h+1)^2}+1}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)^2-1}{h[(\sqrt[3]{(h+1)^2})^2 + \sqrt[3]{(h+1)^2}+1]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h[(\sqrt[3]{(h+1)^2})^2 + \sqrt[3]{(h+1)^2}+1]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h+2}{(\sqrt[3]{(h+1)^2})^2 + \sqrt[3]{(h+1)^2}+1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por fim concluímos que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2}{3}$.

Comentários: Deve-se observar que a solução de problemas desta natureza exige do estudante, uma certa visão além do alcance. Além do fato de que, a solução apresentada utilizar duas mudanças de variáveis, devemos notar que não é comum observar o ente algébrico $\sqrt[3]{(h+1)^2}$, ou semelhantes, como um único elemento para então utilizar a fatoração que solucione o problema.

Deve-se lembrar também que o método de solução apresentado não é único, poderíamos fazer uso do teorema de L'Hoptal, que inclusive facilitaria o problema.

Problema 2.3

Objetivos do problema:

- Trabalhar o cálculo de limites.
- Exercitar a criatividade.
- Exercitar manipulações algébricas.

Conceitos abordados: Neste problema o principal conceito trabalhado é o cálculo de limites que necessitam de manipulações algébricas. Além disso existe o conceito de derivada implícito no problema.

Resolução do problema: Seja $f(x)=\sqrt{ax+b}$. Suponha que $f(0)=2$, desta forma devemos obter $\sqrt{b}=2$, ou seja, temos $b=4$. Agora devemos fazer uso da hipótese, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$, substituindo b por 4 obtemos

$$\begin{aligned}
1=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{ax+4}+2}{\sqrt{ax+4}+2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{ax+4-4}{x(\sqrt{ax+4}+2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}\\
&= \frac{a}{4}
\end{aligned}$$

com isto obtemos $a=4$. Por fim solucionamos nosso problema,temos $a=b=4$.

Comentários: Devemos explicar ao leitor de onde surgiu a ideia de definir $f(x)=\sqrt{ax+b}$ e exigir que $f(0)$ assumisse o valor 2. Após um longo tempo observando o problema foi possível notar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}$, era de certa forma bastante parecido com $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, onde esta última expressão representa a derivada da função f no ponto $x=a$, representada via o quociente de Newton. A partir de então a solução do problema surge de forma imediata, visto que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}$ pode ser escrita como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{x-0}$, exigindo que $\sqrt{b}=2$.

Artifícios como o descrito anteriormente, de fato, são complicados de serem enxergados, no entanto por vezes se mostram como a única saída para o problema.

Problema 2.4
Objetivos do problema:

- Trabalhar o cálculo de limites envolvendo funções modulares.
- Revisar as funções modulares.
- Explorar a teoria de limites.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado pelo problema, além do cálculo de limites, é o conceito de função modular e função definida por partes. Além disso, deve-se observar que o estudante deve dominar a teoria dos limites (o trabalho de aproximações).
Resolução do problema: Da forma que se encontra, o limite se mostra muito complexo de ser calculado, neste sentido, o nosso objetivo inicial passa a ser simplificar nossa expressão.

Comecemos por definir $f(x) = |2x-1|$ e $g(x) = |2x+1|$. Agora façamos $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, utilizando a definição de valor absoluto obtemos facilmente a raiz de f como sendo $x = \frac{1}{2}$ e a raiz de g como sendo $x = -\frac{1}{2}$. Isto pode ser constatado nos gráficos das funções f e g na Figura 18.

Vamos agora utilizar a definição de módulo para reescrever as expressões de f e g, os cálculos serão omitidos, obtemos as expressões para f e g,

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, \text{ se } x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, \text{ se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x-1, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \\ 2x+1, \text{ se } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Agora devemos notar que estamos interessados no limite de $\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$ quando $x \to 0$, deste modo podemos tomar f e g ambas restritas ao intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Com efeito podemos calcular o limite com extrema facilidade, assim como se segue,

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x+1-(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = \lim_{x\to 0} -4 = -4$$

Portanto temos que, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x} = -4$. O que resolve nosso problema.
Comentários: Devemos observar que em um intervalo conveniente, a função que deveríamos analisar o limite, tratava-se de uma constante. No entanto, necessitou-se do conhecimento das funções modulares para reduzir uma definição complicada da função a apenas uma constante. Apesar do limite se tornar trivial após as manipulações, devemos observar que se o estudante não tiver internalizado, que para o cálculo de limites, estamos interessados apenas em uma vizinhança do ponto, a solução de tal problema não seria possível.

Problema 2.5
Objetivos do problema:

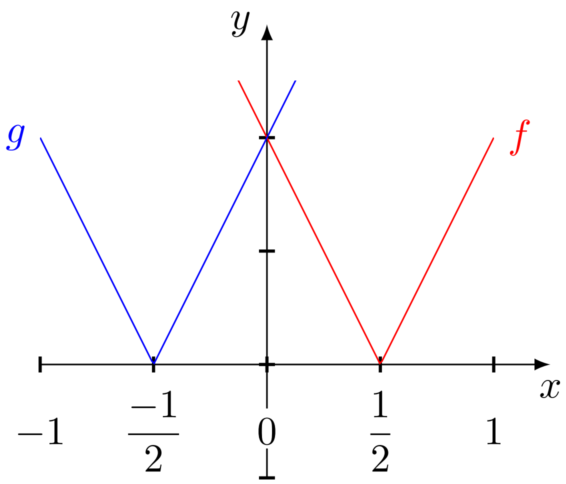


Figura 18 – Figura para a solução do Problema 2.4

- Visualização do conceito de limite em situações não aparentes.
- Trabalho com geometria analítica.
- Aplicação do conceito de limite.

Conceitos abordados: Os conceitos abordados a partir deste problema são precisamente o estudo dos limites elementares, visto que será necessário apenas observar o limite sobre uma função quadrática, além disso, exige um bom conhecimento de geometria analítica mais precisamente a habilidade de determinar retas e retas normais.

Resolução do problema: Seja x_P a abscissa do ponto P, como P está sobre a parábola devemos ter $P = (x_P, x_P^2)$. Seja M o ponto médio do segmento $\overline{OP}$, desta forma temos suas coordenadas $M = (\frac{x_P}{2}, \frac{x_P^2}{2})$. Devemos encontrar a equação da reta que contem o segmento $\overline{OP}$, a inclinação m de tal reta pode ser calculada rapidamente, onde devemos obter $m = x_P$, com efeito temos a equação da reta procurada, $r : y = x_P x$. Agora vamos determinar a equação da reta que contem o ponto M e é perpendicular a r. Seja $C = (x, y)$ um ponto qualquer do plano, sempre podemos observar o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{MC} = (\frac{2x-x_P}{2}, \frac{2y-x_P^2}{2})$, um vetor genérico com origem em M. A partir disto, podemos expressar a equação da reta procurada via produto interno,

$$\left\langle \overrightarrow{OP}, \vec{v} \right\rangle = 0 \ \Rightarrow \ \left\langle (x_P, x_P^2), \left(\frac{2x - x_P}{2}, \frac{2y - x_P^2}{2} \right) \right\rangle = 0$$

com isto devemos obter

$$\begin{aligned} \frac{2x_P x - x_P^2}{2} + \frac{2x_P^2 y - x_P^4}{2} = 0 &\Rightarrow 2x_P x - x_P^2 + 2x_P^2 y - x_P^4 = 0 \\ &\Rightarrow 2x_P^2 y = -2x_P x + x_P^2 + x_P^4 \\ &\Rightarrow y = -x_P^{-1} + \frac{1}{2}(1 + x_P^2) \end{aligned}$$

desta maneira obtemos a reta $s : y = -x_P^{-1} + \frac{1}{2}(1 + x_P^2)$ perpendicular a r, com efeito s contem o segmento $\overline{MQ}$. Agora podemos determinar as coordenadas do ponto Q, por hipótese sua abscissa é 0, fazendo $x = 0$ em s obtemos $y = \frac{1}{2}(1 + x_P^2)$, assim Q fica determinado como sendo $Q = (0, \frac{1}{2}(1 + x_P^2))$.

Por fim podemos determinar o que ocorre com Q quando $P \to 0$ ao longo da parábola $y = x^2$, basta que olhemos para o limite

$$\lim_{x_P \to 0} \frac{1}{2}(1 + x_P^2) = \frac{1}{2}$$

Nestas condições podemos afirmar que o ponto Q possui uma posição limite, e esta é o ponto $(0, \frac{1}{2})$.

Comentários: Uma questão relevante neste problema, é que, quando foi necessário determinar a equação da reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$, foi feito uso do conceito de produto interno. Acredita-se que este método (para quem o conhece) possa causar menos confusão que o método tradicional aprendido no ensino médio, mas exige do estudante conhecimento da álgebra vetorial.

Além disso, deve-se observar que a reta r determinada no inicio do problema, não influi em sua resolução, esta está servindo apenas como referência, e para o leitor que não possui familiaridade com o produto interno, este pode verificar (via conceitos elementares) que de fato $s \perp r$.

Problema 2.6

Objetivos do problema:

- Observação do comportamento de gráficos.
- Aplicação do teorema do valor intermediário.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado neste problema é o teorema do valor intermediário, outros conhecimento que possam ser utilizados de forma implícita podem ser observados como pré requisitos essenciais para a compreensão do problema.

Resolução do problema:

a) Podemos tomar dois caminhos para solucionar este problema. Primeiro tomar a solução trivial, olhamos para a função identidade $f(x) = x$, restrita a $[0, 1]$, obviamente f é continua em $[0, 1]$, e possui imagem em $[0, 1]$, por fim, todos os pontos do $[0, 1]$ são pontos fixos de f por definição.

   Por outro lado, podemos apelar para uma construção geométrica do problema. Devemos observar a Figura 19, nesta a função f em vermelho é nossa função continua em $[0, 1]$ e a função em azul i trata-se da função identidade, basta observar que nosso ponto fixo é o número $c \in [0, 1]$ onde temos $f(c) = i(c) = c$, ou seja, a abscissa do ponto de intersecção da curva vermelha com a curva azul, é nosso ponto fixo.

b) Isto é impossível, fato este que vai ser constatado pelo próximo item do problema, no entanto o obstáculo é o fato de que qualquer gráfico continuo de uma função definida de

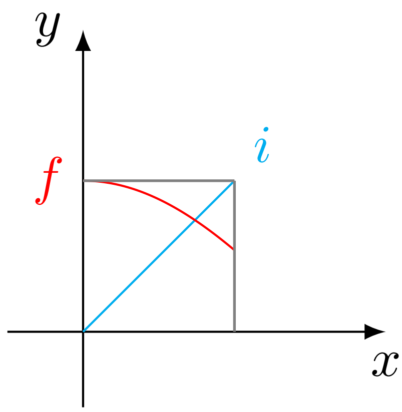


Figura 19 – Figura para a solução do Problema 2.6

$[0, 1]$ em $[0, 1]$, deve intersetar o gráfico da função identidade, neste sentido o principal obstáculo é a continuidade da função.

c) Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função continua. Afim de que exista um ponto fixo, é necessário que exista ao menos um ponto que satisfaça a equação $f(x) = x$, ou seja $x - f(x) = 0$. Desta forma para provar que f possuí ponto fixo devemos supor que $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$, pois caso contrário não haveria o que provar. Com isto defina $\varphi(x) = x - f(x)$, note que $\varphi(0) = -f(0) < 0$ e $\varphi(1) = 1 - f(1) > 0$, sendo assim pelo teorema do valor intermediário existe $c \in (0, 1)$ tal que $\varphi(c) = 0$, ou seja, $c - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$, isto é, c é ponto fixo da função f.

Comentários: O principal comentário que pode ser tecido a respeito deste problema é o fato deste ser um coso particular da versão unidimensional do teorema do ponto fixo de Brower, assim como é citado em Lima (2018, p.79), que em seu caso mais geral afirma que uma aplicação continua sobre a bola unitária $n-$dimensional possui pontos fixos. Um outro teorema acerca de pontos fixos é o teorema do ponto fixo de Banach, cujos os conceitos envolvidos fogem ao escopo deste texto, no entanto, o leitor interessado pode ver Oliveira (2015).

Problema 2.7

Objetivos do problema:

- Trabalhar as propriedades operatórias dos limites.
- Fazer com que o estudante desenvolva saídas criativas para obter o limite procurado.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado neste problema deve ser as propriedades operatória de limites, a saber, limites da soma e diferença de funções, além do limite do produto e quociente. Neste caso, tais propriedades estão sendo trabalhadas de uma forma genérica.

Resolução do problema: Utilizando as hipóteses e as propriedades de limites podemos observar que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]+[f(x)-g(x)]=3 &\Rightarrow \lim_{x\to a} 2f(x)=3\\ &\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

analogamente devemos notar que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]-[f(x)+g(x)]=-1 &\Rightarrow \lim_{x\to a} -2g(x)=-1\\ &\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por fim devemos ter $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$, e isto soluciona o problema.

Comentários: É importante observar que quando aprendemos formas mais avançadas de fazer o cálculo de limites, deixamos as propriedades operatórias de lado. Este problema faz com que o estudante as utilize, além disso, deve-se ter uma certa visão para encontrar a melhor forma de determinar os limites. Por exemplo, a solução apresentada mostra o cálculo sendo feito através de soma e subtração, no entanto, poderia ser utilizado a expansão através de produtos notáveis.

Problema 2.8

Objetivos do problema:

- Exibir a importância dos limites laterais .
- Compreender a descrição de um fenômeno por meio de uma equação.

Conceitos abordados: Neste problema são abordados unicamente os conceitos que dizem respeito aos limites laterais. Embora que tenha sido utilizado a fórmula da contração de Lorentz para trazer uma contextualização.

Resolução do problema: A medida que v aumenta, v se aproxima da velocidade da luz e então o quociente $\frac{v^2}{c^2}$ se aproxima de 1, uma vez que isto acontece $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ se aproxima de zero, com isto L torna-se pequeno.

Este fenômeno, descrito anteriormente, é inteiramente descrito pelo limite

$$\lim_{v\to c^-} L = \lim_{v\to c^-} L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0$$

Neste caso se torna necessário estudar o limite quando a velocidade do foguete se aproxima da velocidade da luz pela esquerda, pois se não o fosse, teríamos $v^2 > c^2$ e consequentemente teríamos $1-\frac{v^2}{c^2} < 0$, o que não poderia ocorre pois não existe raiz real de numero negativo.

Comentários: Deve-se observar que para fazer a resolução do problema não é exigido que o estudante faça cálculos demasiadamente complicados, mas sim que tenha compreendido os conceitos de limites laterais e suas utilizações. Por vezes, problemas que exigem conceitos muito bem compreendidos se tornam mais complicados que problemas práticos que exijam contas mecânicas.

Problema 2.9
Objetivos do problema:

- Trabalhar a definição formal de limite.
- Trabalhar uma aplicação da definição formal de limite.

Conceitos abordados: Neste problema é abordado unicamente a definição formal de limite, embora que seja apresentada de uma forma implícita.
Resolução do problema: Para resolver este problema devemos entender a definição formal de limite. Neste caso queremos determinar um intervalo $I = (70 - \delta, 70 + \delta), \delta > 0$ de tal forma que para todo $t \in I$ tenhamos $|y - 10| < 0,0005$. Ou seja queremos limitar a variação da largura, y da barra. Para isto comecemos investigar nosso delta. Para isto trabalhemos a condição desejada $|y - 10| < 0,0005$, daí

$$\begin{aligned} |y - 10| < 0,0005 &\Rightarrow |10 + (t - 70) \times 10^{-4} - 10| < 5 \times 10^{-4} \\ &\Rightarrow |(t - 70)| \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4} \\ &\Rightarrow |t - 70| < 5 \end{aligned}$$

Com isto determinamos o nosso δ, basta que tomemos $\delta = 5$, e com isto podemos garantir que para todo $t \in (65, 75)$ devemos ter $|y - 10| < 0,0005$.

Portanto, a variação máxima de temperatura com relação aos $70°F$ originais para que a barra se mantenha nas especificações é de $5°$ para mais ou para menos.
Comentários: Com relação as operações matemáticas, este problema não traz grandes dificuldades. O que torna o problema bastante interessante é a forma como é exigido o conhecimento da definição de limite. Embora que não seja falado explicitamente os conceitos das distâncias ϵ, δ, estes aprecem naturalmente.

Problema 2.10
Objetivos do problema:

- Trabalhar propriedades do cálculo de limites.
- Trabalhar a mudança de variáveis.
- Aplicar o limite fundamental trigonométrico.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado neste problema é o limite fundamental trigonométrico, no entanto, este encontra-se disfaçado, necessitando de uma mudança de variáveis. Além disso, o estudante que objetiva resolver tal problema necessita do conhecimento do teorema do confronto.

Resolução do problema: Vamos separar o limite em dua parcelas para que possamos trabalhá-las separadamente, ou seja

$$\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)+\frac{\sin(x^2-25)}{x-5}\right] = \overbrace{\lim_{x\to 5}(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)}^{(I)} + \underbrace{\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x-5}}_{(II)}$$

Com respeito a parte (I), sabemos que esta vale zero, uma vez que $\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)$, é limitado e x^2-25 tende a zero quando x tende a 5. E então obtemos

$$\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)+\frac{\sin(x^2-25)}{x-5}\right] = \overbrace{\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x-5}}^{(II)}$$

Trabalhando a expressão (II) notamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x-5} &= \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x^2-25}(x+5)\\ &= \overbrace{\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x^2-25}}^{(i)}\underbrace{\lim_{x\to 5}(x+5)}_{(ii)}\end{aligned}$$

Com uma mudança de variável é fácil ver que (i) vale 1. (ii) trata-se de um limite trivial, e este vale 10. Com tudo isto obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\Bigg[(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)+ \\ +\frac{\sin(x^2-25)}{x-5}\Bigg] &= \lim_{x\to 5}(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)+ \\ &\quad +\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x-5} \\ &= \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x-5} \\ &= \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x^2-25}(x+5) \\ &= \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-25)}{x^2-25}\lim_{x\to 5}(x+5) \\ &= 10\end{aligned}$$

Comentários: Este problema a primeira vista é bastante complicado, no entanto, ao fazer uso das propriedades operatórias de limites, é possível separar o limite inicial em partes mais simples. Neste sentido, é possível observar a utilização de no mínimo três teoremas a cerca dos limites. Problemas dessa natureza proporcionam aos estudantes, exercitar a criatividade.

6.2 problemas sobre derivadas

Problema 4.1
Objetivos do problema:

- Trabalhar o cálculo de derivadas por definição.
- Revisar o cálculo de limites envolvendo radicais.

Conceitos abordados: Do ponto de vista da derivada, o principal conceito abordado neste problema é a própria definição. Além disso, deve-se fazer uso de manipulações algébricas corriqueiras no cálculo de limites que envolvem radicais.
Resolução do problema: Sabemos que $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{2(x+h)+1}}$ e que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2(x+h)+1}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2(x+h)+1}}{\sqrt{2(x+h)+1}\cdot\sqrt{2x+1}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2(x+h)+1}}{\sqrt{2(x+h)+1}\cdot\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{1}{h} \\
&= \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2(x+h)+1}}{h\sqrt{2(x+h)+1}\cdot\sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+2h+1}}{h\sqrt{2(x+h)+1}\cdot\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+2h+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+2h+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+1)-(2x+2h+1)}{h\sqrt{2(x+h)+1}\cdot(2x+1)+h\sqrt{2x+1}\cdot(2(x+h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x+1-2x-2h-1}{h[\sqrt{2(x+h)+1}\cdot(2x+1)+\sqrt{2x+1}\cdot(2(x+h)+1)]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h[\sqrt{2(x+h)+1}\cdot(2x+1)+\sqrt{2x+1}\cdot(2(x+h)+1)]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{\sqrt{2(x+h)+1}\cdot(2x+1)+\sqrt{2x+1}\cdot(2(x+h)+1)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)+\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)} \\
&= \frac{-2}{2[\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)]} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{(2\,x+1)^3}} \\
&= f'(x)
\end{aligned}
$$

Comentários: Deve-se observar que, com relação a definição de derivada o problema não tem muito segredo. O principal motivo pelo qual é estudado estes problemas de cálculo de derivadas por definição, é mostrar aos estudantes de onde vem as regras (teoremas) de derivação.

Problema 4.2
Objetivos do problema:

- Trabalhar a definição de derivada.
- Trabalhar o conceito de reta tangente.
- Trabalhar o conceito de retas perpendiculares.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado por este problema é a ideia de reta tangente a uma curva, de onde surge naturalmente o conceito de derivada. Além disso, do Ensino Médio, se faz necessário o conceito de retas perpendiculares.
Resolução do problema: Para encontrarmos a equação da reta tangente a curva $y = x^3 - 1$, e que seja perpendicular a reta $y = 1 - x$, primeiro fazemos a derivada da função em um ponto. Assim:

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

fazendo temos,

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_1 + h)^3 - 1 - (x_1^3 - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x_1^2 + 2x_1 h + h^2)(x_1 + h) - 1 - (x_1^3 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_1^3 + x_1^2 h + 2x_1^2 h + 2x_1 h^2 + h^2 x_1 + h^3 - 1 - (x_1^3 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3 - 1 - x_1^3 + 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x_1^2 + 3x_1 h + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 3x_1^2 + 3x_1 h + h^2 \\
&= 3x_1^2
\end{aligned}$$

Sabemos que $f'(x_1) = 3x_1^2 = m_t$, mas por hipótese que a reta tangente é perpendicular a $y = 1 - x$ sendo assim o coeficiente angular da reta tangente é: $m_t = 1$, para conhecermos por qual ponto passa tal reta fazemos:$f'(x_1) = m_t \Rightarrow 3x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Se $x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ então $y = x_1^3 - 1 \Rightarrow y = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 1 \Rightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{27} - 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{9} - 1$, desta forma temos o ponto:

$$P = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right)$$

Assim temos as retas:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) = 1\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow y = x - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} - 1 \Rightarrow y = x - \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$

e

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \left(-\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) = x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow y = x + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} - 1 \Rightarrow y = x + \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$.

Portanto, para o ponto $P_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right)$ temos a reta

$r : y = x - \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$, tangente a curva $y = x^3 - 1$ e perpendicular a reta $y = 1 - x$

e para o ponto $P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right)$ temos a reta

$s : y = x + \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$ tangente a curva $y = x^3 - 1$ e perpendicular a reta $y = 1 - x$.

Comentários: Deve-se observar que para a resolução do problema se fez necessário o conhecimento de conceitos anteriores ao próprio Cálculo. Na realidade, esta é uma das maiores dificuldades de estudantes de Cálculo, os conteúdos que servem como base para o mesmo.

Problema 4.3

Objetivos do problema:

- Trabalhar a definição de derivada.
- Fazer uso das propriedades operatórias de limites.
- Trabalhar a abstração.

Conceitos abordados: O principal conceito abordado neste problema é o cálculo de limites. Mais precisamente, o limite que define a derivada de uma função.

Resolução do problema: De fato, utilizando a definição de derivada, e a hipótese de que f é derivável, obtemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{xf(x+h) + hf(x+h) - xf(x)}{h} \\ &= x\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x+h) \\ &= xf'(x) + f(x) \end{aligned}$$

Comentários: Problemas desta natureza são ótimos para incentivar os estudantes a desenvolverem sua próprias demonstrações de proposições. O problema abordado propõe a demonstração da regra de derivação de um caso particular de produto de funções. Problemas desta natureza podem contribuir com estudantes que tem dificuldade de memorizar regras de derivação.

Problema 4.4
Objetivos do problema:

- Trabalhar a definição de derivada.
- Fazer uso das propriedades operatórias de limites.
- Trabalhar a abstração.

Conceitos abordados: De forma semelhante ao problema anterior o principal conceito abordado é a definição de derivada.
Resolução do problema:

a) Devemos notar que $0 = 0 + 0$, daí calculamos

$$\begin{aligned} f(0) &\stackrel{def}{=} f(0) + f(0) + 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2 \\ &= 2f(0) \end{aligned}$$

nestas condições só pode ocorrer $f(0) = 0$.

b) Olhando a derivada a partir do quociente de Newton obtemos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \\ &\stackrel{def}{=} 1 \end{aligned}$$

isto é $f'(0) = 1$.

c) Agora utilizemos a definição de Leibniz para derivada, daí obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\stackrel{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(h) + x^2 h + x h^2 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} + x^2 + xh \right) \\ &\stackrel{def}{=} 1 + x^2 \end{aligned}$$

isto é, $f'(x) = 1 + x^2$.

Comentários: O problema faz com que o estudante trabalhe com definições bastante abstratas, para que se possa desenvolver a capacidade de enxergar algo além do que é dado no problema, isto é, problemas desta natureza estimulam a criatividade dos estudantes, pois não é explicado de forma especifica como devem ser utilizadas as hipóteses dadas.

Problema 4.5
Objetivos do problema:

- Trabalhar regras de derivação.
- Trabalhar os testes da derivada primeira.

Conceitos abordados: Neste problemas é abordado o conceito de derivada de uma função, além disso, deve-se ter em mente os conceitos de ponto crítico e a definição de reta tangente ao gráfico de uma função.
Resolução do problema: Se x_0 é ponto crítico de g, então $g'(x_0)$ ou não existe ou devemos ter $g'(x_0) = 0$. Uma vez que f é derivável temos,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

devemos notar que g' não exite para $x = 0$, mas uma vez que $0 \notin D(g)$, por hipótese, $x = 0$ não pode ser ponto crítico. Assim só resta existir $x_0 \in D(g)$ tal que $g'(x_0) = 0$, isto é, $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$, isto prova a primeira parte.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0, possui equação

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = xf'(x_0) - (x_0 f'(x_0) - f(x_0)) = xf'(x_0)$$

e é claro que tal reta contem a origem, e isto conclui a segunda parte do problema.
Comentários: Problemas desta natureza podem ser facilmente propostos antes dos problemas de otimização, visto que este modelo de problema traz o conceito de ponto crítico ainda de forma abstrata. Se o estudante poder se familiarizar com tais problemas, será muito mais simples compreender os problemas de otimização.

Problema 4.6
Objetivos do problema:

- Trabalhar o conceito de derivada.
- Trabalhar a aplicação da derivada para determinar retas tangentes.

Conceitos abordados: Além do conceito de derivada é abordado neste problema o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função.
Resolução do problema: Sejam $\gamma = x^2 + x$ a parábola e $P = (t, t^2 + t)$ um ponto qualquer sobre a mesma. A reta que tangencia a parábola γ em P tem equação

$$y - \gamma(t) = \frac{d\gamma}{dx}(t)(x - t)$$

fazendo as substituições e operações necessárias obtemos,

$$
\begin{aligned}
y-\gamma(t)=\frac{d\gamma}{dx}(t)(x-t) &\Rightarrow y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)\\
&\Rightarrow y=2tx-2t^2+x-t+t^2+t\\
&\Rightarrow y=(2t+1)x-t^2
\end{aligned}
$$

agora basta determinar t que satisfaça $y(2)=-3$. Com efeito obtemos

$$
\begin{aligned}
y(2)=-3 &\Rightarrow (2t+1)\cdot 2-(t)^2=-3\\
&\Rightarrow -t^2+4t+5=0\\
&\Rightarrow t^2-4t-5=0\\
&\Rightarrow (t-2)^2=9\\
&\Rightarrow t=\pm 3+2\\
&\Rightarrow t_1=5 \text{ e } t_2=-1
\end{aligned}
$$

Desta forma, para $t=t_1=5$, obtemos $y=11x-25$ e para $t=t_2=-1$ segue $y=-x-1$. Portanto as retas procuradas são $r_1: y=11x-25$ e $r_2: y=-x-1$.

Comentários: Este problema ainda é bastante abstrato, visto que ainda não trabalha situações do cotidiano, ou aplicações a vida real. No entanto, se faz necessário que um estudante seja capaz de compreender os conceitos matemáticos de forma abstrata, para que então possa utilizá-los com eficiências em situações mais reais.

Problema 4.7

Objetivos do problema:

- Aplicar o teorema do valor médio.

Conceitos abordados: Os principais conceitos abordados são, o conceito de derivada e o teorema do valor médio.

Resolução do problema: Faremos a prova utilizando o Teorema do Valor Médio (TVM).

Sejam $f(x)=\sin x$ e $[a,b]$ um intervalo não degenerado. A função

$$f|_{[a,b]}(x)=\sin x$$

satisfaz as condições do TVM, isto é, $f|_{[a,b]}$ é continua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), desta for a existe $c\in(a,b)$, tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

ou seja

$$\sin b-\sin a=\cos c(b-a)$$

donde segue

$$|\sin b-\sin a|=|\cos c||b-a|\leq|b-a|$$

uma vez que $|cosx| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, isto conclui nossa prova.

Comentários: Este problema ilustra uma das diversas aplicações do teorema do valor médio. O mesmo teorema tem fundamental importância no cálculo de primitivas de uma função, o que é também conhecido como integral indefinida.

Problema 4.8

Objetivos do problema:

- Trabalhar o cálculo de limites.
- Aplicar a regra de L'Hôptal para limites indeterminados.

Conceitos abordados: Neste problema temos dois conceitos principais trabalhados, que são o cálculo de limites e a regra de L'Hôptal.

Resolução do problema:

a) De inicio devemos notar que, quando $x \to 0^+$, x^p tende a 0 e $\ln x$ tende a $-\infty$. Neste caso nos deparamos com um produto indeterminado, manipulando algebricamente o limite podemos reescrevê-lo, assim como se segue

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^p}}$$

neste caso encontramos uma nova indeterminação, da forma $\frac{-\infty}{\infty}$. Neste caso podemos aplicar a regra de L'Hôptal, daí obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^p}} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-px^{p-1}}{x^{2p}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2p-1}}{-px^{p-1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2p-1-p+1}}{-p} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^p}{-p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

portanto, $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = 0$.

b) Podemos supor que o limite existe. Então, seja $k = \lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\frac{1}{\sin x}}$, com isto podemos calcular

$$\ln k = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\frac{1}{\sin x}}\right)$$

uma vez que $\ln$ é uma função continua, podemos comutar a função com o limite, donde obtemos

$$\ln k = \lim_{x\to 0} \ln\left((1+\sin(2x))^{\frac{1}{\sin x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(2x))}{\sin x}$$

devemos notar que temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de L'Hôptal obtemos

$$\ln k = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos(2x)}{1+\sin(2x)}}{\cos x} = 2$$

ou seja, $\ln k = 2 \Rightarrow k = e^2$. Portanto $k = \lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\frac{1}{\sin x}} = e^2$.

Comentários: Este problema ilustra o quão complicado podem se tornar o cálculo de limite, mesmo fazendo uso de um teorema tão forte, a regra de L'Hôptal, é possível enxergar dificuldades nas manipulações algébricas. Além disso, este problema nos mostra o quão criativo deve ser um matemático para que possa solucionar problemas mais complicados que os de costume.

Problema 4.9
Objetivos do problema:

- Trabalhar os conceitos de máximos e mínimos.
- Trabalhar a matematização de um problema.

Conceitos abordados: Neste problema podemos observar conceitos da geometria plana com respeito a figuras elementares, além disso, se faz necessário o uso dos testes da primeira e segunda derivada para determinar extremos de uma função.
Resolução do problema: Suponha que façamos um corte no arame, de forma há obtermos dois pedaços um de comprimento t e um segundo de comprimento $L-t$. Com o primeiro pedaço (o de comprimento t) fazemos o triângulo equilátero de lado $\frac{t}{3}$, é fácil ver que a altura de tal triângulo será $h_t = \frac{t}{\sqrt{12}}$, com isto obtemos sua área, a saber,

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{3} \frac{t}{\sqrt{12}} = \frac{t^2}{6\sqrt{12}}$$

Com o segundo pedaço de arame (o de comprimento $L-t$) façamos um quadrado de lado $\frac{L-t}{4}$, é obvio que sua área será

$$A_q = \frac{(L-t)^2}{16}$$

Desta forma a soma das áreas procuradas será

$$A = \frac{(L-t)^2}{16} + \frac{t^2}{6\sqrt{12}}$$

Se admitirmos não cortar o arame, isto é, fazer $t=0$ ou $t=L$, vemos que A é uma função de t definida em um intervalo fechado, mais precisamente temos,

$$\begin{array}{rccl} A: & [0,L] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{(L-t)^2}{16} + \frac{t^2}{6\sqrt{12}} \end{array}$$

a qual possui derivada continua

$$\begin{array}{rccc} A': & [0,L] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t\left(\frac{3\sqrt{12}+8}{24\sqrt{12}}\right) - \frac{L}{8} \end{array}$$

Se fizermos $A'(t) = 0$ em busca de pontos críticos devemos obter

$$t = \frac{3\sqrt{12}}{3\sqrt{12}+8}L$$

É fácil ver pelo teste de segunda derivada para extremos locais que este $t = \frac{3\sqrt{12}}{3\sqrt{12}+8}L$ é o ponto em que a soma das áreas é miníma. O método do intervalo fechado nos mostra que a referida soma é máxima quando $t = 0$, isto é, $t = 0$ é o ponto de máximo. Isto é, para obter a área miníma devemos cortar o arame de forma que o pedaço destinado a fazer o triângulo messa $\frac{3\sqrt{12}}{3\sqrt{12}+8}L$, e para obter a área máxima o pedaço de arame destinado ao triângulo deve ter comprimento zero, isto é, não devemos construir o triângulo.

Para mostrar que, se t é o ponto de mínimo, então o lado do quadrado é $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo, basta ver que, o lado do quadrado é

$$\begin{aligned} \frac{L-t}{4} &= \frac{L}{4}\left(\frac{8}{3\sqrt{12}+8}\right) \\ &= L\left(\frac{2}{3\sqrt{12}+8}\right) \\ &= \frac{2L}{3}\left(\frac{3\sqrt{12}}{3\sqrt{12}+8}\right)\frac{1}{\sqrt{12}} \\ &= \frac{2}{3}h_t \end{aligned}$$

Isto conclui a solução do problema.

Comentários: O problema abordado trata-se de um problema de otimização, aliás dos mais complicados, visto que todas as funções devem ser deduzidas pelo estudante. Apesar deste problema possuir uma contextualização de certa forma forçada, ele serve para ilustrar o quão útil podem ser as derivadas.

Problema 4.10

Objetivos do problema:

- Trabalhar a relação entre uma função decrescente e sua derivada.
- Trabalhar técnicas de derivação.
- Trabalhar os teoremas das derivadas primeira e segunda.

Conceitos abordados: Neste problema além do conceito de derivada temos, os conceitos de função crescente e decrescente, os quais se relacionam com as derivadas.

Resolução do problema: Primeiro devemos notar que $f(x) > 0$ e $f(x) \neq 1$ para todo $x > 0$. A primeira afirmação é óbvia, visto que, se $x > 0$ então $1 + x > 0$, não há como a potência de um número positivo resultar em zero. Para ver a segunda afirmação, notemos que o número a^b vale 1 se exatamente um dos dois casos ocorrer

$i)$ $a = 1$ e b é qualquer

$ii)$ $a \in \mathbb{R}^*$ e $b = 0$

(i) não pode ocorrer pois, se assim o fosse teríamos que calcular $\frac{1}{0}$, o que não existe. E (ii) não pode ocorrer pois $h(x) = \frac{1}{x}$ nunca assume o valor zero.

Como $f(x) > 0$ e $f(x) \neq 1$, faz sentido definir $\psi(x) = \ln(f(x)) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$. Derivando ψ obtemos

$$\begin{aligned}\psi'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] \\ &= -\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x^2+x}\end{aligned}$$

Com isto concluímos que

$$f'(x) = f(x)\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x^2+x}\right]$$

ou ainda

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x^2}\left[\ln(1+x) - \frac{x}{x+1}\right]$$

Como $f(x), x^2 > 0$ para $x > 0$, segue que $-\frac{f(x)}{x^2} < 0$. A fim de mostrar que $f(x)$ é estritamente decrescente para $x > 0$, basta mostrar que, $\ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0$, para $x > 0$. Com efeito, podemos definir a função

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$$

é fácil ver que

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{e} \quad \varphi''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

Fazendo $\varphi'(x) = 0$, obtemos $x = -1$ e $x = 0$. Segue do teorema da derivada primeira que estes são pontos críticos de φ. Uma vez que estamos analisando f para valores maiores que zero, podemos estudar apenas $x = 0$. Calculando $\varphi''(0)$, obtemos 1, do teorema da derivada segunda segue que φ assume valor mínimo em $x = 0$, e este é $\varphi(0) = \ln(1+0) - \frac{0}{1+0} = 0$. Como 0 é o valor mínimo absoluto de φ, segue que $\varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0$, para todo $x > 0$, assim como deveríamos demostrar.

Com relação a desigualdade, uma vez que $\pi > e$ e f é estritamente decrescente, segue que $f(\pi) < f(e)$, ou seja $(1+\pi)^{\frac{1}{\pi}} < (1+e)^{\frac{1}{e}}$, elevando ambos os lados da desigualdade a πe, obtemos a desigualdade desejada, $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

Comentários: Deve-se notar que este problema trata-se de um problema de otimização disfarçado, visto que a otimização foi utilizada de forma secundária, para fazer a prova do item principal do problema.

Problema 4.11
Objetivos do problema:

- Fazer uso dos teoremas e definições que envolvem as derivadas para esboçar o gráfico de uma função.

Conceitos abordados: Neste problema são abordados a maioria dos conceitos com respeito as derivadas de uma função, extremos, funções crescentes e/ou decrescentes e concavidades. Além disso é constantemente utilizado o estudo do sinal de uma função por meio de inequações produto.
Resolução do problema: Dada $f(x) = x^2e^{-x}$, devemos notar que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, uma vez que x^2 é não negativa e e^{-x} é sempre positiva , para quaisquer valores de x. Derivando f obtemos $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$. Uma vez que $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, avaliar o sinal de f' é o mesmo que avaliar o sinal de $g(x) = 2x - x^2$. Com efeito devemos encontrar as raízes de g, de forma imediata obtemos $x = 0$, e $x = 2$, como sendo raízes de g. Como g trata-se de uma função quadrática com concavidade voltada para baixo, sabemos que $g(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $g(x) > 0, \forall x \in (0, 2)$ e $g(x) = 0, \forall x \in \{0, 2\}$.

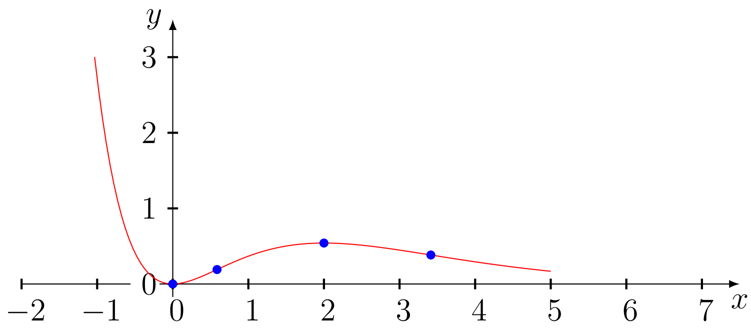
Derivando f uma segunda vez obtemos $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Uma vez que $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, avaliar o sinal de f'' é o mesmo que avaliar o sinal de $h(x) = x^2 - 4x + 2$. É fácil ver que $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$, são as raízes de h. Como h trata-se de uma função quadrática com concavidade voltada para cima sabemos que, $h(x) < 0, \forall x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, $h(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$ e $h(x) = 0, \forall x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$.

Calculando o limite, $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$, obtemos, fazendo uso da regra de L'Hôptal, $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$. E calculando $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}$, obtemos, por L'Hôptal, $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty$.

Com as informações obtidas até o momento podemos construir a seguinte tabela:

Derivada	Sinal	Conjunto
f'	$(+)$	$(0, 2)$
f'	$(-)$	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
f'	0	$\{0, 2\}$
f''	$(+)$	$(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$
f''	$(-)$	$(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$
f''	0	$\{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$

Agora a partir dos teoremas das derivadas primeira e segunda podemos descrever o comportamento do gráfico de $f(x) = x^2e^{-x}$. O gráfico de $f(x)$ tende a ∞ quando $x \to -\infty$, é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, crescente em $(0, 2)$, atinge mínimo absoluto em $x = 0$ e máximo local (uma vez que o limite quando $x \to -\infty$ é igual a ∞) em $x = 2$, é concava para cima em $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ e em $(2+\sqrt{2}, \infty)$, concava para baixo em $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, possui ponto de inflexão em $x = 2-\sqrt{2}$ e em $x = 2+\sqrt{2}$, por fim quando $x \to \infty$ $f(x)$ tende a 0. Segue a figura do gráfico:



Comentários: Deve-se observar o quão eficiente é o cálculo quando queremos descrever o comportamento do gráfico de uma função, isto se dá pois a derivada nos fornece todas as informações do gráfico da função, é neste sentido que falamos que o cálculo (Diferencial) é apenas o estudo de funções.

Problema 4.12
Objetivos do problema:

- Trabalhar os testes da primeira e segunda derivada.
- Trabalhar as equações paramétricas da circunferência.

Conceitos abordados: Neste problema, além dos conceitos a cerca de derivadas vemos os conceitos de circunferências e retas tangentes.
Resolução do problema: A circunferência $C : x^2 + y^2 = 25$, é inteiramente descrita por meio das seguintes equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

um ponto P sobre as circunferência tem coordenadas $P(5\cos t, 5\sin t)$.

Seja $\delta : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\delta(t) = \sqrt{(5\cos t + 2)^2 + 25\sin^2 t} + \sqrt{(5\cos t - 2)^2 + 25\sin^2 t}$$

δ calcula a soma das distâncias de um ponto P da circunferência a $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. Trabalhando algebricamente a expressão de δ obtemos:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \sqrt{(5\cos t + 2)^2 + 25\sin^2 t} + \sqrt{(5\cos t - 2)^2 + 25\sin^2 t} \\ &= \sqrt{25\cos^2 t + 20\cos t + 4 + 25\sin^2 t} + \sqrt{25\cos^2 t + 20\cos t + 4 + 25\sin^2 t} \\ &= \sqrt{29 + 20\cos t} + \sqrt{29 - 20\cos t} \end{aligned}$$

podemos ainda calcular $[\delta(t)]^2$, daí obtemos

$$[\delta(t)]^2 = 58 + 2\sqrt{841 - 400\cos^2 t}$$

Nosso objetivo é otimizar $\delta(t)$, no entanto otimizar $\delta(t)$, é o mesmo que otimizar

$$\psi(t) = \left(\frac{[\delta(t)]^2 - 58}{2}\right)^2 = 841 - 400\cos^2 t$$

Assim derivando ψ obtemos, $\psi'(t) = 800\cos t \sin t$. Fazendo $\psi'(t) = 0$ obtemos o conjunto $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$, S é o conjunto dos pontos críticos de ψ.

Derivando ψ uma segunda vez, obtemos $\psi''(t) = 800(\cos^2 t - \sin^2 t)$, calculando $\psi''(t)$ para $t \in S$, obtemos

$$\psi''(0) = \psi''(\pi) = 800 > 0 \quad \text{e} \quad \psi''(\frac{\pi}{2}) = \psi''(\frac{-\pi}{2}) = -800 < 0$$

Segue do teorema da derivada segunda que, $t = 0$ e $t = \pi$ são pontos de mínimo de ψ, consequentemente geram pontos de mínimo de δ, e $t = \frac{\pi}{2}$, $t = -\frac{\pi}{2}$ são pontos de máximo de ψ, e consequentemente geram pontos de máximo em δ.

Agora basta utilizarmos as equações paramétricas da circunferência dada para vermos que, $x = 5$ e $x = -5$ são os pontos em que a soma mencionada pelo problema é miníma, e $x = 0$ é o ponto em que a referida soma é máxima.

Comentários: Este é um clássico problema de otimização. A particularidade da solução apresentada se vê no fato de ser utilizado as equações paramétricas da circunferência dada, algo que facilitou bastante a solução. O problema também poderia ser resolvido trabalhando sobre a equação reduzida da circunferência.

Problema 4.13

Objetivos do problema:

- Fazer o estudo completo de uma função.
- Utilizar os teoremas de derivada para esboçar o gráfico da função.

Conceitos abordados: Neste problema temos como conceitos principais o cálculo de limites, aplicações das derivadas e com respeito a conteúdos elementares temos o estudo de sinal de função por meio de inequação produto.

Resolução do problema:

a) Determine o domínio da função f.

O domínio da função f depende da raiz quadrada e do quociente. Com relação ao quociente basta que $(x-1)(x+2) \neq 0$, o que ocorre se $x \neq 1$ e $x \neq -2$. Com relação ao radical, necessitamos que

$$\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$$

Então devemos estudar o sinal de $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x) = x(x+1)$ e $q(x) = (x-1)(x+2)$. $p(x)$ trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima e com raízes em $x = -1$ e $x = 0$, com efeito $p(x) > 0, \forall x \in, (\infty, -1) \cup (0, \infty)$ e $p(x) < 0, \forall x \in (-1, 0)$. $q(x)$ trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima e com raízes em $x = -2$ e $x = 1$, com efeito $q(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ e $q(x) < 0, \forall x \in (-2, 1)$.

Com isto podemos construir a seguinte tabela para o estudo do sinal de $h(x)$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
p	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
q	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$h = \frac{p}{q}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

O domínio da f são todos os pontos em que $h(x) \geq 0$, ou seja $D(f) = (-\infty, -2) \cup [-1, 0] \cup (1, \infty)$.

b) Calcule $\lim f(x)$ no infinito e limites laterais nos pontos $x = -2$, $x = 1$.

Primeiro calculemos os limites em $\pm\infty$, com efeito devemos ter,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} &= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

e, o resultado é idêntico quando $x \to \infty$. Ou seja $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.

Com relação aos limites laterais no ponto $x = -2$, temos que

$$\lim_{x\to-2^-} \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} = \lim_{x\to-2^-} \sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+2)}} \lim_{x\to-2^-} \sqrt{x(x+1)}$$

a medida que $x \to -2^-$, segue que $(x-1)(x+2) \to 0^+$, visto que $(x-1)(x+2) > 0, \forall x \in (-\infty, -2)$,daí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2^-} \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} &= \lim_{x\to-2^-} \sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+2)}} \lim_{x\to-2^-} \sqrt{x(x+1)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{0^+}}\sqrt{2} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Com relação ao $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, este não podemos calcular, visto que -2 não é ponto de acumulação a direita de f, ou seja é possível exibir $r > 0$ tal que, o conjunto de pontos x que satisfaz $x - (-2) < r$, com $x > -2$, é vazio.

Com relação aos limites laterais no ponto $x = 1$, devemos ver que não podemos calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, uma vez que $x = 1$ não é ponto de acumulação a esquerda de f. Mas podemos calcular $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, assim como se segue

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+2)}} \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x(x+1)}$$

a medida que $x \to 1^+$, segue que $(x-1)(x+2) \to 0^+$, visto que $(x-1)(x+2) > 0, \forall x \in (1,\infty)$,daí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} &= \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+2)}} \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x(x+1)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{0^+}}\sqrt{2}\\ &= \infty\end{aligned}$$

Por fim temos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c) Esboce o gráfica dessa função.

Dos itens anteriores sabemos que as retas $x = -2$ e $x = 1$ são assintotas verticais de f e que $y = 1$ é assintota horizontal de f.

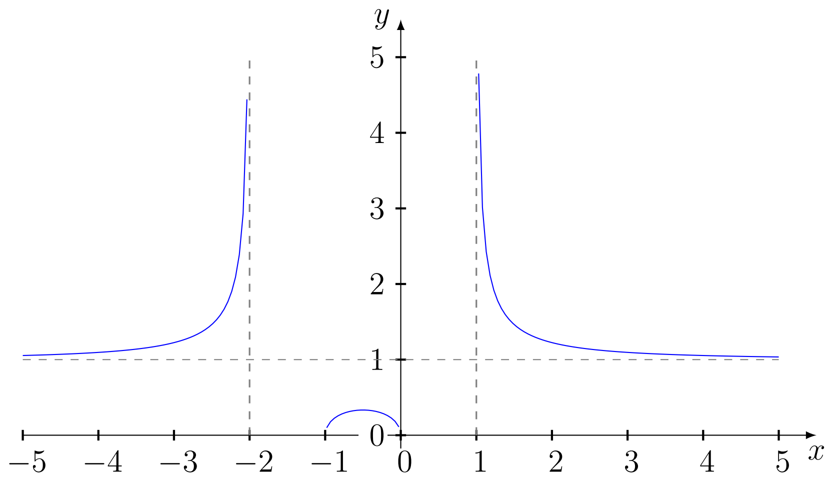
Para que possamos completar o esboço do gráfico de f,devemos estudar a d primeira derivada da função. Derivando f uma vez obtemos

$$f'(x) = \frac{-4x-2}{2(x^2+x-2)^2\sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}}}$$

primeiro vamos estudar o sinal de f', uma vez que $2(x^2+x-2)^2\sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, devemos estudar o sinal de $g(x) = -4x-2$, o que é trivial, uma vez que $g(x)$ tem zero em $x = -\frac{1}{2}$ e é decrescente, sabemos que $g(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e $g(x) < 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Como o zero de g é o zero de f' obtemos três informações sobre f, f é crescente em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ é decrescente em $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ e assume valor extremo em $x = -\frac{1}{2}$. Como f muda de crescente para decrescente em $x = -\frac{1}{2}$, então $x = -\frac{1}{2}$, é ponto de máximo local de f, e o valor máximo local será

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)}{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right)}} = \frac{1}{3}$$

Por fim podemos esboçar o gráfico



d) Determine a imagem da função f.

Primeiro devemos perceber que f assume todos os valores $k \in \mathbb{R}_{>1}$, uma vez que os limites laterais em $x = -2$ e $x = 1$ tendem a ∞ e os limites no infinito tendem a 1. No intervalo $[-1, 0]$, a função atinge seus zeros, e o valor máximo local $y = \frac{1}{3}$. Com isto podemos determinar a imagem de f como sendo $im(f) = (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \setminus \left(\frac{1}{3}, 1\right]$.

Comentários: O problema está dividido em vários itens para que o estudante tenha objetivos bem definidos no decorrer do processo de resolução, no entanto, todos os itens dependem uns dos outros. O problema poderia ser reescrito pedindo simplesmente que fosse feito um estudo completo da função dada.

Problema 4.14
Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas, é possível observar neste problema a utilização do conceito de distância entre pontos para construir a função desejada.
Resolução do problema: Sejam $r : y = x + 2$ e $\gamma : y = x^2$ respectivamente a reta e a parábola mencionadas no problema. Visto que a reta e a parábola tratam-se de curvas elementares, é fácil observar que $r \geq \gamma, \forall x \in [-1, 2]$. Assim definimos a distância vertical entre γ e r, como sendo

$$d(r, \gamma)(x) = x + 2 - x^2$$

se omitirmos as curvas r e γ temos a função

$$d(x) = -x^2 + x + 2$$

a qual deve ser analisada no intervalo fechado $[-1, 2]$. Derivando d obtemos $d'(x) = -2x + 1$, donde obtemos o ponto crítico $x = \frac{1}{2}$, uma vez que d trata-se de uma parábola com concavidade voltada para baixo, $x = \frac{1}{2}$ deve ser ponto de máximo (poderíamos argumentar também através do teste da derivada primeira ou derivada segunda). Devemos observar que d de fato assume valor máximo em $x = \frac{1}{2}$, visto que $d(-1) = d(2) = 0$, e este é $d\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$. Isto conclui a solução do problema.

Comentários: Este trata-se novamente de um clássico problema de otimização. No entanto, ao invés de tratar otimização de fenômenos reais, o problema procura tratar da otimização de conceitos puramente matemáticos. De um ponto de vista mais abstrato, o número calculado seria a distância entre as funções r e γ, algo que pode ser observado do ponto de vista dos espaços métricos.

Problema 4.15

Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas é possível observar conceitos da matemática aplicada a agricultura.

Resolução do problema: Este trata-se de um clássico problema de otimização. O que queremos na realidade é encontrar o N que maximiza Y. Para isto derivemos Y, donde obtemos

$$Y' = \frac{-kN^2 + k}{(1 + N^2)^2}$$

Fazendo $Y' = 0$ obtemos os pontos criticos $N = \pm 1$. Aplicando os valores a função Y, obtemos que $N = 1$, maximiza a produção. Ou seja o nível de nitrogênio 1 (em unidades apropriadas) da melhor produção.

Comentários: Este problema nos mostra uma das possibilidades de aplicações das derivadas para otimização de fenômenos reais. Mais precisamente podemos utilizar as derivadas para fazer otimização em diversões ramos do conhecimento, por exemplo economia e biologia.

Problema 4.16

Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas é possível observar o conceito de semelhança de triângulos da geometria plana.

Resolução do problema: Considerando a figura do problema. Note que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DBE. Assim temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{10}{12} &= \frac{10-x}{y} \\ 10y &= 120-12x \\ y &= 12-\frac{6}{5}x \end{aligned} \tag{6.2}$$

com tudo temos y em função de x.

Sabemos que a área do retângulo inscrito é dada pela seguinte função de duas variáveis,

$$A(x,y) = x\cdot y \tag{6.3}$$

mas em 6.2 conhecemos y. Assim podemos escrever 6.3 apenas em função de x, e temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= x\cdot(12-\frac{6}{5}x) \\ A(x) &= 12x-\frac{6}{5}x^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Derivando $A(x)$ temos $A'(x) = 12 - \dfrac{12}{5}x$. Fazendo $A'(x) = 0$ para investigarmos os pontos criticos de $A(x)$ temos:

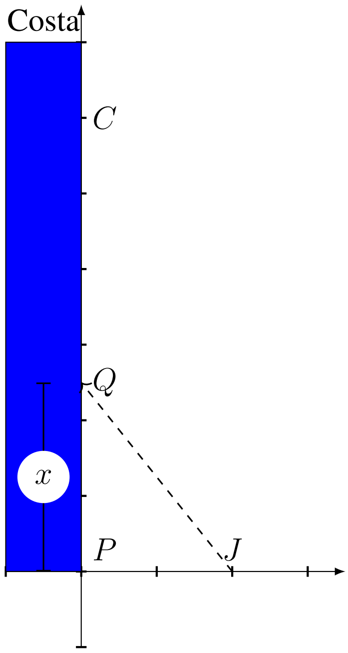
$$\begin{aligned} &A'(x) = 0 \\ 12-\frac{12}{5}x &= 0 \\ -\frac{12}{5}x &= -12 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Como $A(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo temos que $x = 5$ é ponto de máximo. Por fim à área máxima do retângulo inscrito no triângulo ABC é $A(5) = 30m^2$.
Comentários: Este problema possui uma abordagem bastante geométrica, no entanto não seria possível fazer a otimização da área citada no problema sem o Cálculo Diferencial. Tal problema se mostra de forma abstrata, no entanto, problemas desta natureza que envolvem geometria, podem ter diversas aplicações a realidade.

Problema 4.17
Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas é possível observar o conceito de velocidade da física.
Resolução do problema: Sejam P o ponto na costa mais próximo do barco Q, um ponto entre a cidade e P, onde Jane deseja aportar, e C a cidade. Assim como está representado na seguinte figura,



Suponha que Jane (J) aporte a uma distância x do ponto P, mais precisamente no ponto Q. Com isto ela terá de remar (pelo Teorema de Pitágoras) por uma distância de $\sqrt{x^2+4}\,mi$ e caminhar por mais $6-x\,mi$.

Da física sabemos que a velocidade média é o quociente entre a distância percorrida e o tempo decorrido, isto é,

$$v=\frac{s}{t}$$

com isto, obtemos que o tempo decorrido deve ser o quociente entre o espaço percorrido e a velocidade, ou seja,

$$t=\frac{s}{v}$$

Sabe-se que Jane rema a $2\,mi/h$ e deverá remar por $\sqrt{x^2+4}\,mi$, com isto o tempo de remo será

$$t_r=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\,h$$

além disso, Jane caminha a uma velocidade de $5\,mi/h$, assim o tempo de caminhada será

$$t_c=\frac{6-x}{5}\,h$$

Desta forma o tempo total do percurso será,

$$t(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{6-x}{5}$$

Deve-se observar que o tempo t é uma função de x, que nas condições do problemas. o domínio trata-se de um intervalo fechado, mais precisamente

$$\begin{array}{rccl} t: & [0,6] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{6-x}{5} \end{array}$$

Nosso objetivo é minimizar t, de forma a obter o percurso que consome menor tempo. Derivando t obtemos

$$t'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}$$

Fazendo $t'(x) = 0$ obtemos o ponto crítico $x = \frac{4}{\sqrt{21}}$. Derivando t uma segunda vez obtemos

$$t''(x) = -\frac{x^2}{2\,(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}$$

aplicando o ponto crítico em t'' obtemos

$$t\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = \frac{441}{500\sqrt{21}} > 0$$

Segue do teste da derivada segunda que este x é o ponto de mínimo local, daí é fácil ver com o método do intervalo fechado, que de fato $x = \frac{4}{\sqrt{21}}$ é ponto de mínimo absoluto. Com isto resolvemos o problema. Para que Jane chegue a cidade de forma mais rápida ela deverá aportar a uma distância de $6 - \frac{441}{500\sqrt{21}}\, mi$ da cidade e continuar sua viagem caminhando.

Comentários: É claro que a situação descrita no problema é algo bastante forçado, visto que a complexabilidade dos dos cálculos não seriam tão interessantes para o cenário apresentado. No entanto esta situação poderia tratar-se claramente de uma viagem em grande escala que necessitaria de um rigoroso planejamento prévio.

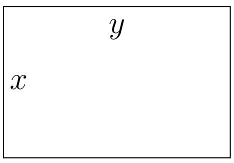
Problema 4.18

Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas é possível observar conceitos elementares da geometria plana, a saber, a noção de perímetro e área de um retângulo.

Resolução do problema: Dado um retângulo qualquer de perímetro $k\, u.c$



sabemos que $2x + 2y = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{2} - x$. Além disso sua área é dada por

$$A = xy$$

substituindo $y = \frac{k}{2} - x$ em A obtemos

$$A = \frac{kx}{2} - x^2$$

A possui derivada $A' = \frac{k}{2} - 2x$, fazendo $A' = 0$, obtemos o ponto crítico $x = \frac{k}{4}$. É fácil ver pelo teste da derivada segunda que $x = \frac{k}{4}$, é ponto de máximo de A, ou seja a maior área ocorre

quando $x = \frac{k}{4}$, daí obtemos $y = \frac{k}{4}$, ou seja, temos um retângulo com os quatro lados iguais, isto é, temos um quadrado, o que conclui a prova.
Comentários: Uma abordagem mais precisa do problema deveria ser feito utilizando o método do intervalo fechado. Porem, consideramos o domínio da função como sendo um intervalo aberto, a saber $x \in (0, k)$, visto que se fosse um intervalo fechado, $[0, k]$, nos extremos a função assumiria o valor zero. Mas como A trata-se da área de um retângulo de perímetro k, nos extremos não teríamos um retângulo, o que não faria sentido.

Problema 4.19
Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas é possível observar conceitos relacionados a geometria analítica e a geometria plana.
Resolução do problema: Nestas condições, para $x \in (0, \sqrt{12})$, temos a base do retângulo sendo $b = 2x$ e sua altura medindo $h = y(x) = 12 - x^2$, desta forma sua área será

$$A = b \cdot h = 24x - 2x^3$$

A função A possui derivadas $A' = 24 - 6x^2$ e $A'' = -12x$. De A' obtemos $x = \pm 2$ como pontos críticos, mas visto que o domínio de A é o intervalo aberto $(0, \sqrt{12})$ o único ponto crítico será $x = 2$. Daí A'' nos informa que $x = 2$ é ponto de máximo local, daí uma vez que $\lim_{x\to 0^+} A(x) = \lim_{x\to\sqrt{12}^-} A(x) = 0$, segue que $x = 2$ será o ponto de máximo absoluto, com isto a área máxima será

$$A(2) = 32\, u.a$$

por fim as dimensões do retângulo de área máxima serão

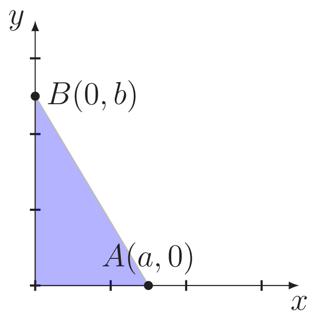
$$b = 4\, u.c \quad \text{e} \quad h = 8\, u.c.$$

Comentários: Este problema mostra a necessidade de se observar o domínio da função, para que não sejam feitas considerações errôneas. Se tivéssemos considerado o domínio como sendo o intervalo fechado $[0, \sqrt{12}]$, estaríamos afirmando que um segmento de reta sera um retângulo o que é um absurdo.

Problema 4.20
Objetivos do problema:

- Aplicar os teoremas para determinar os valores extremos de uma função.

Conceitos abordados: Além dos conceitos com relação as derivadas é possível observar conceitos relacionados a geometria analítica e plana.
Resolução do problema: O triângulo desejado é o ilustrado na seguinte figura,



Por hipótese a distância de A à B deve ser 20 unidades de comprimento, com isto, obtemos

$$b = \sqrt{400 - a^2}$$

Desta forma a área do triângulo será

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a\sqrt{400 - a^2}}{2}$$

Derivando A com relação a a obtemos

$$A' = -\frac{a^2}{2\sqrt{-a^2 + 400}} + \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 400}$$

fazendo $A' = 0$ obtemos os pontos críticos, $a = \pm 10\sqrt{2}$, uma vez que estamos trabalhando apenas no primeiro quadrante, nosso ponto crítico é $a = 10\sqrt{2}$. Derivando A uma segunda vez obtemos

$$A'' = -\frac{a^3}{2\left(-a^2 + 400\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\,a}{2\sqrt{-a^2 + 400}}$$

aplicando o ponto crítico em A'' obtemos

$$A''(10\sqrt{2}) = -2$$

segue do teste da derivada segunda que $a = 10\sqrt{2}$ é ponto de máximo. Com isto a área máxima do triângulo ocorrerá quando $a = 10\sqrt{2}$, daí obtemos $b = 10\sqrt{2}$, ou seja a área máxima ocorre quando $a = b$, assim como deveríamos demonstrar.

Comentários: De forma análoga aos problemas anteriores deve-se observar o domínio da função, visto que se a vale zero ou b vale zero não temos um triângulo. No entanto deve-se atentar para o fato de que não existe restrição na lei de formação da função, e sim na natureza do problema, no contexto envolvido, e alguém que resolve problemas deve observar todos esses fatos. Pois é o que diferencia a Resolução de Problemas da aplicação mecânica dos conceitos.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas: teoria e prática**. São Paulo: Paco Editora, 2014. p. 35–52.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. 2. ed. Campinas: Alínea, 2010. p. 13–53.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. In: STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações**. Trad. Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. p. 249–275.

DEWEY, J. **How we think**. Boston: D.C. Heath & Co, 1910.

ECHEVERRÍA, P. P. M. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 43–65.

GAGNÉ, R. M. Some issues in the psychology of mathematics instruction. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 14, n. 1, p. 7–18, 1983.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem- Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de Problemas e a Modelização matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação**: uma contribuição parra a formação continuada do professor de matemática. 315 f. Doutorado em Educação Matemática — Instituto de Geociência e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIND, W. **Manual de Psicologia Educacional**: aprendizagem e capacidades humanas. Tradução de ABREU, M. C. T. A. São Paulo: Haper & Row, 1997. 605 p.

LIMA, E. L. **Análise Real**: Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. v. 1.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition**. 2. ed. New York: WH Freeman and Company, 1992.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action**. Reston: NCTM, 1980. 29 p.

____. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Tradução: Associação de Professores de Matemática. APM. 2.ed. Lisboa: PNME, 2008. 466 p.

OLIVEIRA, C. R. de. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199–218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73–98, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PROENÇA, M. C. **Resolução de Problemas**: encaminhamentos para o esino e aprendizagem de mtemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas na formação de professores pesquisadores. I SERP – I Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro, São Paulo, 30-31/outubro, 2008. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo6.pdf>. Acesso em: 10 maio 2012.

RYAN, M. **Cálculo para Leigos**. Rio de Janeiro: Alta Books, 2012.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academic Press, 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER Jr, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31–42.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

STANIC, G. M.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1989. p. 1–22.

STERNBERG, R. **Psicologia cognitiva**. Trad. Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

STEWART, J. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1.

TAUSK, D. V. Aula de limite e continuidade. 2020.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo**. São Paulo: PEARSON, 2009. v. 1.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**: Teaching developmentally. New York: Longman, 2001. 478 p.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZILL, D. G.; WRIGHT, W. S. **Matemática 1**: Cálculo diferencial. México: MCGREW-HILL, 2011.

Sobre os autores

Roger Ruben Huaman Huanca é mestre e doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista, e membro associado do Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas da mesma instituição. É matemático e atua como professor do departamento de Matemática e do programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB. Líder do Grupo de Pesquisa em Resolução de problemas e Educação Matemática. Desenvolve pesquisas e publicações nas áreas de Educação Matemática e Matemática Aplicada.

Diego Jonathan Bezerra Silva é graduando em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), e membro do Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática (GPRPEM) da mesma instituição desde 2018. É bolsista de produtividade em pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico desde 2019. Trabalha nas áreas de Matemática e Análise Matemática, com ênfase em Cálculo Diferencial e Integral, Análise Funcional e Espaços Métricos.

Pammella Queiroz Souza é licenciada em Matemática (2010) pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), mestre em Matemática (2012) pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), com doutorado em Matemática pela UFPB/UFCG - Paraíba. Realizou estágio de Doutorado Sanduíche na Université de Franche-Comté, França (2014 - 2015). Suas atividades de pesquisa estão relacionadas às Equações Diferenciais Parciais, atuando principalmente nos seguintes temas: boa colocação, propriedades assintóticas e controlabilidade de sistemas distribuídos.

UEPB

Universidade Estadual da Paraíba

GPRPEM

Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática

CNPq

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico